Elementi di algebra omologica

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
prof. M. Spera a.a. 2009/10
Lezione XXXVII

☆ Complessi differenziali

$$C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$$

spazi vettoriali

omomorfismi

$$\longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \longrightarrow$$

con $\boxed{d^2 = 0}$

☆ (C, d) complesso differenziale
d: op. differenziale del complesso

Coomologia del complesso:

$$\boxed{H(C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C)}$$

$$\boxed{H^q(C) = \frac{\ker d \cap C^q}{\operatorname{Im} d \cap C^q}}$$

$$f : A \longrightarrow B$$

complessi differenziali

f mappa di catene se

$$f\, d_A = d_B\, f$$

(commuta con i d...)

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & A^q \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, bend left=60] \arrow[dr, dashed, bend right=80] & A^{q+1} \arrow[d, "f"] \arrow[r] & {} \\
\arrow[r] & B^q \arrow[r, "d_B"'] & B^{q+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Successione esatta di spazi vettoriali e omomorfismi

V_i spazi vettoriali

$$\longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \longrightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}}$$

★ <u>Proposizione</u>

Sia data una <u>successione esatta</u> di spazi vettoriali (di dim. finita)
(e appl. lineari ..)

$$\boxed{0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots A_n \xrightarrow{f_n} 0}$$

Poniamo $a_k := \dim A_k$

Si ha

$$\boxed{\sum_{l=0}^{n} (-1)^l a_l = 0}$$

<u>Dim.</u> È una semplice applicazione del teorema "<u>nullità + rango</u>"

$T: V \to W$ $\quad \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$

Sia infatti

$$a_l = a_l^{Ker} + a_l^{Im}$$

$$a_l^{Ker} = \dim \operatorname{Ker} f_l \qquad a_l^{Im} = \dim \operatorname{Im} f_l$$

Si ha

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^l a_l = \sum_{l=1}^{n}[(-1)^l a_l^{Ker} + (-1)^l a_l^{Im}] =$$

$= $ (in virtù dell'esattezza è $a_{l-1}^{Im} = a_l^{Ker} \dots$)

$$a_1^{Ker} - a_n^{Im} = 0 - 0 = 0$$

$\square$

Più in generale, dato un complesso A
A_i sp. vettoriali, f_i appl. lineari

$$\boxed{0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} 0}$$

$$\boxed{f_i \circ f_{i-1} = 0} \qquad i = 1, 2, \dots n$$

detto

$$\boxed{H_i(A) = \frac{\operatorname{Ker} f_i}{\operatorname{Im} f_{i-1}}}$$

i-esimo gruppo di coomologia

$h_i := \dim H_i$

(da $\operatorname{Im} f_{i-1} \subset \operatorname{Ker} f_i$

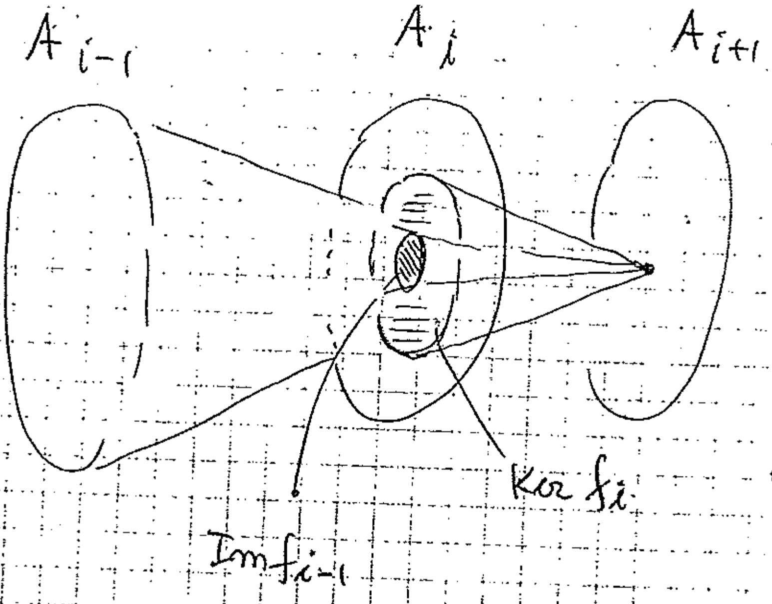
misura l'ostruzione all'esattezza in A_i

