Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 3

17 ottobre 2012

1. Sia G un gruppo con centro $Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba$ per ogni $b \in G\}$.
   (a) Si dimostri: se il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.
   (b) Sia G un gruppo finito. Si dimostri che l'indice $[G : Z(G)]$ non può essere un numero primo.

(6 punti)

2. (a) Si verifichi che il sottoinsieme $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottoanello del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
   (b) Si verifichi che il sottoinsieme $I = \{a + b\sqrt{3} | a + 5b$ è multiplo di $11\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$
   (c) Si verifichi che la funzione $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $\varphi(a + b\sqrt{3}) \mapsto \overline{a + 5b}$, è un omomorfismo d'anelli e si deduca che I è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

(8 punti)

3. (a) Si decida se $\overline{25}$ e $\overline{20}$ sono elementi invertibili o divisori di zero in $\mathbb{Z}/144\,\mathbb{Z}$ e si calcoli eventualmente il loro elemento inverso.
   (b) Si calcoli $\overline{11}^{\,49}$ in $\mathbb{Z}/144\,\mathbb{Z}$.
   (c) Si calcoli l'ordine di ogni elemento nel gruppo moltiplicativo $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \cdot\,)$ composto dagli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
   (d) Si dimostri che $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \cdot\,)$ è un gruppo ciclico

(*10 punti*)

4. Sia R un anello commutativo e sia $N = \{x \in R | x^n = 0$ per qualche intero $n\}$
   (a) Dimostrare che N è un ideale di R.
   (b) Se in $\overline{R} = R/N$ si ha $\overline{x}^m = 0$ per un certo m, allora $\overline{x} = 0$.

(6 punti)

5. Sia G un gruppo finito. Per ogni $a \in G$ sia $C(a) = \{g \in G \mid g^{-1}ag = a\}$ ($C(a)$ è detto il *centralizzante* di a in G.) Si ricordi che dati a e b in G, a e b sono elementi *coniugati* se esiste $g \in G$ tale che $a = g^{-1}bg$.
   (a) Si provi che $C(a)$ è un sottogruppo di G, per ogni $a \in G$.
   (b) Si consideri l'insieme $O(a) = \{b \in G | b$ è coniugato di $a\}$. Si dimostri che $|O(a)| = |G|/|C(a)|$. ($O(a)$ è detta *classe di coniugio* di a)
   (c) Si deduca che $|G| = |Z(G)| + \Sigma_a |G|/|C(a)|$, dove la somma è estesa agli elementi di G, uno per ogni classe di coniugio.
   (d) Si usi l'equazione al punto (c) per dimostrare che se G è un gruppo e $|G| = p^k$, allora $Z(G) \neq \{e\}$.

(**)

Consegna: giovedì 25 ottobre durante le esercitazioni.