Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 2

Integrazione - Funzioni di due o più variabili reali - Equazioni differenziali

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Venerdì 21 gennaio 2011

Degli esercizi indicati con (*) viene di seguito fornita la risoluzione dettagliata.

(1) **Integrazione.**

Si calcolino i seguenti integrali definiti:

(**1.a**) $\int_0^4 \sqrt{x}\, e^{1+\sqrt{x}}\, dx$, (**1.b**) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+4\sin x+5}\, dx$, (**1.c**) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2-6x+9}\, dx$,

(**1.d**)* $\int_0^1 e^{-x}(x^2+\sin 2x)\, dx$, (**1.e**)* $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (porre $x = \operatorname{tg} t$), (**1.f**) $\int_{-1}^0 \frac{e^{3t}}{e^t+1}\, dt$,

(**1.g**)* $\int_1^2 \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3}\, dt$, (**1.h**) $\int_0^1 x^3 \log(x^2+3)\, dx$, (**1.i**)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\, dx$,

(**1.j**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos u} - u)\sin u\, du$, (**1.k**) $\int_1^9 \frac{\log(2\sqrt{x}-1)}{2x-\sqrt{x}}\, dx$, (**1.l**) $\int_1^e \frac{\operatorname{arctg}(1-2\log x)}{x}\, dx$.

Studiare l'andamento di $f(x)$, dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ è definito $\int_a^b f(x)\, dx$ e calcolarne il valore.

(**1.m**) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$, (**1.n**)* $f(x) = 2\log|x| + \sqrt{x+2}$, (**1.p**) $f(x) = x(e^x - 1) - 1$.

Si disegnino le seguenti regioni finite del piano cartesiano (x, y) e si calcolino le loro aree.

(1.q) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x-\pi) \le y \le x\sin x,\ y \ge 1-\pi\}$;

(1.r) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+x)y \le 2,\ |y| \le 1,\ |x| \le 3\}$;

(1.s)* $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(1-xy) \le 0,\ |y-2x| \le 1\}$;

(1.t) $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2y - 3 \le x \le 1 + \cos 2y,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

(2) **Funzioni di due o più variabili reali.**

(2.a) Data la funzione $f(x,y) = 1 + \log|y(x^2-2)|$, si determinino il dominio naturale, i punti nei quali si annulla e quelli in cui è positiva, disegnando tali insiemi sul piano cartesiano. Si ragioni sui limiti notevoli di f. f è limitata? Dove è differenziabile? Calcolare il differenziale totale df, la funzione lineare tangente di f (il cui grafico è il piano tangente al grafico di f) e la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f nei punti $A = (1, 1)$ e $B = (-1, 2)$. Calcolare le derivate parziali seconde di f, verificando il teorema di Schwarz.

(2.b) Stesse domande per $g(x, y) = \frac{\sqrt{x-y^2}-x}{x+2}$, con $A = (2, -1)$ e $B = (4, 0)$.

(2.c)* Stesse domande per $h(x, y) = x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$, con $A = (0, 0)$ e $B = (\frac{\pi}{4}, 1)$.

(2.d)* Stesse domande per $\ell(x, y) = \mathrm{arctg}\,(|2x + y - 1| - y)$, con $A = (1, 1)$ e $B = (-1, \frac{3}{2})$.

(2.e) Stesse domande per $m(x, y) = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2-2y^2|}}$ con $A = (0, 0)$ e $B = (-3, 2)$.

(2.f) In quali punti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano tangente al grafico di $f(x, y) = x^4 - 4x^3 - 4xy - y^2 + x$ in P_0 è parallelo al piano di equazione cartesiana $z = 5x + 2y + 1$? Calcolare il differenziale totale df e la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f in ognuno dei punti trovati.

(2.g) Data $f(x, y) = x \log y$ descriverne il dominio, gli zeri, il segno, i limiti notevoli. Come sono fatte le sue curve di livello $f(x, y) = k$? Disegnare la curva di livello passante per $A(0, 1)$ e quella passante per $B(-1, e)$. Calcolare i vettori gradienti $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$, e notare come sono diretti rispetto alle suddette curve di livello. Infine, supponendo di spostarsi, nel dominio, di un piccolo incremento (dx, dy) dal punto B , qual'è la stima lineare della variazione di f dal valore che essa aveva in B?

(2.h)* Determinare la funzione $f(x, y)$ sapendo che ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$, e che vale $f(0, 2) = -1$. Stesso problema per $g(x, y)$, sapendo che $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy - 3y^2 + 8$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$, e che vale $g(-1, 0) = -3$.

(2.i)* Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$. Disegnare poi gli insiemi chiusi e limitati $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ e $B = \{(t, -2) : |t| \leq 2\}$, e determinare il massimo e minimo assoluti di f su ciascuno di essi.

(2.l) Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = \dfrac{x^2\, e^{-y^2}}{1 + x^4}$. Poi, notando (e se possibile dimostrando) che $\lim_{(x,y)\to\infty_2} g(x, y) = 0$, spiegare perché g deve ammettere estremi assoluti su tutto il dominio $\mathbb{R}^2$ anche se quest'ultimo non è limitato (e dunque non si può applicare Weierstrass), e dire quanto valgono.

(2.m) Disegnare l'insieme $K = \{(x, y) : y^2 - 2y \leq x \leq 1\}$, calcolarne l'area e determinare massimo e minimo assoluti su di esso della funzione $h(x, y) = 3x + 4y$, cercando poi di spiegare quest'ultimo risultato con un ragionamento grafico.

