

```

function x = iter(A,b,x0,kmax,toll,metodo)
% ITER solutore iterativo per sistemi lineari

% creo le matrici di iterazione
L = tril(A,-1);
U = triu(A, 1);
D = diag( diag(A) );

% scelgo il metodo e creo la matrice di
% iterazione corrispondente
%  $x(k+1) = E x(k) + q$ ,  $k=0,1,2,..$ 

switch metodo
case 'JC'
    E = -D\ (L+U); % o E = -inv(D)*(L+U);
    q = D\b;
    rhoJC = max(abs(eig(E)));
    disp(['rhoJC = ',num2str(rhoJC)])
case 'GS'
    E = -(L+D)\U;
    q = (L+D)\b;
    rhoGS = max(abs(eig(E)));
    disp(['rhoGS = ',num2str(rhoGS)])
otherwise
    error('Metodo non noto')
end

% ciclo per il calcolo delle iterate
x = x0(:);
x(:,2) = E*x0+q;
k = 2;
while( norm(x(:,k)-x(:,k-1))>=toll && k<=kmax)
    x(:,k+1) = E*x(:,k)+q;
    k = k+1;
end

```

```

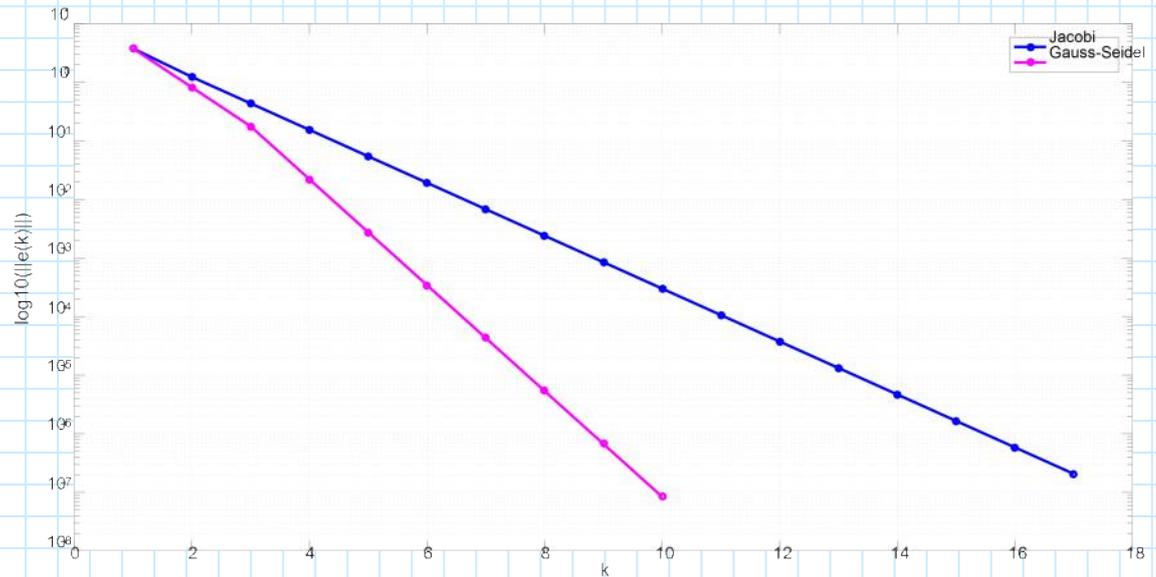
% script di prova del metodo iterativo
% per sistemi lineari

% definisco il sistema lineare
A = [4 1 0; 1 4 1; 0 1 4];
xvera = [1 2 3]';
b = A*xvera;

% parametri del metodo iterativo
x0 = [0 0 0]';
kmax = 1000;
toll = 1E-6;
xJC = iter(A,b,x0,kmax,toll,'JC');
xGS = iter(A,b,x0,kmax,toll,'GS');

% calcolo la norma degli errori per Jacobi
normErrJC = zeros(size(xJC,2),1);
for k=1:size(xJC,2)
    normErrJC(k) = norm( xJC(:,k)-xvera );
end
% calcolo la norma degli errori per Gauss-Seidel
normErrGS = zeros(size(xGS,2),1);
for k=1:size(xGS,2)
    normErrGS(k) = norm( xGS(:,k)-xvera );
end
semilogy(normErrJC,'ob-')
hold on
semilogy(normErrGS,'om-')
grid on
xlabel('k','fontSize',18)
ylabel('log10(||e(k)||)','fontSize',18)
legend('Jacobi','Gauss-Seidel')

```



Notiamo che

- (1) Jacobi è lineare per tutti i  $k$  mentre Gauss-Seidel solo da un certo punto in poi.
- (2) La pendenza di Gauss-Seidel è doppia rispetto a Jacobi: passando da  $k=8$  a  $k=10$  l'errore di Jacobi scende di una decade e quello di Gauss-Seidel di due decadi. Questo è in accordo con la teoria dato che la matrice è tridiagonale.

