Probabilità I

Calcolo delle probabilità

- Nozioni di eventi.
- Definizioni di probabilità
- Calcolo di probabilità notevoli
- Probabilità condizionate

Concetto di probabilità

- Cos'è una probabilità?

  Idea di massima: misura di quanto un evento potenzialmente incerto si possa verificare

- Perché abbia senso debbo:
  - Definire con chiarezza cosa sia un evento
  - Scegliere una misura

Definizioni di base: evento

- Esperimento o prova: Accadimento dall'esito incerto e non noto a priori.
- Spazio degli eventi U: Insieme di tutti gli esiti possibili.
- Evento E: Un insieme dei possibili esiti dell'esperimento.
- Evento elementare: Evento a cardinalità uno (esito).

- *Esempio*
  - *Esperimento: lancio di un dado a sei facce.*
  - *Evento: esca un numero pari.*
  - *Spazio degli eventi:* $U = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$.
  - $E = \{2\ 4\ 6\}$.

Evento: considerazioni

Per la definizione data si ha che lo stesso esperimento può produrre spazi degli eventi molto diversi

- *Esempio*
  - *Esperimento:* Estrazione di una carta da bridge.
  - *Evento:* Si estragga una carta con un seme rosso.
  - *Spazio degli eventi:* $U= \{Cuori\ \ Quadri\ \ Fiori\ \ Picche\}$.
  - $E = \{Cuori\ \ Quadri\}$
- *Esempio*
  - *Esperimento:* Estrazione di una carta da bridge.
  - *Evento:* Si estragga una figura.
  - *Spazio degli eventi:* $U=\{A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ F\ D\ R\}$.
  - $E = \{F, D, R\}$.

Probabilità:definizione frequentistica.

- Definizione: La probabilità di un evento E è data dalla frequenza relativa delle osservazioni di E a fronte di un numero di esperimenti tendente all'infinito.

$$P(E)=\lim_{N\to\infty} f_E$$

- *Esempio*
  - *Esperimento:* Estrazione di una carta da bridge.
  - *Evento:* Si estragga una figura.

m_i	n_i	f_i
E	3	***P(E)*** = 30%
altro	7	70%
	10	100%

m_i	n_i	f_i
E	22	***P(E)*** = 22%
altro	78	78%
	100	100%

m_i	n_i	f_i
E	231	***P(E)*** = 23.1%
altro	769	76.9%
	1000	100%

Definizione frequentistica: considerazioni.

- Definizione: La probabilità di un evento E è data dalla frequenza relativa delle osservazioni di E a fronte di un numero di esperimenti tendente all'infinito.

Svantaggi

- Debbo riuscire a rifare l'esperimento identico tante volte
- Il numero di esperimenti è altissimo (idealmente infinito) prima che la probabilità si assessti.

Sogno

- Avere una definizione indipendente dalla realizzazione dell'esperimento

Realtà

- In molti casi non posso far di meglio (esperimenti complessi)

Probabilità:definizione classica (Laplace).

- Definizione: La probabilità di un evento E è data dal numero di esiti favorevoli (al verificarsi di E) e quello dei casi possibili giudicati egualmente possibili.

$$P(E)=\frac{\|E\|}{\|U\|}$$

- *Esempio*
  - *Esperimento:* Estrazione di una carta da bridge.
  - *Evento:* Si estragga una figura.
  - *Spazio degli eventi:* $U=\{A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ D\ R\}$.
  - $E = \{J \ \ D \ \ R\}$.

$$P(E)=\frac{\|E\|}{\|U\|}=\frac{3}{13}=0{,}2308$$

Definizione classica: considerazioni.

- Definizione: La probabilità di un evento E è data dal numero di esiti favorevoli (al verificarsi di E) e quello dei casi possibili giudicati egualmente possibili.

Condizione limitante!

- *Esempio*
  - *Esperimento:* Estrazione super enalotto.
  - *Evento: Vincere.*
  - *Spazio degli eventi:* $U=\{0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 5{+}1 \ \ 6\}$.
  - $E = \{3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 5{+}1 \ \ 6\}$.

$$P(E)=\frac{\|E\|}{\|U\|}=\frac{5}{8}=0{,}625$$

- Gli eventi elementari non sono equiprobabili => $P(E)$ insensata

Definizione classica: errori di modello

Esperimento: Lancio due dadi a 4 facce

Evento: Somma pari a 4

- Esempio errato: (evento elementare: somma dei 2 dadi)
  - *U= {2 3 4 5 6 7 8}.*
  - *E = {4}.* $P(E)=\frac{\|E\|}{\|U\|}=\frac{1}{7}$

Esempio corretto: (evento elementare: esito dei 2 dadi)

- *U = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4)}.*
- *E = {(1,3) (2,2) (3,1) }.*

$$P(E)=\frac{\|E\|}{\|U\|}=\frac{3}{16}$$

Probabilità: definizione assiomatica.

- Idea: associo ad ogni evento elementare una probabilità e poi con delle regole di costruzione calcolo le probabilità di eventi più complessi.

