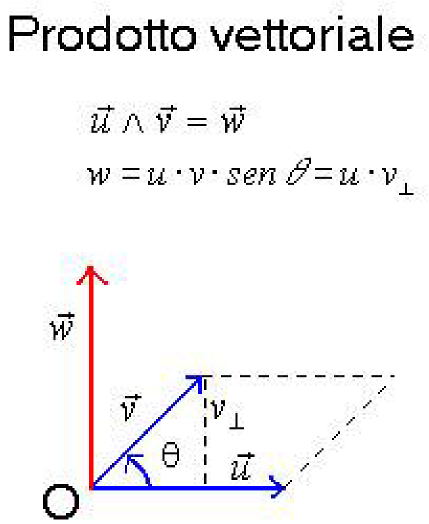
Esercizi Concetto di energia

1. Determinare il numero reale "m" in modo che il vettore
   X = (m, 2 - m, m - 1) risulti complanare con i vettori:
   U = (3, 2, 1) e **V** = (-1,2,-1).

Soluzione:

Se i vettori **X**, **U** e **V** sono complanari allora il vettore **X** deve essere ortogonale al vettore perpendicolare al piano formato dai vettori **U** e **V**, cioè deve essere ortogonale al vettore **W = U x V** (vedere la figura riferita al prodotto vettoriale)



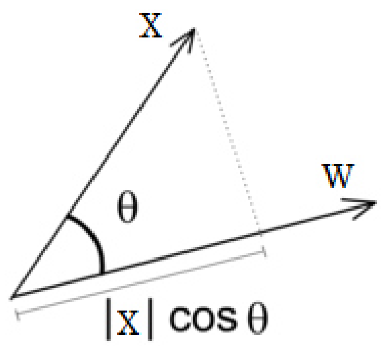
Calcoliamo prima il vettore W:

W = U x V

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\,\hat{i} + 2\,\hat{j} + 8\,\hat{k}$$

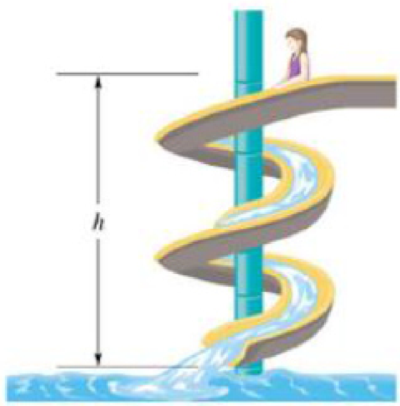
Quindi: **W** = (-4, 2, 8)

Perche **X** sia ortogonale a **W**, allora **X.W = 0** (prodotto scalare quando l'angolo θ = 90°)



Quindi:
(m, 2 - m, m - 1). (-4, 2, 8) = 0
-4m + 2(2 - m) + 8(m - 1) = 0
-4m + 4 - 2m + 8m - 8 = 0
2m = 4
m = 2

2. Un bambino di massa m è lasciato andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo tridimensionale, a un'altezza h = 8.5 m, sopra il livello della piscina. A che velocità starà scivolando quando arriva in acqua? Si supponga lo scivolo privo di attrito.



Soluzione:

Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica sappiamo che (Energia cinetica + Energia Potenziale):
$K_f + U_f = K_i + U_i$

ovvero
$\frac{1}{2} m_f.v_f^2 + m_f.g.y_f = \frac{1}{2} m_i.v_i^2 + m_i.g.y_i$

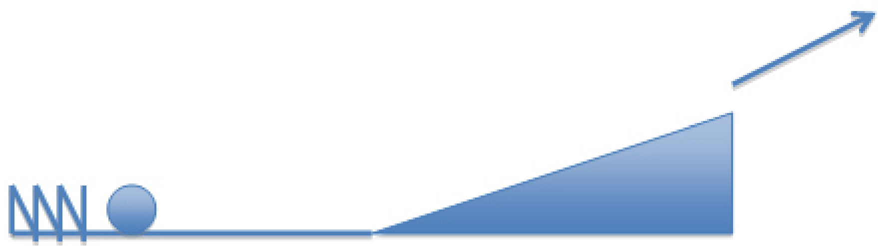
da cui tenuto conto che:
$v_i = 0$ perché il bambino parte da fermo
$m_f = m_i = m$
$y_i = h$
$y_f = 0$
si ricava:

$\frac{1}{2} m.v_f^2 = m.g.h$

quindi:

$V_f = \sqrt{(2.g.h)} = \sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 8{,}5)} = 12{,}90$ m/s

3. (**Esame Settembre 2014**) Una palla di massa m=2 kg viene lanciata, attraverso lo schiacciamento di una molla con costante elastica pari a 5000 N/m, lungo un piano inclinato di angolo 30° e alto 1 m, definire la gittata (distanza orizzontale percorsa da tale proiettile) della palla (supponendo che l'energia della molla sia ceduta completamente alla palla) se la molla viene compressa di:
   a) 0,05 m
   b) 0,2 m



Soluzione:

Se V_1 = velocità acquisita dalla palla (trasferita dalla molla)
e V_2 = velocità della palla al momento che lascia il piano inclinato

a) Conservazione dell'energia: trasferimento dell'energia elastica in energia cinetica

$\frac{1}{2} K.(\Delta S)^2 = \frac{1}{2} m.V_1^2$

Quindi:

$5000.(0,05)^2 = 2. V_1^2$

$V_1 = 2,50$ m/s

Conservazione dell'energia: trasferimento dell'energia cinetica in energia potenziale

$\frac{1}{2} m.V_1^2 + m.g.h_1 = \frac{1}{2} m.V_2^2 + m.g.h_2$

$\frac{1}{2}.2.(2,50)^2 + 2.(9,8).0 = \frac{1}{2}.2. V_2^2 + 2.(9,8).1$

$V_2^2 = - 13,35$

Il quale ci da un valore di velocità immaginario, ciò vuol dire che l'impulso della molla, quando viene compressa di solo 0,05 m, la palla non raggiunge il punto più altro del piano inclinato, quindi la gittata sarà pari a zero.

b) Conservazione dell'energia: trasferimento energia elastica in energia cinetica

$\frac{1}{2} K.(\Delta S)^2 = \frac{1}{2} m.V_1^2$

Quindi:

$5000.(0,2)^2 = 2. V_1^2$

$V_1 = 10$ m/s

Conservazione dell'energia: trasferimento dell'energia cinetica in energia potenziale

$\frac{1}{2} m.V_1^2 + m.g.h_1 = \frac{1}{2} m.V_2^2 + m.g.h_2$

$\frac{1}{2}.2.(10)^2 + 2.(9,8).0 = \frac{1}{2}.2.V_2^2 + 2.(9,8).1$

$V_2^2 =80,40$

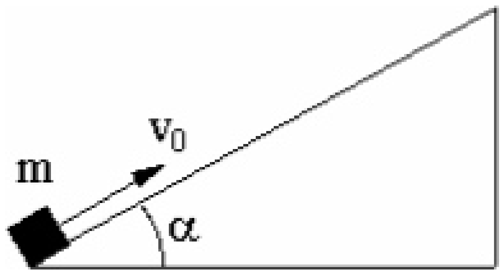
$V_2 =8,97$ m/s

Calcoliamo la gittata, analizzando prima nell'asse Y per calcolare il tempo e poi nell'asse X la distanza.

Nell'asse Y (Y_f=0, Y_2=0 e a=-9,8):
$Y_f = Y_2 + V_2.\text{Sin}(30).t_f + ½.a.t_f^2$
$0 = 0 + 8,97.(0,5).t + ½.(-9,8).t^2$
$4,9.t_f^2 = 4,485.t_f$
$t_f = 0,9153$ s

Nell'asse X (X_2=0 e a=0):
$X_f = X_2 + V_2.\text{Cos}(30).t_f + ½.a.t_f^2$
$X_f = 0 + 8,97.\text{Cos}(30).\ 0,9153$
$X_f = 7,11$ m

