TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE prof. M. Spera

a.a. 2009/10

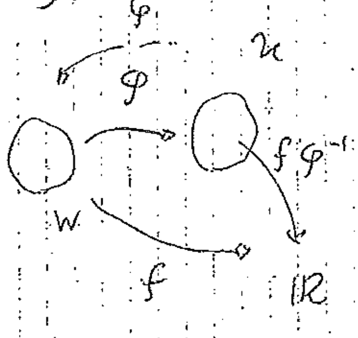
Lezione

XVII

★ Funzioni di classe C^s su una varietà diff. di classe C^k

$\mathscr{C}^s(M)$ $\qquad s \le k$

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^s(M)$



se $\forall$ carta φ risulta:

$$\boxed{f \circ \varphi^{-1}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathcal{U} = \varphi(W)$$

di classe C^s

Nell'intersezione $D(\varphi) \cap D(\psi)$ (φ, ψ carte) si può usare sia φ che ψ; ma $\psi \circ \varphi^{-1}$ (e $\varphi^{-1} \circ \psi$) sono di classe C^k

$k \ge s$, e dunque tale nozione è intrinseca ★

$$(f \circ \varphi^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1})(\psi \circ \varphi^{-1}))$$

★ funzioni coordinate (o coordinate locali)

$$r_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(è una forma lineare..)}$$

proiezione $r_j(a) \equiv r_j((a_1, a_2 .. a_n)) := a_j$

segue a pag XVII-3

* Vettori tangenti come derivazioni

Lemma Sia $f : \mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{R}$ liscia.
(su un cono aperto)

Allora $f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} x^j h_j(x)$, $h_j \in \mathcal{C}^\infty$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Notare che} \quad (+) \\ h_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(\xi)\cdot 1 \\ (\text{Teor. val. medio}) \\ \Rightarrow h_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) \end{array}}$

Dim: $f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 x^j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt$

$= \sum_{j=1}^{n} x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\, dt}_{h_j(x)}$ $\qquad h_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$ (+)

Sia $v : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una **derivazione** in 0
$\boxed{v \text{ è lineare e } v(fg) = v(f)g(0) + f(0)v(g) \quad [\text{Leibniz}]}$

allora è $v = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ per un unico vettore $(a_1, \dots a_n)$

($\Rightarrow$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ è una base di $T_0\mathbb{R}^n$ (se definiamo quest'ultimo come sp. delle derivazioni in 0))

$v(f) = v\left(f(0) + \sum_j x^j h_j(x)\right) =$

$\underbrace{v(f(0))}_{=0} + \sum_j v(x^j h_j) \underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_j \underset{\substack{\parallel \\ a_i}}{v(x^j)}\, \underset{\substack{\parallel \\ \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)}}{h_j(0)} + \sum_j 0 \cdot v(h_j)$

segue da $v(1) = v(1\cdot 1) = 2\cdot v(1) \Rightarrow v(1) = 0$

$\Rightarrow v(f) = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ $\qquad v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$

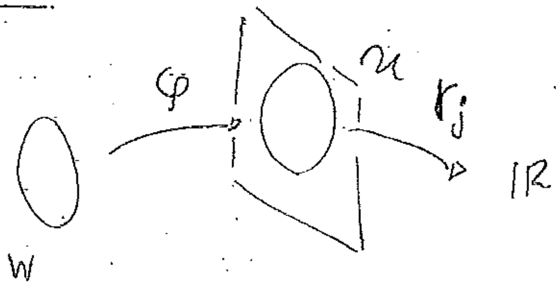
$\boxed{\text{Il tutto vale su una varietà}}$
v. oltre

Segue da XVII-1

$$x_j \;:\; \overset{M}{\overset{\cup}{W}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

coordinate locali

☆ $$\boxed{x_j := r_j \circ \varphi}$$

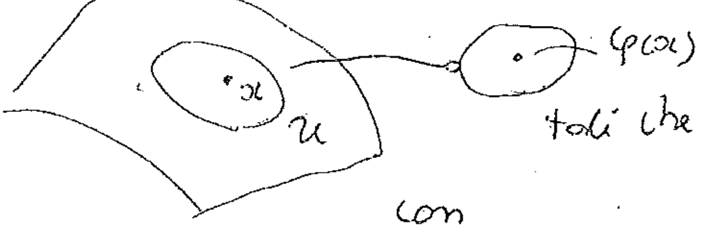


si torni a pag XVII-2

☆ vettori tangenti in $x \in M$

(costituiscono lo spazio tangente $T_x M$)
di dimensione n)

$$\boxed{v \;:\; \underbrace{\mathcal{C}^\infty(M, x, \mathbb{R})}_{\substack{\text{funzioni lisce} \\ \text{in un intorno aperto} \\ \mathcal{U} = D(v) \text{ di } x}} \longrightarrow \mathbb{R}}$$



tali che $\exists\, (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$

con

$$\boxed{v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial r_i} (f \circ \varphi^{-1}) \Big|_{\varphi(x)}}$$