(3) **Equazioni differenziali.**

(3.a) Data l'equazione differenziale $y\,y' = x\, e^{-y^2}$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. (Facoltativo: si dica in quali zone del piano le soluzioni sono convesse; si dimostri che le soluzioni sono funzioni pari.[1]) Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$.

[1]Se $\varphi(x)$ è una soluzione, si ponga $\psi(x) = \varphi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\varphi(-x)$, si mostri che anche $\psi(x)$ è soluzione; poi, notando che $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$...

(3.b) Data l'equazione differenziale $2(x-2)y' = x(y^2+4)$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti, ed in quali zone del piano sono convesse. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = 0$.

(3.c)* Data l'equazione differenziale $y^2y' \sin^2 x + (y^3+1)\cos x = 0$ si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Si calcoli poi la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$, e quella con condizione iniziale $y(-3) = -1$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

(3.d) $(x+1)y' - y = \log x, \quad y(1) = 0.$

(3.e) $xy' + (x+1)y = -2-2x, \quad y(1) = -1$ oppure $= -2$ (fare anche come variabili separabili)

(3.f)* $y' \sin x + y \cos x = \sin 2x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ oppure $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$. Per quali y_0 e y_1 si possono prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate ottenendo una funzione derivabile?

Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

(3.g) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - \cos 2x, \quad y(0) = -1, \ y'(0) = \frac{1}{2}.$

(3.h)* $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}, \quad y(0) = -2, \ y'(0) = 0.$

(3.i) $y'' + 2y' + 5y = 2e^x \sin 2x + \sin x - 5, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1.$

Risolvere i seguenti problemi tramite un'opportuna equazione differenziale.

(3.j) Una pallina di massa m, vincolata a stare su una guida rettilinea verticale liscia, è soggetta alla propria forza peso ed è trattenuta anche da una molla di costante elastica k; il tutto è immerso in un fluido di viscosità β. Calcolare la legge oraria del moto nei casi $(m, k, \beta) = (1, 2, 3)$ e $(m, k, \beta) = (1, 2, 2)$, supponendo che all'istante iniziale la pallina venga lasciata con velocità nulla nel punto in cui è anche attaccata la molla;[2] cercare poi di interpretare i risultati alla luce del buon senso. Se si vuole, discutere anche il caso di m, k, β qualunque.

(3.k) La velocità di crescita di una colonia di batteri è, in ogni istante, direttamente proporzionale al tempo che passa e inversamente proporzionale all'entità della colonia stessa. Sapendo che all'istante iniziale dell'esperimento erano stati messi assieme 4 batteri, e che dopo 4 secondi questi erano raddoppiati, calcolare quanti ve ne saranno dopo un'ora.

(3.l)* La sera di San Silvestro, un gruppo di amici decide di lanciare in aria un candelotto di fuochi artificiali per festeggiare l'anno nuovo. Il candelotto ha massa 1 kg, e dunque è soggetto ad una forza di gravità di (circa) 10 Newton; al momento dell'accensione esso viene spinto da una forza verso l'alto pari a 150 Newton, che decresce proporzionalmente al tempo e si esaurisce dopo 5 secondi. L'aria oppone una resistenza di tipo viscoso con coefficiente pari a 1 Newton·sec/m. Sapendo che il candelotto contiene un meccanismo programmato per causare l'esplosione dopo 3 secondi dallo spegnimento della forza propulsiva (dunque, in tutto, dopo 8 secondi dalla partenza), si dica a che altezza dal suolo (arrotondata al metro) esploderà il candelotto.

[2] Tutte le grandezze sono espresse nelle unità di misura del sistema internazionale standard MKS, e dunque la massa m è espressa in kg, la costante elastica k in Newton/m, il coefficiente di viscosità β in Newton·sec/m, e l'accelerazione di gravità g (che, se si vuole, si può arrotondare per comodità a 10) in m/sec^2. Naturalmente, converrà porre sulla guida rettilinea un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto, supponendo che la molla sia imperniata in 0: la domanda è dunque di determinare la funzione $x(t)$.

Alcune soluzioni.

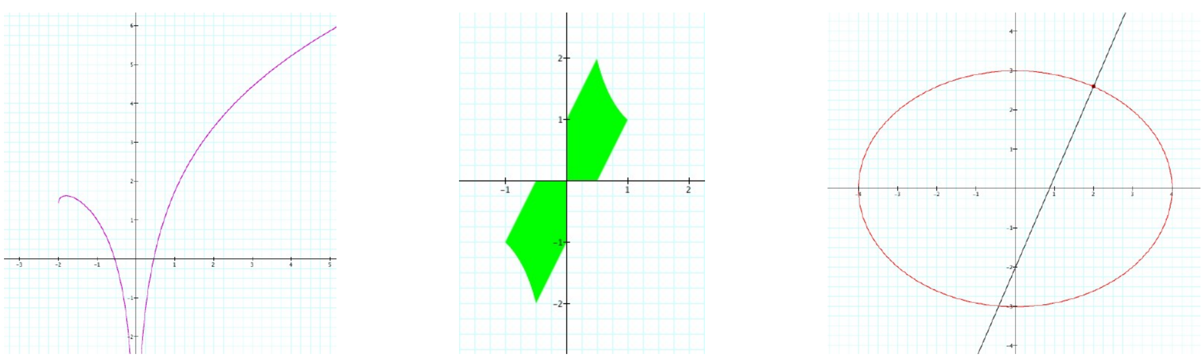
(1) **Integrazione.**

(1.d) Vale $\int e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx = \int x^2e^{-x}\,dx + \int e^{-x}\sin 2x\,dx$; integrando per parti si ottiene $\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx) = -(x^2+2x+2)e^{-x}+k$, e $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2(-e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x\,dx)$, da cui $5\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x$, da cui $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+k$. Pertanto $\int e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2+\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{5})+k$, e $\int_0^1 e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx$ basta sottrarre i valori di tale primitiva negli estremi 1 e 0.