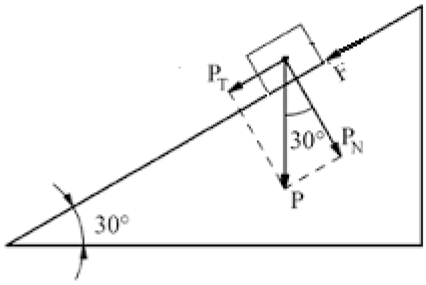
4. (**Esame Luglio 2007**) Un blocco, assimilabile a un corpo puntiforme di massa m = 4 kg è posto in quiete alla base di un piano inclinato scabro, formante un angolo α = 30° con il piano orizzontale. All'istante t = 0 il blocco viene lanciato lungo il piano inclinato con velocità iniziale di modulo V_0 = 6 m/s. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il blocco e il piano inclinato vale 0.5, calcolare con riferimento allo spostamento del blocco tra la posizione iniziale e quella di arresto:
   a) il lavoro complessivo fatto dalle forze agenti sul blocco
   b) il lavoro fatto dalla sola forza di attrito agente sul blocco



Soluzione:

Sia il punto A il punto di partenza all'istante $t_A = 0$, $V_A = V_o$
Sia il punto B il punto di arresto all'istante t_B, $V_B = 0$
Si tratta di un sistema non conservativo, quindi:
$\Delta E_k = W_{AB}$
$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$
$½.m.V_B^2 - ½.m.V_A^2 = \Sigma \mathbf{F}.\mathbf{S}$

Calcoliamo la sommatoria di forze paralelle al piano inclinato:



$\Sigma\mathbf{F} = -\mathbf{P_T} - \mathbf{F} = -\mathbf{P_T} - \mu_d.\mathbf{P_N}$

$\Sigma\mathbf{F} = -m.\mathbf{g}.\sin(30) - \mu_d.m.\mathbf{g}.\cos(30)$

$\Sigma\mathbf{F} = -(4).(9,8).0,5 - 0,5.(4).(9,8).0,866$

$\Sigma\mathbf{F} = -36,57$ N

Calcoliamo W_{AB} (Prodotto scalare tra il vettore forza ed spostamento:

$W_{AB} = \Sigma\mathbf{F} . \mathbf{S} = |\Sigma\mathbf{F}| . |\mathbf{S}| . \cos(180) = -36,57.|\mathbf{S}|$

ma: $W_{AB} = ½.m.V_B^2 - ½.m.V_A^2$

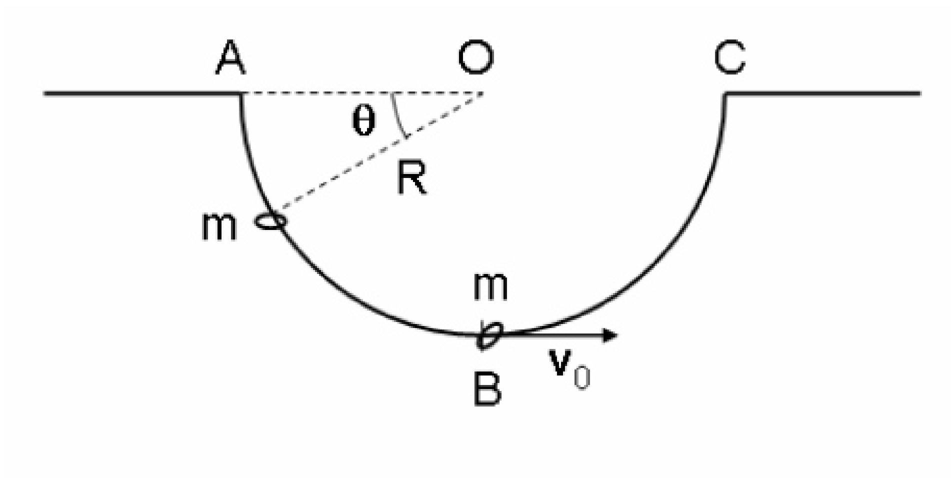
$-36,57.|\mathbf{S}| = ½ . (4) . (V_B^2 - V_A^2) = - ½ . (4) . (6)^2$

