ANALISI MATEMATICA II
-PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI-
AA 2015-2016

GIULIA CAVAGNARI

Esercizio 1 (12 pt)**.** Dei seguenti sottoinsiemi della retta reale dire quali sono chiusi, quali sono aperti, quali sono limitati e per quali motivi. Se ne descriva poi l'interno.

$$\mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Z}$$

$$\emptyset \qquad [0,+\infty[\qquad [0,1[$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \qquad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \cup \mathbb{Z} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2^x \leq 3^x\}$$

$$\{m10^{-k} \,:\, m, k \in \mathbb{Z},\, 0 \leq k \leq 24\} \qquad \{\pi^n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \qquad \{\pi^n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2 (6 pt)**.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si dica quali di essi sono intorno di $+\infty$.

$$\mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2^{x^2} \leq 3^x\} \cup \{+\infty\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 5x + 6 > 0\} \cup \{+\infty\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, \sin x > 0\} \qquad \mathbb{Z} \cup [2,+\infty] \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[\cup \{+\infty\}.$$

Esercizio 3 (3 pt)**.** Sia $\{\tau_j\}_{j \in J}$ una famiglia di topologie sull'insieme non vuoto X. Dimostrare che

$$\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$$

è una topologia su X. Anche $\bigcup_{j \in J} \tau_j$ è una topologia su X? Motivare la risposta.

Esercizio 4 (6 pt)**.** Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e si consideri

$$\tau := \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}.$$

(1) Si provi che τ è una topologia su X.
(2) Si trovino la chiusura degli insiemi $\{a\}, \{b\}, \{c, e\}$ e per ciascuno di essi si dica se è denso in X.
(3) Si trovino i punti di frontiera di $\{a, b, c\}$.
(4) Si elenchino tutti gli intorni di e e di c.

Esercizio 5 (3 pt)**.** Dimostrare che se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua e $C \subset \mathbb{R}^n$ è un compatto, allora anche $F(C)$ è un compatto. Dedurre che una funzione continua $f : K \to \mathbb{R}$ definita su un insieme compatto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ammette massimo e minimo assoluti.

Consegna entro: mercoledì 14.10.2015

E-mail address: `giulia.cavagnari@unitn.it`

Date: 6 ottobre 2015.