(1.e) Da $x = \operatorname{tg} t$ si ha $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$; se $x=0$ si ha $t=0$, e se $x=1$ si ha $t=\frac{\pi}{4}$, dunque $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x}{(\cos^2 t+\sin^2 t)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = (\frac{t+\sin t\cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}{2}) - (0) = \frac{\pi+2}{8}$.

(1.g) Si ha $2t^2-5t-3 = (2t+1)(t-3)$, dunque $\int \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3}\,dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt + \int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt$. Iniziamo calcolando $\int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt$: dividendo si ha $\frac{t^2-2}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2}(1+\frac{5t-1}{2t^2-5t-3})$, e poi $\frac{5t-1}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2t+1}+\frac{2}{t-3}$, pertanto $\int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\log|2t+1|+2\log|t-3|)+k$. Passando poi a $\int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt$, poniamo $\tau = 3-t$, da cui (sostituendo e integrando per parti) si ottiene $d\tau = -dt$: si ha allora $\int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt = \int \frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau = \log^2\tau - \int \frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau$, da cui $\int \frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\log^2\tau + k$, ovvero $\int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt = \frac{1}{2}\log^2(3-t)+k$. A questo punto basta riunire i due integrali addendi e sottrarre i valori della primitiva così ottenuta negli estremi 2 e 1.

(1.i) Posto $t=\cos x$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{2+\cos^2 x}\,dx = -2\int_1^0 \frac{t}{2+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{2+t^2}\,dt = (\log(2+t^2)]_0^1 = \log\frac{3}{2}$.



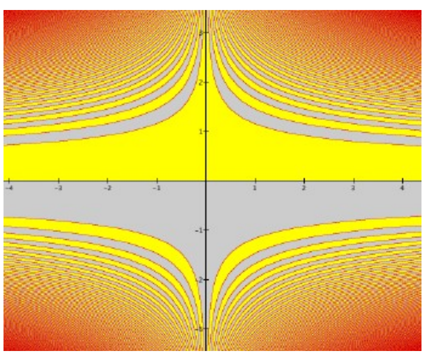
(1) Grafico di $f(x) = 2\,\log|x| + \sqrt{x+2}$ in (1.n); **(2)** L'insieme S_3 in (1.s); **(3)** L'ellisse $\gamma(t)$ in (2.b).

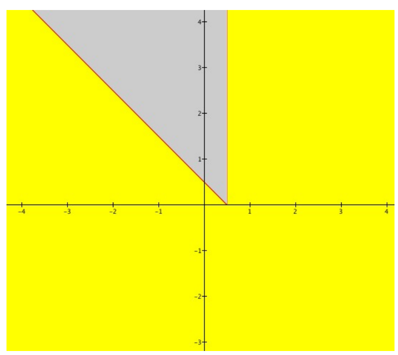
(1.n) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = 2\,\log|x| + \sqrt{x+2}$ è dato da $x \geq -2$ e $x \neq 0$; la funzione non ha periodo o parità, è continua nel suo dominio e derivabile ovunque tranne che in $x=-2$ (a causa della radice). Un facile confronto grafico tra le funzioni $2\,\log|x|$ (il logaritmo a due falde simmetriche e raddoppiato di valore) e $-\sqrt{x+2}$ (la radice quadrata arretrata di 2 e resa negativa) mostra che f si annulla in due punti x_0 e x_1 con $-1 < x_0 < 0 < x_1 < 1$, e vale $f(x) > 0$ per $-2 \leq x < x_0$ e $x > x_1$. I limiti notevoli sono determinati e valgono $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, mentre f è continua in -2 col valore $f(-2) = 2\log 2 \sim 1{,}4$; non vi sono asintoti a $+\infty$. Derivando (con $x \neq -2$) si ottiene $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{4\sqrt{x+2}+x}{2x\sqrt{x+2}}$: vale $f'(x) = 0$ quando $4\sqrt{x+2} = -x$, che nell'ipotesi $-x > 0$ (cioè se $-2 \leq x < 0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2$, ovvero $x^2-16x-32 = 0$, soddisfatta per $x = x_2 := -4(\sqrt{6}-2) \sim -1{,}8$. Passiamo ora allo studio di $f'(x) > 0$. Il numeratore è positivo quando $4\sqrt{x+2} > -x$, che se $-x < 0$ (cioè se $x > 0$) è sempre vero, mentre se $-x > 0$ (cioè se $-2 < x < 0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2 > (-x)^2$, ovvero $x^2-16x-32 < 0$, soddisfatta per $x > x_2$: pertanto il numeratore è positivo per $x_2 < x < 0$ e per $x > 0$. D'altra parte il denominatore è positivo quando $x > 0$, dunque $f'(x) > 0$ per $-2 < x < x_2$ e per $x > 0$: ne ricaviamo che $x = x_2$ è un punto di massimo locale (con $f(x_2) \sim 1{,}6$). Si osservi anche che $\lim_{x\to-2^+} f'(x) = +\infty$. La derivata seconda $f''(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$ è sempre < 0, dunque f è concava in tutto il dominio. Dallo studio appena effettuato ricaviamo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ ha senso quando sia a che b stanno in $[-2,0[$, oppure quando sono entrambi > 0, ed in tali casi vale $\int_a^b f(x)\,dx = (2x(\log|x|-1)+\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}]_a^b$.