## METODI DIRETTI PER SISTEMI LINEARI

Sono metodi che, in ARITMETICA ESATTA risolvono il sistema lineare

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ invertibile}$$

→ posso ampliare!

con un numero FINITO di operazioni aritmetiche al termine delle quali abbiamo la soluzione esatta.

Ci sono due gruppi di metodi:

(1) METODO ELIMINAZIONE GAUSSIANA

(2) FATTORIZZAZIONE LU.

In MATLAB

(1) uso l'operatore " $\backslash$ ":

$$Ax = b \quad \text{in Matlab è risolto con } x = A \backslash b$$

Questo vale anche nel caso in cui  $b$  sia una matrice:

$$Ax = [b_1 \ b_2] \Leftrightarrow A \cdot [x_1 \ x_2] = [b_1 \ b_2]$$

$$\Leftrightarrow [Ax_1 \ Ax_2] = [b_1 \ b_2]$$

Risolve TANTI sistemi lineari con la STESSA  $A$  e  $b$  diversi!

```
>> A = [1 2; 3 4]
```

```
A =
```

```
 1  2
 3  4
```

```
>> b1 = A*[3 4]'
```

```
b1 =
```

```
 11
 25
```

```
>> b2 = A*[5 6]'
```

```
b2 =
```

```
 17
 39
```

```
>> A\[b1 b2]
```

```
ans =
```

```
 3.0000  5.0000
 4.0000  6.0000
```

```
>>
```

(2) Per la fattorizzazione LU uso la funzione

$$[L, U, P] = \text{lu}(A)$$

che è una matrice triangolare bassa  $L$ , una triangolare alta  $U$  ed una matrice di permutazione  $P$  tali che

$$LU = PA$$

N.B. :  $L$  ha sulle diagonali TUTTI 1.

Viene usato un algoritmo molto sofisticato, che nei casi scalari può essere assimilato al processo di eliminazione Gaussiana.

>> A = [2 1 3; 4 3 10; 2 4 17]

A =

2	1	3
4	3	10
2	4	17

>> [L,U,P]=lu(A)

L =

1.0000	0	0
0.5000	1.0000	0
0.5000	-0.2000	1.0000

U =

4.0000	3.0000	10.0000
0	2.5000	12.0000
0	0	0.4000

P =

0	1	0
0	0	1
1	0	0

>> L\*U

ans =

4	3	10
2	4	17
2	1	3

>>

Nota che delle fattorizzazioni LU = PA è possibile risolvere molti problemi. Sia P = Im

$$(1) |A| = |LU| \stackrel{\text{Bimet}}{=} |L| \cdot |U|$$

$$= \prod_{i=1}^m l_{ii} \cdot \prod_{i=1}^m u_{ii}$$

$$= \prod_{i=1}^m u_{ii}$$

(2) Posso risolvere MOLTI sistemi lineari del tipo

$$A \underline{x}_i = \underline{b}_i, i=1, \dots, m$$

↑  
stessa A

L'idea è questa:

(•) Trovo A = LU

(•) Scivo A  $\underline{x}_i = \underline{b}_i$  come

$$L U \underline{x}_i = \underline{b}_i, i=1, \dots, m$$

che risolve in due passi

$$(a) L \underline{z}_i = \underline{b}_i \Rightarrow \underline{z}_i$$

$$(b) U \underline{x}_i = \underline{z}_i \Rightarrow \underline{x}_i$$

per  $i=1, \dots, m$

matrici triangolari.

Il motivo di procedere in questo modo risiede nei tempi di calcolo:

(\*)  $N^2$  operazioni per risolvere un sistema **TRIANGOLARE** di ordine  $n = n^2$ .

(\*)  $N^2$  operazioni per risolvere un sistema di ordine  $n$  con GAUSS o LU  $\cong \frac{2}{3} n^3$ .

Come conseguenza, per risolvere  $A \underline{x} = \underline{b}$ ,  $i = 1, \dots, n$

→ con  $n$  applicazioni di GAUSS:  $n \cdot \frac{2}{3} n^3 \approx n \cdot n^3$

→ con LU +  $2n$  sistemi triangolari:  $\frac{2}{3} n^3 + 2n n^2 \approx n^3$   
se  $n$ ,  $n$  grandi.

(\*) Con Cramer ho bisogno di  $n!$  operazioni.