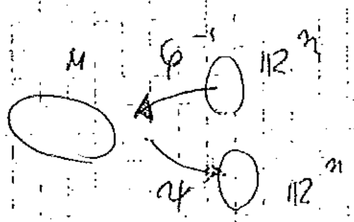
Tale concetto non dipende dalla carta :

$$\boxed{v(f)} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)} =$$

$$= \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\left(f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)}$$

$$(\text{''}\ J^T)$$

$$= \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\Big|_{\psi(x)} \cdot J_{ji}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)}$$



$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j}\left(f\circ\psi^{-1}\right)\Big|_{\psi(x)} \underbrace{\left(\sum_i a_i J_{ji}\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\right)}_{b_j}$$

→ (stessa forma in un'altra carta ...)

$v = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ è dato da

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f) := \frac{\partial}{\partial r_j}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\Big|_{\varphi(x)}$$

in breve, si scrive

$$\boxed{v(f) = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

omettendo φ

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto (0, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, 0)$$

Se $\varphi \rightsquigarrow (x_1 \dots x_n) = x$

$\psi \rightsquigarrow (y_1 \dots y_n) = y \qquad y = y(x)$

è

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i)}_{\text{ho } J^t} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

o semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} = J^t \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} = \underset{\displaystyle (J^{-1})^t}{\underset{\shortparallel}{(J^t)^{-1}}} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$x \to y$

* Si ricordi che se le <u>componenti</u> dei vettori si trasformano per mezzo di $A \in GL(n, \mathbb{R})$, <u>le basi</u> si trasformano tramite $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

** "i <u>vettori tangenti</u> sono <u>controvarianti</u>"

★ Proprietà cruciale

Lo spazio tangente $T_x M$ può essere identificato con quello delle derivazioni ★ (†) ovvero delle funzioni v come sopra tali che

* linearità 1) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$

* regola di Leibniz 2) $v(f g) = v(f) g(x) + f(x) v(g)$

prodotto puntuale

$(v(fg) = v(f) g + f v(g))$

ovvero:
Si può partire da 1) e 2) e ritrovare le formule precedenti (Willmore)

vedi pag XVII-2

(†) dell'algebra $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.

★ valutate in x

★ Derivazioni di un'algebra A

$D : A \to A$ tali che

1) D sia lineare
2) $D(ab) = D(a) b + a D(b)$

☆ Un altro approccio allo spazio tangente (cenno) utilissimo nelle applicazioni (lo abbiamo già usato ...)

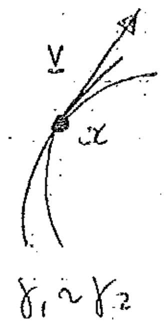
in $\mathbb{R}^n$ due curve passanti per un pto x fissato si dicono tangenti in x se hanno lo stesso vettore velocità. Ciò induce una relazione di equivalenza.

Tale nozione è invariante per diffeomorfismi (di $\mathbb{R}^n$)

$$y(t) = y(x(t))$$

$$\dot{y}(t) = J \cdot \dot{x}(t)$$

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)$$



Lo spazio tangente è lo spazio dei vettori velocità (in x) (una classe $[\gamma]$ ..)
curva

In una varietà M, due curve sono dette tangenti in un punto x se lo sono per una carta (contenente x). Ciò non dipende dalla carta ..