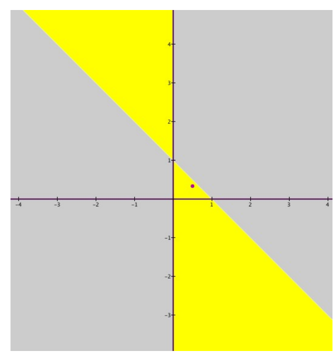
(1.s) (Figura 2) La condizione $\log(1-xy)\le 0$ richiede che $0<1-xy\le 1$, ovvero che $0\le xy<1$: si tratta delle parti di I e III quadrante strettamente comprese tra le due falde dell'iperbole equilatera $xy=1$. Invece, la condizione $|y-2x|\le 1$ equivale a $-1\le y-2x\le 1$, ovvero $2x-1\le y\le 2x+1$: si tratta della fascia obliqua di piano compreso tra le due rette $y=2x-1$ e $y=2x+1$. L'insieme S_3 è ottenuto dall'intersezione di tali sottoinsiemi. Dal sistema tra $y=\frac{1}{x}$ e $y=2x+1$ si ottiene $x=-1$ e $x=\frac{1}{2}$, e da quello tra $y=\frac{1}{x}$ e $y=2x-1$ si ottiene $x=-\frac{1}{2}$ e $x=1$: per chiare ragioni di simmetria, l'area di S_3 risulta $2(\int_0^{\frac12}(2x+1)\,dx+\int_{\frac12}^1\frac{1}{x}\,dx+\int_1^{\frac12}(2x-1)\,dx+\int_{\frac12}^0 0\,dx)=2((x^2+x]_0^{\frac12}+(\log x]_{\frac12}^1+(x^2-x]_1^{\frac12})=2\log 2\,+1\sim 2,4$.

(2) **Funzioni di due o più variabili reali.**

(2.c) (Figura 4) Il dominio di $f(x,y)=x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$ è dato dalla condizione $xy^3\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$): si tratta di escludere una famiglia di curve del tipo $xy^3=\alpha$, che hanno due rami simili a quelli dell'iperbole equilatera $xy=1$ nel primo e terzo quadrante se $\alpha>0$, nel secondo e quarto quadrante se $\alpha<0$, mentre se $\alpha=0$ si ottiene l'unione dei due assi coordinati $x=0$ e $y=0$. Similmente, si ha $f(x,y)=0$ per $x=0$, $y=0$ oppure per $xy^3=k\pi$ (con $k=\pm1,\pm2,\dots$). Si ha poi $f(x,y)>0$ nei seguenti casi: se $x>0$, per $k\pi<xy^3<\frac{\pi}{2}+k\pi$; e se $x<0$, per $\frac{\pi}{2}+k\pi<xy^3<\pi+k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$). Quando il punto (x,y) si avvicina ad una delle curve escluse dal dominio, $f(x,y)$ diverge a $\pm\infty$; dunque f non è limitata. La funzione è differenziabile su tutto il suo dominio; le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{tg}\,(xy^3)+x\frac{y^3}{\cos^2(xy^3)}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)}$. Essendo $f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, sia la funzione lineare tangente in $(0,0)$ che il differenziale $df_{(0,0)}(x,y)$ sono 0; essendo invece $f(\frac{\pi}{4},1)=\frac{\pi}{4}$, poi $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},1)=1+\frac{\pi}{4}\frac{1}{\frac12}=\frac{\pi}{2}+1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},1)=\frac{\pi}{4}\frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac12}=\frac{3\pi^2}{8}$, si ha $df_{(\frac{\pi}{4},1)}(x,y)=(\frac{\pi}{2}+1)x+\frac{3\pi^2}{8}y$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4}+(\frac{\pi}{2}+1)(x-\frac{\pi}{4})+\frac{3\pi^2}{8}(y-1)=(\frac{\pi}{2}+1)x+\frac{3\pi^2}{8}y-\frac{\pi^2}{2}$. Le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\frac{y^3}{\cos^2(xy^3)}+2xy^6\frac{\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)}=\frac{2y^3(\cos(xy^3)+y^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=3x^2\frac{2y\cos^2(xy^3)+2y^2\cdot 3xy^2\sin(xy^3)\cos(xy^3)}{\cos^4(xy^3)}=\frac{6x^2y(\cos(xy^3)+3xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)}+x\frac{3y^2\cos^2(xy^3)+y^3\cdot 2\sin(xy^3)\cos(xy^3)\cdot 3xy^2}{\cos^4(xy^3)}=\frac{6xy^2(\cos(xy^3)+xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=2x\frac{3y^2}{\cos^2(xy^3)}+x^2\cdot 3y^2\frac{2y^3\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)}=\frac{6xy^2(\cos(xy^3)+xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$: notare che $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, come prescrive Schwarz.