Si ha

$$\boxed{\sum_{l=0}^{n} (-1)^l a_l = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l h_l} \equiv \boxed{\chi(A)}$$

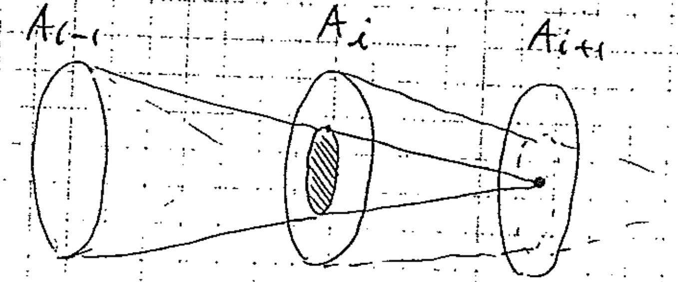
(Cfr. $V - E + F = 2 \ldots$)

caratteristica di Eulero Poincaré di A

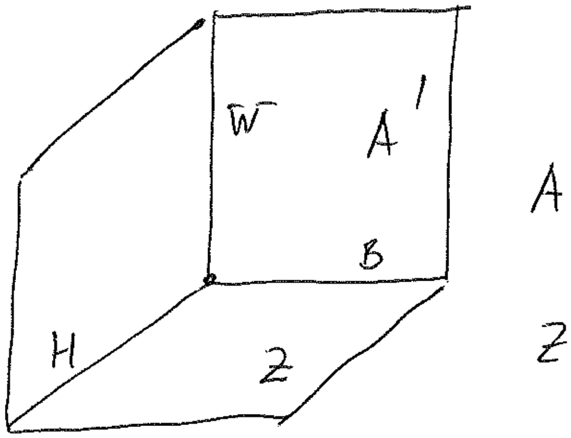


$H_i = \mathrm{Ker}\, f_i / \mathrm{Im}\, f_{i-1}$

Successione esatta $\longrightarrow$



Dimostrazione:



complemento diretto di B in Z

$$Z = B \oplus H \qquad \underset{h}{\dim H} = \dim Z/B$$

$$A_k = Z_k \oplus \underset{\text{compl. diretto di } Z \text{ in } A}{\bar W_k} = H_k \oplus \underbrace{(B_k \oplus \bar W_k)}_{A'_k}$$

$$\underset{\dim A_k}{a_k} = \underset{\dim A'_k}{a'_k} + h_k$$

Si osservi che
$$f_k(A'_k) = B_{k+1} \le A'_{k+1}$$
$$f_k(\underset{Z_k}{\underset{\cap}{H_k}}) = \{0\} \quad (\le H_{k+1})$$

Posto $f'_k \equiv f_k \big|_{A'_k}$ si ha un sottocomplesso (subcomplex) del precedente, che risulta esatto:

$$f: \begin{array}{c} f'_k \\ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\mathrm{Im}\, f'_k = B_{k+1} = \mathrm{Ker}\, f'_{k+1} \quad ☆☆$$

pertanto
$$\chi(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (a'_k + h_k)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a'_k}_{= 0 \text{ (lemma precedente)}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h_k$$

Successione esatta corta → complessi differenziali

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

ovvero:
f è iniettiva
g è suriettiva
e
$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g}$

Teorema

Siano $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$

A, B, C complessi differenziali

f, g mappe di catene

Allora esiste una successione esatta lunga (di gruppi) di coomologia

$$\cdots \to H^q(A) \xrightarrow{f^*} H^q(B) \xrightarrow{g^*} H^q(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(A) \to H^{q+1}(B) \to H^{q+1}(C) \xrightarrow{d^*} H^{q+2}(A) \to \cdots$$

indotte da f e g

$*$ omomorfismo di connessione (o di cobordo)
in altri contesti: Bockstein

Dim.

d^* è così definito ("diagram chase")

"inseguimento sul diagramma"

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & da & & & \\
 & \arrow[u] & \arrow[u] & \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & A^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "f"] & B^{q+1} \arrow[u] \arrow[r, "g"] & C^{q+1} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "f"] & B^{q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "g"] & C^{q} \arrow[u, "d"] \arrow[r] & 0 \\
 & \arrow[u] & \arrow[u] & \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

sia $c \in C^q$ $\qquad dc = 0$

$$\boxed{d^*[c] = [a]}$$ ottenuta così:

$c = g(b)$ (g è suriettiva)

ora $g(db) = d\,g(b) = dc = 0$

$\Rightarrow$ $db = f(a)$, $a \in A^{q+1}$ (a è unico poiché f è iniettiva)

Inoltre $0 = d^2 b = d f(a) = f(da)$

$\Rightarrow$ $da = 0$

verifichiamo che d^* è ben definita:

1) $[c_1]=[c]$

$$c_1 = c + d\gamma \Rightarrow [a_1]=[a]$$

$(a_1 = a + d\eta)$

$$g(b_1) = g(b) + d\gamma$$

sia ξ : $g(\xi)=\gamma$

$$g(b_1) = g(b) + d\,g(\xi) = g(b) + g(d\xi) = g(b+d\xi)$$

$$\Rightarrow b_1 = b + d\xi + \underbrace{f(\eta)}_{\in \ker g}$$

$$\Rightarrow db_1 = db + 0 + df(\eta) = db + f\,d\eta$$

$$\Rightarrow f(a_1) = f(a) + f\,d\eta = f(a+d\eta)$$

(f è iniettiva)

$$\Rightarrow a_1 = a + d\eta$$

cioè $[a_1]=[a]$!

(2) Verifichiamo l'indip. da b

Sia b_1 tale che $g(b_1) = c$
$(g(b)) = c$

allora $g(b_1 - b) = 0$

$= b_1 - b = f(\alpha)$

$\Rightarrow db_1 - db = df(\alpha) = f\, d\alpha$

$$\begin{array}{c} \| \\ f(a_1) - f(a) = f\, d\alpha \end{array}$$

$f(a_1 - a) = f^{d\alpha}$

$\Downarrow$

$a_1 = a + d\alpha$

$\Rightarrow [a_1] = [a]$

si scrive:

$$\boxed{d^*[c] = \left[(f^{-1} \circ d \circ g^{-1})[c]\right]}$$

d^* è anche un omomorfismo (ovvio)

☆ Bisogna dimostrare l'esattezza

intanto $\boxed{g^* f^* = (g \circ f)^* = 0^* = 0}$

$$\boxed{d^* g^* = 0}$$

$$a \leftarrow db = 0 \quad \text{(per ipotesi!)}$$

$$
\begin{array}{ccc}
db = 0 & & \\
\uparrow d & & \\
b & \dashrightarrow & g(b)
\end{array}
$$

$$\boxed{f^* d^* = 0}$$

$= d(\ ) = 0$ in coomologia

$$
\begin{array}{ccc}
a \leftarrow & db & \\
& | & \\
b & \text{—} & c
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{☆ in generale: } \operatorname{Im} \subseteq \operatorname{Ker}}$

① Esattezza in $H^*(B)$

$$g_*[b] = 0 \qquad g(b) = dc$$

Sia b' t.c. $g(b') = c$

allora $g(b - db') = g(b) - g(db') =$

$= dc - g(db') = dc - d\,g(b')$

$= dc - dc = 0$

$\Rightarrow$ * si può scegliere $\boxed{b \text{ t.c. } g(b) = 0}$

$\Rightarrow$ (esattezza) $b = f(a)$, con : $da = 0$

$(db = f\,da = 0$
$\Rightarrow da = 0)$

$\Rightarrow \quad [b] = f^*[a]$

② Esattezza in $H^*(A)$

$f^*[a] = 0$

$f(a) = db$

Sia $c := g(b)$

$dc = d\,g(b) = g\,db = g f(a) = 0$

$\Rightarrow$ è definita $[c]$

È chiaro che $d^*[c] = [a]$!

③ Esattezza in $H^*(C)$

; $d^*[c] = 0 \longrightarrow \boxed{a = d\xi}$

$c = g(b) \quad db = f(a)$

$d\,f(\xi) = f(d\xi) = f(a) = db$

$\Rightarrow d(b - f(\xi)) = 0 \quad ; g(b - f(\xi)) = c$

$\Rightarrow \quad \boxed{[c] = g^*[b - f(\xi)]} \quad \square$