- Ho bisogno
  - Catalogare gli eventi più complessi.
  - Trovare le regole
  - Fissare le probabilità di alcuni eventi mediante:

Defnzione frequentistica	Assiomi
Conoscenze innate	Approccio classico
…	

Evento certo ed impossibile

- *Evento certo.* Evento che si verifica sicuramente. $E \equiv U$
  - Esempio
    - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
    - Evento: Totalizzare meno di 7.
  - Probabilità classica: $P(U) = 1$.

- *Evento impossibile.* Evento che non si può verificare $E = \varnothing$.
  - Esempio
    - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
    - Evento: Totalizzare più di 7.
  - Probabilità classica: $P(\varnothing) = 0$.

Eventi incompatibili

- Definizione: due eventi A e B si dicono incompatibili se non possono verificarsi contemporaneamente. $A \cap B = \varnothing$
  - Esempio
    - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
    - Evento A: rilevare un # pari.
    - Evento B: rilevare un 5.
    - A e B sono incompatibili.
  - Esempio
    - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
    - Evento A: rilevare un # pari. $A = \{2\ 4\ 6\}$
    - Evento B: rilevare un # primo. $B = \{1\ 2\ 3\ 5\}$
    - A e B NON sono incompatibili. $A \cap B = \{2\}$.

- *Osservazione*:gli eventi elementari fra loro sono incompatibili

Evento complementare.

- *Evento complementare di un evento.* Dato un evento E il suo complementare [indicato con $\overline{E}$] è dato dall'insieme di tutti gli eventi elementari non compresi in E.
  - Esempio
    - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
    - Evento: Totalizzare meno di 3.
    - Evento complementare: totalizzare 3 o più.
  - Probabilità classica:

$$P(\overline{E})=\frac{\|\overline{E}\|}{\|U\|}=\frac{\|U-E\|}{\|U\|}=\frac{\|U\|-\|E\|}{\|U\|}=\frac{\|U\|}{\|U\|}-\frac{\|E\|}{\|U\|}=1-P(E)$$

Evento intersezione

Definizione: Dati due eventi A e B l'evento intersezione $A \cap B$ è l'evento che si verifica quando <u>entrambi</u> gli eventi si verificano.

- Esempio
  - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
  - A: estrarre un # pari $A=\{2\ 4\ 6\}$.
  - B: estrarre un # primo $B=\{1\ 2\ 3\ 5\}$.
  - $A \cap B$: estrarre un # primo <u>e</u> pari. $A \cap B=\{2\}$.

Osservazione: l'evento intersezione di due eventi incompatibili è sempre l'evento impossibile.

- Esempio
  - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
  - A: estrarre un # pari $A=\{2\ 4\ 6\}$.
  - B: estrarre un 3 $B=\{3\}$.
  - Evento intersezione: impossibile!

Evento unione

Definizione: Dati due eventi A e B definisco l'evento unione quando almeno uno dei due si verifica. $E=A \cup B$.

- Esempio
  - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
  - Evento A: estrarre un # perfetto $A=\{1\ 6\}$.
  - Evento B: estrarre un # primo $B=\{1\ 2\ 3\ 5\}$.
  - Evento unione: estrarre un # primo o perfetto.

    $E=A \cup B=\{1\,2\,3\,5\,6\}$.
- Probabilità classica:

$$P(A \cup B)=\frac{\|A \cup B\|}{\|U\|}=\frac{\|A\|+\|B\|-\|A \cap B\|}{\|U\|}$$

$$P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

  - Se gli eventi sono incompatibili $P(E) = P(A) + P(B)$.

Definizione assiomatica di Probabilità.

Definizione: Dato uno spazio degli eventi U, la probabilità è una <u>funzione</u> $P(.)$ che associa ad ogni possibile evento E un numero reale $P(E)$, rispettando i seguenti assiomi

- Assiomi
  - $P(E) >= 0$.
  - $P(U) = 1$.
  - Se A e B sono incompatibili $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.
- Si ricavano le seguenti proprietà:
  - $P(\emptyset)=0$.
  - $0 \leq P(E) \leq 1$.
  - $P(\overline{E})=1-P(E)$.
  - $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

Definizione assiomatica: esempio

- *Esempio*
  - *Esperimento:* Estrazione super enalotto.
  - *Evento: Vincere.*
  - *Spazio degli eventi:* $U = \{0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 5{+}1 \;\; 6\}$
  - $E = \{3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 5{+}1 \;\; 6\}$.
- *Supponiamo di avere le probabilità degli eventi elementari (incompatibili)*

$$P(E) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + \\ + P(E_{5+1}) + P(E_6) = 0{,}3145\%$$

oppure

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - (P(E_0) + P(E_1) + P(E_2)) =$$

$$P(E) = 0{,}3145\%$$

E_i	n_i	$P(E_i)$
0	406.481.544	65,28621790%
1	185.232.096	29,75068157%
2	28.942.515	4,64854400%
3	1.905.680	0,30607697%
4	52.290	0,00839845%
5	498	0,00007999%
5+1	6	0,00000096%
6	1	0,00000016%
	622.614.630	100,00000000%

Definizione assiomatica: considerazioni

- Nessuna metodologia di calcolo viene fornita per l'evento elementare.
- Si forniscono solo regole di derivazione.
- Se si aggiunge l'ipotesi che tutti gli eventi sono equiprobabili si riottiene la definizione classica.