(4) Segno di $x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$ in (2.c); **(5)** Segno di $\mathrm{arctg}\,(|2x+y-1|-y)$ in (2.d); **(6)** Segno di $x^3y^2(1-x-y)$ in (2.i); in porpora i punti stazionari.

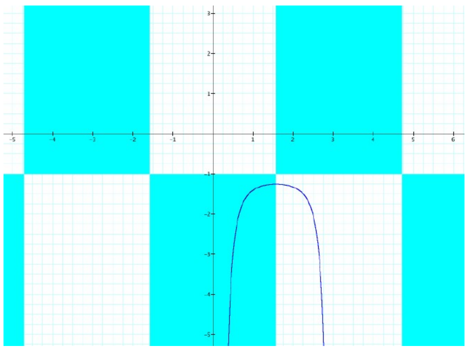
(2.d) (Figura 5) Il dominio di $\ell(x,y)=\mathrm{arctg}\,(|2x+y-1|-y)$ è tutto $\mathbb{R}^2$; vale $\ell(x,y)=0$ quando $|2x+y-1|=y$: nell'ipotesi che $y\ge 0$, ciò equivale a $2x+y-1=y$ (ovvero $x=\frac{1}{2}$) oppure $2x+y-1=-y$ (ovvero $y=-x+\frac{1}{2}$), pertanto ℓ si annulla sui tratti delle rette $x=\frac{1}{2}$ e $y=-x+\frac{1}{2}$ che stanno nel semipiano $y\ge 0$. Quanto al segno, vale $\ell(x,y)>0$ quando $|2x+y-1|>y$; ciò è sempre vero se $y<0$, mentre se $y\ge 0$ equivale a $2x+y-1<-y$ (ovvero $y<-x+\frac{1}{2}$) oppure $2x+y-1>y$ (ovvero $x>\frac{1}{2}$): pertanto ℓ è positiva su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ tranne il settore del semipiano $y>0$ compreso tra le rette $x=\frac{1}{2}$ e $y=-x+\frac{1}{2}$. La funzione ℓ è certamente limitata, perché $|\ell(x,y)|<\frac{\pi}{2}$; da quanto detto sopra, si evince che il limite a ∞ non esiste. La funzione è certamente differenziabile in tutti i punti che non stanno sulla retta $2x+y-1$ (a causa del modulo). Dove $2x+y-1>0$ (ovvero sopra la retta $y=-2x+1$) la funzione diventa $\ell(x,y)=\mathrm{arctg}\,((2x+y-1)-y)=\mathrm{arctg}\,(2x-1)$, dunque costante rispetto a y, con derivate parziali $\frac{\partial\ell}{\partial x}=\frac{2}{1+(2x-1)^2}=\frac{1}{2x^2-2x+1}$ e $\frac{\partial\ell}{\partial y}\equiv 0$. Il punto $A=(1,1)$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(1,1)=\mathrm{arctg}\,(1)=\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\partial\ell}{\partial x}(1,1)=1$, si ha $d\ell_{(1,1)}(x,y)=x$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4}+(x-1)=x+\frac{\pi}{4}-1$. Dove invece $2x+y-1<0$ (ovvero sotto la retta $y=-2x+1$) la funzione diventa $\ell(x,y)=\mathrm{arctg}\,(-(2x+y-1)-y)=\mathrm{arctg}\,(1-2x-2y)$, con derivate parziali $\frac{\partial\ell}{\partial x}=\frac{\partial\ell}{\partial y}=\frac{-2}{1+(1-2x-2y)^2}=-\frac{1}{2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1}$. Il punto $B=(-1,\frac{3}{2})$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(-1,\frac{3}{2})=\mathrm{arctg}\,(0)=0$ e $\frac{\partial\ell}{\partial x}(-1,\frac{3}{2})=\frac{\partial\ell}{\partial y}(-1,\frac{3}{2})=-2$, si ha $d\ell_{(-1,\frac{3}{2})}(x,y)=-2x-2y$ e la funzione lineare tangente $0-2(x-(-1))-2(y-\frac{3}{2})=-2x-2y+1$. Guardiamo ora i punti sulla retta "incriminata" $y=-2x+1$, ovvero quelli della forma $(x_0,-2x_0+1)$: la derivata parziale $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ ha (ovviamente) limite 0 tendendo ad un tale punto da sopra la retta, ed ha limite $-\frac{1}{2(x_0)^2+2(-2x_0+1)^2+4x_0(-2x_0+1)-2x_0-2(-2x_0+1)+1}=-\frac{1}{2x_0^2-2x_0+1}$ tendendovi da sotto: si noti che tale ultimo limite non è mai nullo, dunque $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ non esiste in nessuno dei punti della retta. Ciò dimostra senza dubbio che ℓ, pur essendo continua sui punti della retta, non è differenziabile in nessuno di essi (se lo fosse, dovrebbero anche esistere entrambe le derivate parziali). Le derivate seconde sopra la retta $y=-2x+1$ sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\equiv 0$; sotto la retta $y=-2x+1$ sono invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{2(2x+2y-1)}{(2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1)^2}$. In entrambi i casi il teorema di Schwarz è confermato.