□

v. anche i complementi alla fine della lezione

Nozione di diffeomorfismo

siano (X_i, Φ_i) $i=1,2$ varietà diff. di classe C^k

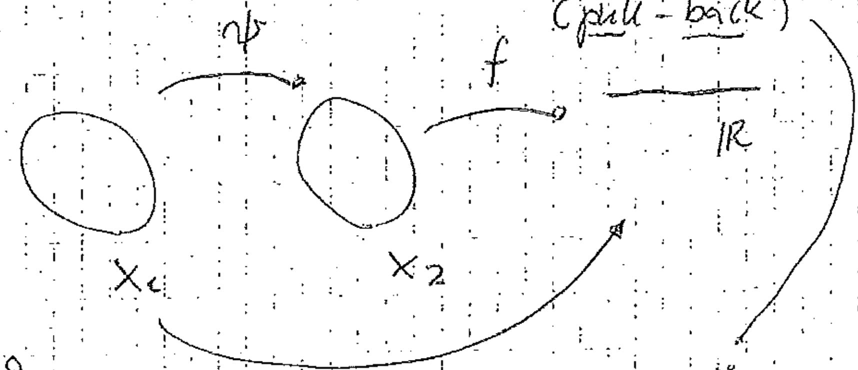
atlante

un'applicazione

$\boxed{\psi : X_1 \to X_2}$ è detta di classe C^s, $s \leq k$

se $f \in C^s(X_2, \mathbb{R}) \Rightarrow f \circ \psi \in C^s(X_1, \mathbb{R})$

(pull-back)



"smooth is who smooth does"

[A. Stacey (ispirato a F. Gump)]

$$f \circ \psi \equiv \psi^* f$$

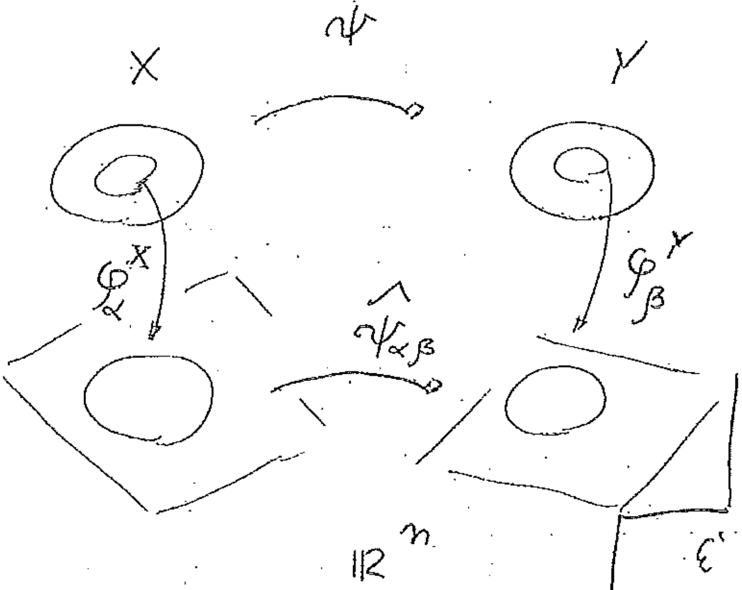
"conoscendo le funzioni su X conosco X"

ψ diffeomorfismo (di classe C^k)

- ψ biunivoca, di classe C^k
- ψ^{-1} di classe C^k

(ci muoveremo, al solito, in ambito C^∞)

È chiaro che localmente, ψ induce un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ (applicando la def. alle f. coordinate



$$\hat{\psi}_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^Y \circ \psi \circ \left(\varphi_\alpha^X\right)^{-1}$$

È poi chiaro che $f : Y \to \mathbb{R}$ liscia $\Rightarrow$ $\psi^* f = f \circ \psi : X \to \mathbb{R}$ liscia

Siano X, Y lisce (omettiamo l'indicazione degli atlanti)