Supposto che un'operazione sia eseguita in  $\tau = 10^{-9}$  s ho  
per  $n = 20$

CRAMER

LU/GAUSS

$n = 20$  80 anni

8  $\mu$ s

$n = 1000$  —

1 s

**ESEMPIO** Risolviamo con Gauss il sistema  $A \underline{x} = \underline{b}$  con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 17 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$(A | \underline{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 4 & 17 & 31 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 14 & 20 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

È un sistema triangolare alto equivalente a quello di partenza:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1, \quad x_2 + 4x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - 4 = 2$$

$$x_1 = \frac{11 - x_2 - 3x_2}{2} = \frac{11 - 2 - 3}{2} = 3$$

ESEMPIO Trovare la fattorizzazione LU di A.

Devo trovare L e U tali che  $A = LU$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

(•) 1<sup>a</sup> RIGA di L x OGNI COLONNA  $\begin{matrix} D \\ U \end{matrix}$  = 1<sup>a</sup> RIGA DI A

$$\Rightarrow 1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \quad \Rightarrow u_{11} = 2$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = 3 \quad \Rightarrow u_{13} = 3$$

(•) 2<sup>a</sup> RIGA di L x OGNI COLONNA  $\begin{matrix} D \\ U \end{matrix}$  = 2<sup>a</sup> RIGA DI A

$$\Rightarrow l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4 \quad \Rightarrow l_{21} = \frac{4}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = 3 \quad \Rightarrow u_{22} = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = 10 \quad \Rightarrow u_{23} = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

(•) 3<sup>a</sup> RIGA di L x OGNI COLONNA  $\begin{matrix} D \\ U \end{matrix}$  = 3<sup>a</sup> RIGA DI A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow l_{31} \cdot 2 + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \quad \Rightarrow l_{31} = 1$$

$$l_{31} \cdot 1 + l_{32} \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4 \quad \Rightarrow l_{32} = 3$$

$$l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot 4 + u_{33} = 17 \quad \Rightarrow u_{33} = 2$$

Quindi ho  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

OSS. La fattorizzazione LU è equivalente a Gauss e le matrici L ed U possono essere ottenute dal procedimento di eliminazione Gaussiana.

OSS. Non tutte le matrici hanno la fattorizzazione LU.  
Un esempio è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Provare scrivere

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

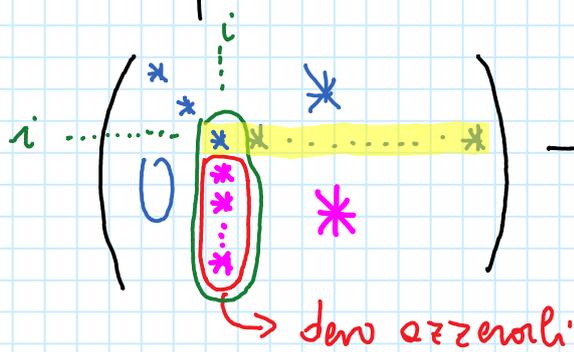
## STABILITÀ DEL METODO DI ELIMINAZIONE GAUSSIANA

Le procedure di Gauss lavora in  $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ ?

Si dimostra che è INSTABILE!

È possibile migliorare la stabilità con la strategia del pivoting parziale (c'è anche il totale ma costa di più).

Consiste in questo:



(•) cerco tra gli elementi  
cerchiati di vedere quello  
di massimo modulo e  
lo porto in posizione (i,i)  
scambiando la riga i-esima  
con quella che lo contiene

(•) azzerò gli elementi  
rossi della nuova  
matrice.

Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

>> H = hilb(20);
>> xvera = rand(20,1);
>> b = H*xvera;
>> xmat = H\b;
Warning: Matrix is close to singular or
badly scaled. Results may be inaccurate.
RCOND = 5.231543e-20.
>> [xvera xmat]

```

matrice di Hilbert :

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

ans =