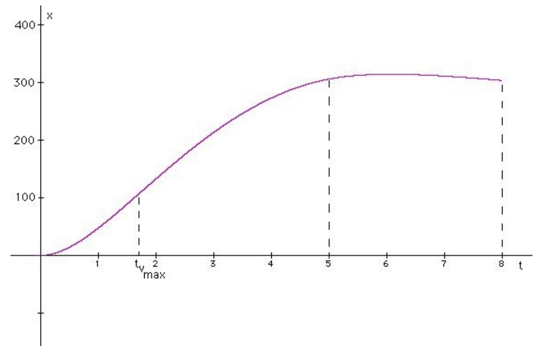
(2.h) Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y-6y^2+7$, integrando rispetto a x dovrà essere $f(x,y)=x^3y-6xy^2+7x+\varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial f}{\partial y}=x^3-12xy+2y$, integrando rispetto a y si ottiene $x^3-12xy+\varphi'(y)=x^3-12xy+2y$, da cui $\varphi'(y)=2y$, da cui $\varphi(y)=y^2+k$ con $k\in\mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $f(x,y)=x^3y-6xy^2+7x+y^2+k$; infine, da $f(0,2)=-1$ si ricava $4+k=-1$, dunque $k=-5$, e perciò $f(x,y)=x^3y-6xy^2+7x+y^2-5$. In modo simile, poiché $\frac{\partial g}{\partial x}=2x\cos xy-x^2y\sin xy-3y^2+8$ dovrà essere $g(x,y)=x^2\cos xy-3xy^2+8x+\varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial g}{\partial y}=-x^3\sin xy-6xy-2y$ si ottiene $-x^3\sin xy-6xy+\varphi'(y)=-x^3\sin xy-6xy-2y$, da cui $\varphi'(y)=-2y$, da cui $\varphi(y)=-y^2+k$ con $k\in\mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $g(x,y)=x^2\cos xy-3xy^2+8x-y^2+k$; infine, da $g(-1,0)=-3$ si ricava $1-8+k=-3$, dunque $k=5$, e perciò $g(x,y)=x^2\cos xy-3xy^2+8x-y^2+5$.
Si noti che in generale, se vengono assegnate le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=\beta(x,y)$, il teorema di Schwarz implica che deve essere $\frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\partial \beta}{\partial x}$ (condizioni di *chiusura*). Per maggiori dettagli, si veda la parte finale facoltativa delle note sulle funzioni di più variabili reali.

(2.i) (Figura 6) Gli eventuali punti di massimo e minimo locale in $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$ si trovano tra i punti stazionari, dunque iniziamo col cercare questi ultimi. Dal sistema tra $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2(1-x-y)-x^3y^2=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y(1-x-y)-x^3y^2=0$, ovvero tra $x^2y^2(3-4x-3y)=0$ e $x^3y(2-2x-3y)=0$, si trovano tutti i punti degli assi coordinati e il punto $P(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. La matrice hessiana è $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6xy^2(1-2x-y) & x^2y(6-8x-9y) \\ x^2y(6-8x-9y) & x^3(2-2x-6y) \end{pmatrix}$, dunque $H_f(P)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ ci dice che P è un punto di massimo locale stretto (con $f(P)=\frac{1}{432}$). D'altra parte, nei punti degli assi coordinati l'hessiano ha determinante nullo, dunque il criterio non dà informazioni precise; tuttavia, poiché sugli assi f è nulla, l'esame del segno di f (riportato in figura) ci dice subito che i punti $(x_0,0)$ dell'asse x sono di massimo locale non stretto se $x_0<0$ oppure $x_0>1$ e di minimo locale non stretto se $0<x_0<1$, mentre i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e tutti i punti dell'asse y sono delle selle.
L'insieme $A=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$ è il rombo pieno (lati compresi) di vertici $Q_1(1,0)$, $Q_2(0,1)$, $Q_3(-1,0)$ e $Q_4(0,-1)$, mentre $B=\{(t,-2):|t|\le 2\}$ è il tratto di segmento orizzontale tra i punti $R_1(-2,-2)$ e $R_2(2,-2)$: essendo entrambi gli insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^2$, f ammetterà estremi assoluti su ciascuno di essi per Weierstrass. Iniziando da A, i punti interni candidati ad essere estremanti per f sono quelli per cui $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e sono dunque i già noti P (in cui $f(P)=\frac{1}{432}$) e quelli sugli assi (nei quali $f=0$). Nei quattro vertici si ha pure $f(Q_1)=f(Q_2)=f(Q_3)=f(Q_4)=0$. Sul lato Q_1Q_2 si ha $\phi_1(t)=f(t,1-t)\equiv 0$; sul lato Q_2Q_3 si ha $\phi_2(t)=f(t,t+1)=-2t^4(t+1)^2$ con $-1<t<0$, e ponendo $\phi_2'(t)=-4t^3(t+1)(3t+2)=0$ si ottiene $t=-\frac{2}{3}$, ovvero il punto $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ in cui f vale $-\frac{32}{729}$; sul lato Q_3Q_4 si ha $\phi_3(t)=f(t,-1-t)=2t^3(t+1)^2$ con $-1<t<0$, e ponendo $\phi_3'(t)=2t^2(t+1)(5t+3)=0$ si ottiene $t=-\frac{3}{5}$, ovvero il punto $(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5})$ in cui f vale $-\frac{216}{3125}$; infine, sul lato Q_4Q_1 si ha $\phi_4(t)=f(t,t-1)=-2t^3(t-1)^3$ con $0<t<1$, e ponendo $\phi_4'(t)=-6t^2(t-1)^2(2t-1)=0$ si ottiene $t=\frac{1}{2}$, ovvero il punto $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ in cui f vale $\frac{1}{32}$. Pertanto, essendo $-\frac{216}{3125}<-\frac{32}{729}<0<\frac{1}{432}<\frac{1}{32}$, il minimo assoluto di f su A è $-\frac{216}{3125}$ (assunto in $(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5})$) e il massimo assoluto è $\frac{1}{32}$ (assunto in $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$).
Passiamo ora a B. Negli estremi si ha $f(R_1)=-160$ e $f(R_2)=32$, mentre negli altri punti si ha $\phi(t)=f(t,-2)=4t^3(3-t)$ con $-2<t<2$: ponendo $\phi'(t)=4t^2(9-4t)=0$ si ottiene solo $t=0$ (invece $t=\frac{9}{4}$ non interessa perché >2), ovvero il punto $(0,-2)$ in cui f vale 0. Pertanto il minimo assoluto di f su B è -160 (assunto in R_1) e il massimo assoluto è 32 (assunto in R_2).