Probabilità condizionata: motivazioni.

- *Osservazione:* A volte ho delle informazioni parziali sull'esito dell'esperimento.
  - Esempio:
    - Esperimento: estrazione di uno studente del corso.
    - Evento: altezza superiore a 185 cm.
    - Informazione aggiuntiva: l'estratto è maschio
  - Esempio 2:
    - Esperimento: Lancio di un dado. *U={1 2 3 4 5 6}*
    - Evento: esca un # pari. *A ={2 4 6}*
    - Informazione aggiuntiva: l'estratto è un # primo. *B = {1 2 3 5}*

Probabilità condizionata.

- *Definizione:* Dati due eventi A e B che insistono sullo stesso spazio degli eventi U, definisco $P(A \mid B)$ [leggasi: "probabilità di A condizionata B"] come la probabilità che si verifichi A sapendo che si è già verificato B.
- Probabilità classica

$$P(A|B) = \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|}$$

- Probabilità assiomatica

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- *Osservazione*: se B non si verifica, $P(A|B)$ non ha senso.

Probabilità condizionata: calcolo.

- Esempio: lancio di un dado. $U=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$
  - A : esca un # pari. $A=\{2\ 4\ 6\}$ => $P(A) = 0.500$
  - B: l'estratto è un # primo. $B = \{1\ 2\ 3\ 5\}$ => $P(B) = 0.666$
  - $A\cap B = \{2\}$ => $P(A\cap B) = 0.166$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.166}{0.6666}=0.25<P(A)$$

- Esempio: estrazione di un biotecnologo.
  - A: altezza superiore a 185 cm. => $P(A) = 0.10$
  - B: l'estratto è uomo. => $P(B) = 0.35$
  - $A\cap B$: uomini più alti di 185 cm.=> $P(A\cap B) = 0.07$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.07}{0.35}=0.2>P(A)$$

Probabilità assiomatica:evento intersezione

- Teorema: Dati due eventi generici A e B vale

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(B|A)$$

Dim:

$$P(A)P(B|A)=P(A)\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(A\cap B)$$

$$P(B)P(A|B)=P(B)\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=P(A\cap B)$$

- Esercizio: Calcolare la probabilità che esca un # pari e primo lanciando un dado a 6 facce.
  - $P(B) = 4/6$
  - $P(A|B) = 1/4$.
  - $P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = 1/6$.

Eventi Indipendenti

- *Concetto (nella realtà)*: due eventi si dicono indipendenti se non si influenzano. Ovvero il verificarsi di uno non influenza l'altro.
- *Idea (statistica)*: due eventi sono indipendenti se il verificarsi di uno non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro.
- *Definizione (statistica)*: due eventi A e B si dicono indipendenti se

$$P(A|B)=P(A) \qquad P(B|A)=P(B)$$

- Osservazione: se voglio verificare l'indipendenza (statistica) di due eventi A e B devo controllare se le due relazioni valgono.

Eventi Indipendenti: verifica

Esperimento: di due dadi a 4 facce

- evento elementare: esito dei 2 dadi
- *Spazio degli eventi:* $U=\{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\}$
- *Evento A: fare 4 con il primo dado =>* $P(A)=\frac{4}{16}=0.25$
- *Evento B: fare 4 con il secondo dado =>* $P(B)=\frac{4}{16}=0.25$
- *Evento intersezione: fare 4 con ambo i dadi =>* $P(A\cap B)=\frac{1}{16}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/16}{1/4}=\frac{1}{4}=P(A)$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1/16}{1/4}=\frac{1}{4}=P(B)$$

L'esito di un lancio di un dado non influenza il successivo!

Probabilità assiomatica: eventi indipendenti

- Teorema: Se due eventi sono indipendenti vale

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Esercizio
  - Esperimento: lancio contemporaneamente un dado a 6 facce ed una moneta
  - Calcolare la probabilità di ottenere una testa ed un numero maggiore di 4.
- Svolgimento:
  - A: Ottenere testa lanciando una moneta => $P(A) = 1/2$.
  - B: Ottenere un # > 4 lanciando un dado => $P(B) = 1/3$.
  - Eventi indipendenti => $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/6$.
- Osservazione: la definizione assiomatica non richiede di definire U!

Ricapitolando

- Definizione frequentistica di probabilità: $P(E) = \lim_{N \to \infty} f_E$
- Definizione classica di probabilità: $P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|}$
- Definizione assiomatica di probabilità:
  - Evento certo $E = U$ $\quad P(U) = 1$
  - Evento impossibile $E = \emptyset$ $\quad P(\emptyset) = 0$
  - Evento complementare $\quad P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
  - Probabilità condizionata $\quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  - Eventi indipendenti $\quad P(A|B) = P(A)\,;\, P(B|A) = P(B)$
  - Eventi unione $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
    - Eventi incompatibili $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - Evento intersezione $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
    - Eventi indipendenti $\quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$