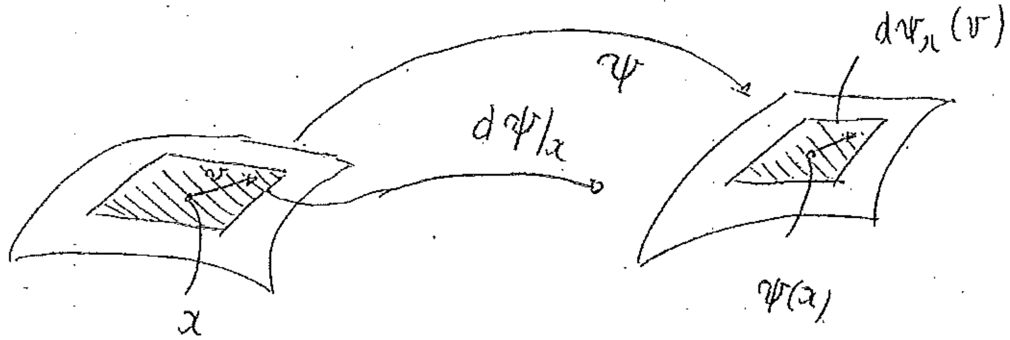
☆ Sia $\psi : X \to Y$ liscia

$x \in X$

$$\boxed{d\psi|_x : T_x X \longrightarrow T_{\psi(x)} Y}$$

$$v \longmapsto d\psi_x(v)$$

differenziale di ψ in x



definito come segue

$$\boxed{d\psi|_x \underset{\substack{\text{vettore}\\ \text{tangente}\\ \text{in } x}}{\overset{\substack{T_x X\\ \cup}}{(v)}} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{C}^\infty(Y, \psi(x), \mathbb{R})}}{(g)}} := v \overset{\substack{\psi^* g\\ \parallel}}{(g \circ \psi)}$$

Si ha:

$$\boxed{\dots = \sum_{j=1}^{m} \Big[v(\underbrace{y_j \circ \psi}_{\text{coord. locali}}) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big] (g)}$$

$$d\psi|_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (y_j \circ \psi) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

"push - forward"

"stenograficamente"

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \longmapsto \underset{\substack{\uparrow\\ \text{matrice Jacobiana}}}{J} \frac{\partial}{\partial y}$$

★ Dettagli:

φ: sistema di coordinate intorno ad x
coordinate $(x_1 \dots x_n)$

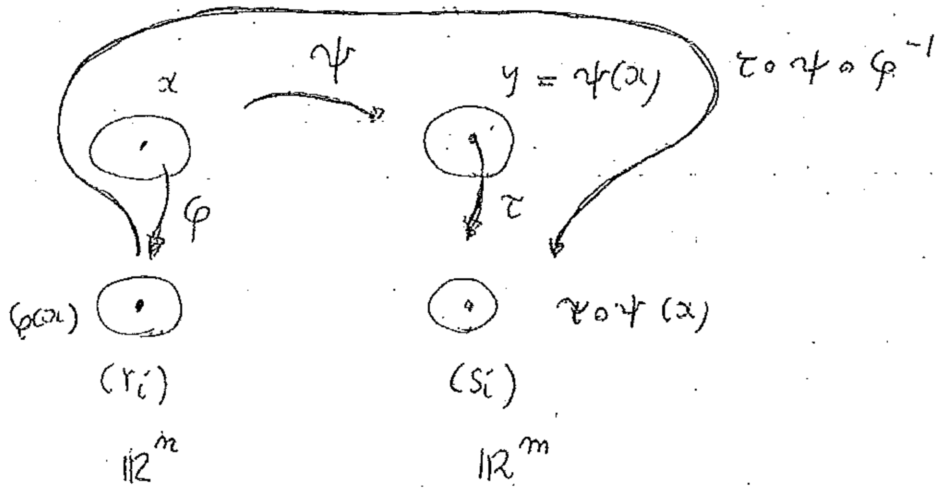
τ: $=$ intorno a $\psi(x)$
coordinate $(y_1 \dots y_m)$

$$[d\psi|_x(v)](g) = v(g \circ \psi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ \psi) =$$

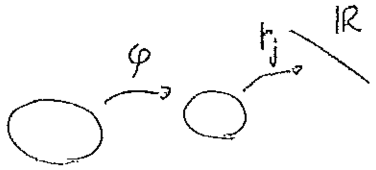
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial r_i}\big(\underbrace{g \circ \tau^{-1}} \circ \underbrace{\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}}\big)\Big|_{\varphi(x)}$$

" derivazione delle f. composte "

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial s_j}(g \circ \tau^{-1})\Big|_{\tau\circ\psi(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}(s_j \circ \tau \circ \psi \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(x)}$$



$=$



$x_j = r_j \circ \varphi$

funzioni coordinate

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial y_j}(g) \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ \psi)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} v(y_j \circ \psi) \frac{\partial}{\partial y_j} \right](g)$$

è effettivamente un vettore tangente!

$$d\psi|_x : TX_x \to TY_{\psi(x)}$$

$$d\psi|_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ \psi)}_{(d\psi|_x)_{ij}} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

" $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dx} \dots$ "

★ Se $X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\Phi} Z$

è $\boxed{d(\Phi \circ \psi) = d\Phi \circ d\psi}$, comp. di omomorfismi ~ prodotto di matrici