(3) **Equazioni differenziali.**

(3.c) (Figura 7) Per discutere la crescenza delle soluzioni bisogna ricavare esplicitamente y', ma ciò richiede di dividere per $y^2\sin^2 x$: iniziamo dunque discutendo brevemente cosa accade quando tale divisione non è possibile. Dalla forma dell'equazione si deduce che se $y(x)$ è una soluzione e $y(x)=0$, si ottiene $\cos x=0$: ovvero, se una soluzione si annulla in un punto x allora tale punto dev'essere necessariamente della forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$; viceversa, nei punti x della forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$ si ha $\pm y^2(x)y'(x)=0$, dunque o $y(x)=0$ (come appena detto) o $y'(x)=0$, ovvero si ha un punto stazionario, probabile estremante locale. Sempre dalla forma dell'equazione si deduce anche che se una soluzione è definita in qualche punto x del tipo $k\pi$, dev'essere $y^3(x)+1=0$, ovvero in tale punto la soluzione deve valere -1. Escludendo ora i punti del piano in cui $y=0$ oppure $x=k\pi$, otteniamo finalmente $y' = -\frac{(y^3+1)\cos x}{y^2 \sin^2 x}$: pertanto $y'(x) = 0$ o se $y(x) = -1$ o se $\cos x = 0$ (ovvero per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$), mentre $y'(x) > 0$ se $(y^3+1)\cos x < 0$, ovvero se $y > -1$ e $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ oppure se $y < -1$ e $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Se la condizione iniziale è $y(-3) = -1$, la soluzione è la funzione costante $y(x) \equiv 1$; occupiamoci invece del caso in cui la condizione iniziale sia $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$. Separando le variabili, si ottiene $\frac{y^2}{y^3+1} y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, da cui integrando si ha $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} + k$; imponendo la condizione iniziale si ha $0 = 1 + k$, da cui $k = -1$ e perciò $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} - 1$. Si ha dunque $|y^3+1| = e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, ovvero $y^3 + 1 = \pm e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$: ma la condizione iniziale impone $-1 = \pm 1$, e dunque va scelto il segno "$-$", da cui $y^3 = -1 - e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, da cui $y = -\sqrt[3]{1 + e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}}$.





(7) Zone di crescenza e grafico della soluzione di (3.c); **(8)** Il grafico della legge oraria del moto di (3.l).

(3.f) Per risolvere l'equazione è necessario per il momento escludere i punti in cui $\sin x = 0$, ovvero i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tale caso, l'equazione diventa $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \operatorname{cotg} x$ e $q(x) = 2\cos x$. Come noto, una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \log|\sin x|$; bisogna poi calcolare $\int e^{P(x)} q(x)\,dx$, ovvero $\int |\sin x| \cdot 2\cos x\,dx = (\operatorname{sign}(\sin x)) \int 2\sin x\cos x\,dx = -(\operatorname{sign}(\sin x))\cos^2 x$. Si ha dunque l'integrale generale $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)} q(x)\,dx + k) = \frac{1}{|\sin x|}(-(\operatorname{sign}(\sin x))\cos^2 x + k) = \frac{k}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.
Imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ si ottiene $k = y_0$ e dunque $y(x) = \frac{y_0}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{y_0 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]0,\pi[$; imponendo invece la condizione iniziale $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$ si ottiene $k = y_1$ e dunque $y(x) = \frac{y_1}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-y_1 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]-\pi, 0[$. L'unico caso in cui si può sperare di prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate è quando $y_0 = 1$ e $y_1 = -1$ (se queste due condizioni non sono soddisfatte contemporaneamente, entrambe oppure una delle due soluzioni divergono quando x tende a 0). In tal caso si ottiene la funzione $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x} = \sin x$ sia a sinistra che a destra, e tale funzione può essere ovviamente prolungata come funzione derivabile (anzi, addirittura come funzione $\mathcal{C}^\infty$) in $x = 0$ col valore $\sin 0 = 0$. (D'altra parte, con un po' di occhio, si poteva riconoscere fin da subito che $y(x) = \sin x$ è una soluzione dell'equazione differenziale data.)