$|\mathbf{S}| = 1,97$ m

Quindi

a) $W_{AB} = -36,57. 1,97 = - 72$ J (Energia dissipata)
b) $W_{at} = [\mu_d.m.\mathbf{g}.\cos(30)].[S].\cos(180)$
   $W_{at} =- [0,5.(4).(9,8).0,866].[1,97] = -33,44$ J

5. (**Esame Settembre 2007**) Un anello, assimilabile a un corpo puntiforme di massa m = 0.2 kg, scivola lungo una guida circolare scabra di raggio R = 0.5 m, disposta nel piano verticale, partendo da fermo dal punto A alla sommità della guida e arrivando al punto B al fondo di essa con velocità V_o = 2.8 m/s.
   Calcolare:
   a) il lavoro della forza peso tra i punti A e B
   b) il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_d della guida
   c) il lavoro della forza di attrito tra gli stessi punti A e B



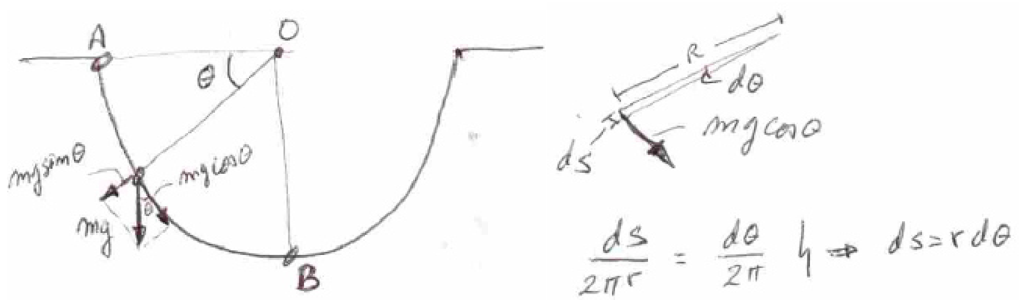
Soluzione:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$$

Il lavoro lungo una curva γ è definito come l'integrale di linea di seconda specie della forma differenziale dL:

$$L = \int_\gamma dL = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

a) Nel nostro caso, il lavoro della forza peso viene eseguito solo dalla sua componente tangenziale (cioè quella parallela al movimento dell'anello, quella perpendicolare non produce lavoro perche cos(90) = 0), quindi:



L = ∫[**F**.**ds**] = ∫[m.g.cos(θ).ds.cos(0)] = ∫[m.g.cos(θ).R.dθ]

Quindi:

L = m.g.R ∫[cos(θ).dθ]

L_{AB} = m.g.R [sin(π/2) – sin(0)] = m.g.R

$L_{AB} = (0,2).(9,8).(0,5) = 0,98$ J

b) Il lavoro della forza attrito sarà:

$F_{at} = -\mu_d.m.g.\sin(\theta)$

$L_{at} = \int [\mu_d.m.g.\sin(\theta).\cos(180).R.d\theta]$

$L_{at} = \mu_d.m.g.R \int [\sin(\theta).d\theta]$

$L_{at} = \mu_d.m.g.R [-\cos(\pi/2) - -\sin(0)]$

$L_{at} = -\mu_d.m.g.R$ (Energia dissipata)

La differenza di energia cinetica si converte in lavoro:

$½ m.V_B^2 - ½ m.V_A^2 = L_{AB} + L_{at}$

$½ m. (V_B^2 - V_A^2) = m.g.R - \mu_d.m.g.R$

$V_A = 0$

$V_B = V_o = 2,8$

Quindi:

$\mu_d = 1 - (½ m.V_B^2 / m.g.R) = 1 - (½ V_B^2 / g.R)$

$\mu_d = 1 - (½ (2,8)^2 / 9,8.0,5) = 1 - 0,8 = 0,2$

c) $L_{at} = -\mu_d.m.g.R$

$L_{at} = -0,2.(0,2).(9,8).(0,5) = -0,196$ J