Infatti: $[d(\Phi \circ \psi)(v)](h) = v(h \circ (\Phi \circ \psi)) =$

$= v((h \circ \Phi) \circ \psi) = d\psi(v)(h \circ \Phi) =$

$= d\Phi(d\psi(v))(h) = [(d\Phi \circ d\psi)(v)](h)$ □

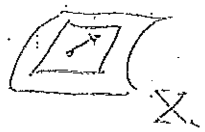
Fibrato tangente e cotangente

X varietà diff (liscia)

unione disgiunta

$$TX = \coprod_{x \in X} T_x X$$

← sp. tangente a X



fibrato tangente

$$T^*X = \coprod_{x \in X} T_x^* X$$

← sp. cotangente $=$ duale di $T_x X$

fibrato cotangente

TX e T^*X possiedono una naturale struttura di varietà (liscia)

Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlante di X

$$TX = \bigcup_{\alpha} \pi^{-1}(U_\alpha)$$

ove

$$\pi : TX \to X \qquad \text{proiezione}$$
$$v \mapsto x$$

ove x è univ. determinato da $v \in TX$

($\Rightarrow v \in T_x X$ per un unico x)

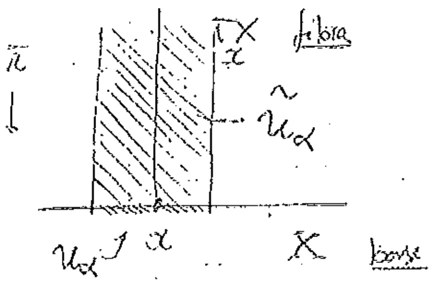
(è un unione disgiunta)

Definiamo $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ ✓ notare

$$\tilde{\varphi}_\alpha : \overbrace{\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)}^{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

TX (sp. totale)



$$\left(x, \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \mapsto \{(x_i, b_i)\}$$

v

$x_i = r_i \circ \varphi$ coord. locali

⇕

$$\boxed{\begin{array}{c}(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha) \text{ è un atlante per } TX \\ \pi : TX \to X \text{ diviene liscia!}\end{array}}$$

Analogo discorso per T^*X ...

lavoriamo ora in un intorno $\mathcal{U}$ di $p \in X$.

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\}$ base per T_pX

$\left\{ dx_i\Big|_p \right\}$ base duale di T_p^*X

ha già senso!

infatti $df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$

($f : X \to \mathbb{R}$

$df : T_x X \to T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij}$$

Ciò dà senso alla posizione

"$dx = \Delta x$"

di molti vecchi testi]

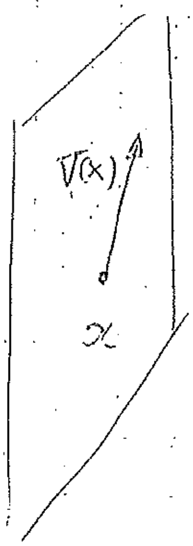
$$\left(dx_i\left(\Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \Delta x_i \right)$$

Più in generale:

★ Campo vettoriale (liscio)

($\equiv$ sezione del fibrato tangente ...)

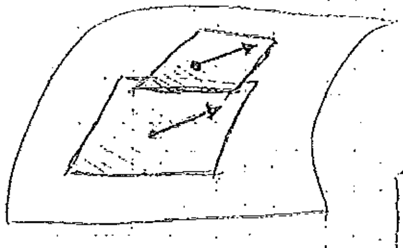
$V : X \longrightarrow TX$ t.c.

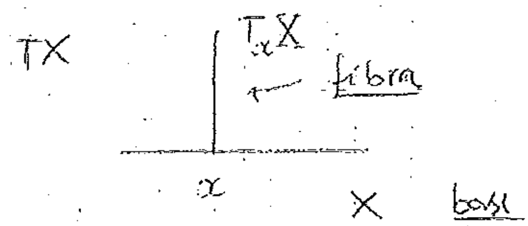


$$\pi \circ V = i_X$$

$$f \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow Vf \in \mathcal{C}^\infty$$

$$(Vf)(x) := [\underset{\substack{\cap \\ T_x X}}{V(x)}(f)](x)$$





Nota: su una varietà differenziabile esistono campi vett. globali (...(Tietze)... uso delle partizioni dell'unità lisce)

4 <u>campi</u> <u>vettoriali</u>

(variante , v. Bott-Tu)

$M = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$

$\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlante

$$\underset{x}{\mathcal{U}_\alpha} \xrightarrow{\varphi_\alpha} \underset{u}{V_\alpha}$$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha) : \quad f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(V_\alpha)$$

in part. $x_i = u_i \circ \varphi_\alpha$ coordinata..