```

0.8147 0.8147
0.9058 0.9057
0.1270 0.1298
0.9134 0.8629
0.6324 1.1135
0.0975 -2.6124
0.2785 9.7788
0.5469 -20.5752
0.9575 30.9886
0.9649 -29.3677
0.1576 35.3936
0.9706 -55.6066
0.9572 70.8660
0.4854 -51.2061
0.8003 24.6190
0.1419 -5.5233
0.4218 -11.2005
0.9157 22.6033
0.7922 -13.4405
0.9595 4.2970

```

Le operazioni di macchina sono  
tali da distinguere la soluzione.

>>

## CONDIZIONAMENTO DEI SISTEMI LINEARI

Considero il sistema lineare

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

con  $A$  non singolare.

Vediamo come cambia la soluzione per piccole variazioni di  $\underline{b}$  (potrei fare di  $A$  e  $\underline{b}$ ). Sia

$$A(\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underline{b} + \delta \underline{b}$$

il sistema in cui ho perturbato il termine noto. Voglio leggere  $\|\delta \underline{x}\| / \|\underline{x}\|$  e  $\|\delta \underline{b}\| / \|\underline{b}\|$  dove  $\|\cdot\|$  è una norma scelta.

De

$$A(x + \delta x) = \underline{b} + \delta \underline{b}$$

h<sub>0</sub>

$$\cancel{Ax} + A \delta x = \cancel{b} + \delta \underline{b} \quad \text{perché } Ax = b$$

$$\delta x = A^{-1} \cdot \delta \underline{b}$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1} \cdot \delta \underline{b}\| \stackrel{\text{norme compatibile}}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta \underline{b}\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|/\|A\|} \stackrel{(*)}{=}$$

$$\begin{aligned} \text{So che } Ax = \underline{b} &\Rightarrow \|\underline{b}\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|\underline{b}\| \geq \frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|} \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K(A)} \cdot \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$\Rightarrow$  Se  $K(A)$  è grande, anche piccole variazioni  $\|\delta \underline{b}\|/\|\underline{b}\|$  possono causare grandi variazioni  $\|\delta x\|/\|x\|$ . Il problema è MAL CONDIZIONATO!

Applichiamo quanto visto per giustificare uno dei criteri di arresto dei metodi iterativi:

dato  $\epsilon > 0$  piccolo, il metodo iterativo si arresta quando

$$\frac{\|r^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|} < \epsilon$$

$$\text{con } r^{(n)} = b - Ax^{(n)}.$$

Interpreto l'ultima equazione:

$$A \underline{x}^{(n)} = \underline{b} - \underline{r}^{(n)}$$

da cui posso vedere  $\underline{x}^{(n)}$  come la soluzione esatta del sistema lineare in cui ho perturbato il termine noto di  $\delta \underline{b} = -\underline{r}^{(n)}$ . Ne segue

$$\frac{\|\delta \underline{x}^{(n)}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\underline{e}^{(n)}\|}{\|\underline{x}\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\underline{r}^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$$\leq K(A) \cdot \epsilon$$

Ne segue che anche  $\epsilon$  è piccolo,  $K(A) \cdot \epsilon$  può essere grande se  $K(A)$  è grande! Il criterio NON garantisce un piccolo errore relativo  $\|\underline{e}^{(n)}\|/\|\underline{x}\|$  quando il sistema lineare è MAL CONDIZIONATO!

## ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Dire se Jacobi converge o meno.

Sì perché è diag. dominante in senso stretto perché

$$|4| > |2| + |0|$$

$$|5| > |2| + |2|$$

$$|4| > |0| + |2|$$

(b) Scrivere le equazioni di aggiornamento per Jacobi e Gauss-Seidel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 9 \\ 2y + 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

JAC

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = \frac{6 - 2y^{(n)}}{4} \\ y^{(n+1)} = \frac{9 - 2x^{(n)} - 2z^{(n)}}{5} \\ z^{(n+1)} = \frac{6 - 2y^{(n)}}{4} \end{cases}$$

GAUSS-SEIDEL

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = \frac{6 - 2y^{(n)}}{4} \\ y^{(n+1)} = \frac{9 - 2x^{(n+1)} - 2z^{(n)}}{5} \\ z^{(n+1)} = \frac{6 - 2y^{(n+1)}}{4} \end{cases}$$

(c) Calcolare le prime iterazioni per ambo i metodi partendo da

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$$

JAC

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{6 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{3}{2} \\ y^{(1)} = \frac{9 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{5} = \frac{9}{5} \\ z^{(1)} = \frac{6 - 2 \cdot 0}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

G.S.

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{3}{2} \\ y^{(1)} = \frac{9 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 0}{5} = \frac{6}{5} \\ z^{(1)} = \frac{6 - 2 \cdot \frac{6}{5}}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} \end{cases}$$

(d) Norme  $\infty$  del residuo  $\underline{r}^{(1)}$  di Jacobi:

$$\underline{r}^{(1)} = \underline{b} - A \underline{x}_{\text{JAC}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/5 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 + \frac{18}{5} \\ 3 + 9 + 3 \\ \frac{18}{5} + 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{6} \\ \cancel{9} \\ \cancel{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cancel{6} + \frac{18}{5} \\ 3 + \cancel{9} + 3 \\ \frac{18}{5} + \cancel{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ 6 \\ -\frac{18}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\|z^{(1)}\|_{\infty} = \max\left(\left|-\frac{18}{5}\right|, |6|, \left|-\frac{18}{5}\right|\right) = 6.$$

(e) Matrici di iterazione di Jacobi e Gauss-Seidel e loro raggi spettrali

$$E_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -2/5 & 0 & -2/5 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$



$$P_{E_{GS}}(\lambda) = -\lambda^2\left(\lambda - \frac{2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \rho(E_{GS}) = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \rho(E_J) = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

(f) Numero di iterazioni di Gauss-Seidel per avere

$$\frac{\|e^{(n)}\|}{\|e^{(0)}\|} < 10^{-6}$$

[si trova  $k \approx 16$ ].