(3.h) L'equazione caratteristica è $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, che ha soluzione doppia $\lambda = \frac{1}{2}$: dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $4y'' - 4y' + y = 0$ è data da $y(x) = (A + Bx)e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione completa $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$: in questo caso, il metodo dei coefficienti indeterminati ci dice che si potrà trovare del tipo $\tilde{y}(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}(mx + q) = (mx^3 + qx^2)e^{\frac{x}{2}}$. Derivando, si ottiene $\tilde{y}'(x) = (\frac{m}{2}x^3 + (\frac{q}{2} + 3m)x^2 + 2qx)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x) = (\frac{m}{4}x^3 + (\frac{q}{4} + 3m)x^2 + (2q + 6m)x + 2q)e^{\frac{x}{2}}$, ed imponendo che sia soluzione si trova allora $4\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + \tilde{y} = (24mx + 8q)e^{\frac{x}{2}} = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$, da cui $m = \frac{1}{24}$ e $q = \frac{1}{8}$ e dunque $\tilde{y}(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{24} e^{\frac{x}{2}}$. L'integrale generale dell'equazione completa è dunque $y(x) = (A + Bx + \frac{x^3+3x^2}{24})e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da cui $y'(x) = (\frac{1}{2}A + B + (\frac{1}{2}B + \frac{1}{4})x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$. Imponendo le condizioni iniziali, si trova $y(0) = A = -2$ e $y'(0) = \frac{1}{2}A + B = 0$, da cui $B = 1$, e dunque finalmente la soluzione $y(x) = \frac{x^3+3x^2+24x-48}{24} e^{\frac{x}{2}}$.

(3.l) (Figura 8) In base a quanto detto, l'intensità della forza propulsiva è data dalla funzione continua $F : [0,8] \to \mathbb{R}$ data da $F(t) = 150(1 - \frac{1}{5}t) = 150 - 30t$ (per $0 \le t \le 5$) e $F(t) \equiv 0$ (per $5 \le t \le 8$). Fissiamo ora un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto con il valore $x = 0$ sul suolo. Dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante $t = 5$ il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x' + (150 - 30t)$, ovvero $x'' + x' = 140 - 30t$, con condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (il candelotto parte da terra con velocità nulla). Una prima integrazione dà $x' + x = 140t - 15t^2 + k$ con k da determinare; ma le condizioni iniziali danno necessariamente $k = 0$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = 140t - 15t^2$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 140t - 15t^2$, una primitiva di $p(t)$ è $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int (140t - 15t^2)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - \int (140 - 30t)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - (140 - 30t)e^t + \int (-30)e^t\,dt = (170t - 15t^2 - 170)e^t$.

L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((170t - 15t^2 - 170)e^t + h) = 170t - 15t^2 - 170 + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(0) = 0$ si ricava $-170 + h = 0$, ovvero $h = 170$, da cui la soluzione $x(t) = 170(t - 1 + e^{-t}) - 15t^2$. Ribadiamo che questa legge vale solo fino a $t = 5$, in cui l'altezza raggiunta vale $x(5) \sim 306$ m, e la velocità è $x'(5) = [170(1 - e^{-t}) - 30t]_{t=5} \sim 19$ m/sec (corrispondenti a circa 68 km/h).
Dall'istante iniziale $t = 5$ all'istante $t = 8$ la forza propulsiva sparisce, ed il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10-x'$, ovvero $x''+x' = -10$, con le nuove condizioni iniziali $x(5) = 306$ m e $x'(5) = 19$ m/sec ereditate dal moto precedente. Procedendo ancora come prima, una prima integrazione dà $x' + x = -10t + k$ con k da determinare, e le condizioni iniziali danno $19 + 306 = -50 + k$, da cui $k = 375$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = -10t + 375$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 375 - 10t$, una primitiva di $p(t)$ è ancora $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int(375 - 10t)e^t\,dt = (375 - 10t)e^t - \int(-10)e^t\,dt = (385 - 10t)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((385 - 10t)e^t + h) = 385 - 10t + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(5) = 306$ si ricava $385 - 50 + he^{-5} = 306$, ovvero $h = -29e^5 \sim -4304$, da cui la soluzione $x(t) = 385 - 10t - 4304e^{-t}$, che vale per $5 \leq t \leq 8$. L'altezza finale raggiunta all'istante dello scoppio, ovvero all'istante dell'inizio dello spettacolo dei fuochi d'artificio, è dunque $x(8) \sim 303$ m. (Terminiamo, per curiosità, con alcune osservazioni. La velocità massima toccata dal candelotto si ha quando $(x'(t))' = x''(t) = 170e^{-t} - 30 = 0$, ovvero dopo $\tilde{t} = \log\frac{17}{3} \sim 1,73$ secondi dalla partenza, quando diventa $x'(\tilde{t}) \sim 88$ m/sec, ovvero circa 317 km/h. L'altezza massima raggiunta durante l'ascesa si ha quando $x'(t) = -10 + 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo $\hat{t} = \log\frac{2152}{5} \sim 6,06$ secondi dalla partenza, alla quota $x(\hat{t}) \sim 314$ m; infatti, all'istante dello scoppio il candelotto sta già scendendo, con velocità $x'(\hat{t}) \sim -8,55$ m/sec, circa -31 km/h. È pure curioso notare che, in base al modello adottato in questo problema, se il candelotto non fosse esploso la velocità di discesa si sarebbe stabilizzata velocemente sui -10 m/sec, circa -36 km/h, raggiungendo nuovamente il suolo quando $385 - 10t - 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo circa $t_1 \sim 38,5$ secondi.)