$\varphi_\alpha \equiv (x_1 \dots x_n)$

$$\underset{M}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)} = \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial u_i}(\varphi_\alpha(p))$$

$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right]$ = sp. tangente

X_α

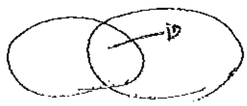
campo vettoriale su $\mathcal{U}_\alpha$

$= \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

<u>cambi di coordinate</u> $x \to y$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$

<u>campo vettoriale</u> <u>su M</u> $= \{X_\alpha\}$

tali che $X_\alpha = X_\beta$ su $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$



$\boxed{\text{Complementi}}$

☆ Spazio tangente : i vari approcci ⓪ : quello già visto

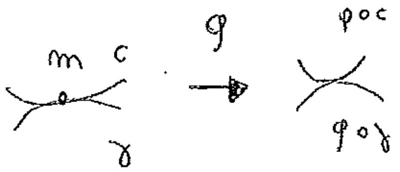
① vettore tangente in m : classe di eq. di $c : I \to M$

$c(0) = m$

anche questo già accennato

$c \sim \gamma \iff$ in una carta (U, φ) attorno ad m

$$\left[(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ c)'(0)\right] (☆)$$



☆ tale nozione non dip da (U, φ)

(☆) rimane vera

Dunque : un vett. tangente è $[c]$; è ess. una velocità
curva

② Giorno

$(\underbrace{U, \varphi}_{\text{carta}}, \underset{\mathbb{R}^n}{u}) \sim (V, \Psi, v)$

se: $(\Psi \circ \phi^{-1})'_{\phi(m)} u = v$

vettore tangente in M $= [(U, \varphi, \underset{\mathbb{R}^n}{u})]$

coll. con ② : $u = (\phi \circ c)'(0)$

☆ Isom. naturale : $\Theta_{U, \varphi, m} : u \to [(U, \phi, u)]$

③ punto algebrico , derivazioni

$C^\infty_m(M)$ algebra dei germi in m delle funzioni lisce

classi di equivalenza di : $(f : U \to \mathbb{R}) \sim (g : V \to \mathbb{R})$

$U \ni m$, V — se $\exists$ $W \subset U$, $W \subset V$ t.c. $f|_W = g|_W$.

[ex: nel caso analitico $C^\omega_m \cong$ serie di potenze $\simeq \{a_n\}$ coefficienti]

vettore tangente in m : è una derivazione di $C^\infty_m(M)$

$f, g \in C^\infty_m(M)$

linearità
1) $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \delta f + \beta \delta g$ — $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (rappresentano)

2) $(\delta fg)(m) = \delta(f)(m)\, g(m) + f(m)(\delta g)(m)$

Leibniz

[si arriverà a: campo vettoriale ($\equiv$ sezione del fibrato tangente)
$\neq$ $\boxed{\text{Derivazione di } C^\infty(M) \quad (\text{"tout court"})}$]

Il collegamento con gli approcci precedenti discende dal seguente

Teorema : ogni derivazione di $C^\infty_0(M)$ può scriversi :

germi

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(x^j) \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{x=0}$$

[già visto...]

Infatti, si osservi che

$$\delta(f) = \delta(f - f(0))$$

$$\big(\delta(1) = \delta(1\cdot 1) = \delta(1)1 + 1\delta(1) \quad \Rightarrow \quad \delta(1) = 0$$

e che, localmente,

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} x^j h_j(x)$$

[dim: $f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt =$ idea fond. $v \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial v}$

$$= \sum_{j=1}^{n} x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx)\, dt}_{\equiv h_j(x)} \quad]$$

Per globalizzare:

Si introduca l'applicazione L_X prende il nome di derivata di Lie, v. oltre

$$X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto L_X f(m) = \sum X^i(m)\Big(\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big)$$

Essa è iniettiva: se $X|_m \neq 0$, $\exists$ f loc. tale che $L_X f \neq 0$; con una partizione dell'unità il tutto si globalizza.  ⚠ attenzione qui!

È anche suriettiva: ogni derivazione $\delta: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ induce una der. sui germi, e dunque un vettore tangente: $\underline{L_{X(a)}} = \delta_a$
$\delta: f \to \delta(f)(a)$

Ma $a \mapsto X_a$ è liscia

$$\delta|_U = \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\parallel \\ X^i(a)}}{\delta(x^i)} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Cruciale è l'uso di funzioni test (f. a campana..)