Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 1

Numeri reali - Geometria affine - Funzioni di una variabile reale - Limiti - Derivazione - Studio di funzione

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Venerdì 10 dicembre 2010

---

(1) **Retta reale.** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; dire se sono superiormente/inferiormente limitati; calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i loro punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$; dire di quali loro punti essi sono intorni.

$$A_1 =]-1,1[\cup \{1 + \tfrac{3}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}\,; \qquad A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 - 4n - 1 > 0\} \cap \mathbb{Q}_{\leq 3}\,;$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : \log(|x+1| - 1) \leq 1\} \cup \mathbb{R}_{>2}\,; \qquad A_4 = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg} \tfrac{1}{x+1} = 0\} \cup [\tfrac{1}{2}, 3[.$$

(2) **Geometria affine bi- e tridimensionale.**

(a) Trovare le forme parametrica e cartesiana della retta r passante per $P_{\vec{a}} = (1,0)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (-1,3)$, della retta s passante per $Q_{\vec{b}} = (-1,-1)$ e ortogonale al vettore $\vec{w} = (2,-1)$ e della retta t passante per P e Q. Calcolare le coordinate del punto $R_{\vec{c}} = r \cap s$, e la distanza di R dalla retta t.

(b) Nello spazio cartesiano si disegnino i tre punti $P_{\vec{a}} = (1,0,-2)$, $Q_{\vec{b}} = (-2,-1,1)$ e $R_{\vec{c}} = (3,1,0)$, ed i due vettori $\vec{v} = (-1,3,0)$ e $\vec{w} = (1,1,2)$. Calcolare e disegnare $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Determinare l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ed il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{u} = (0,1,-1)$, $\vec{w}$ e $\vec{a} + \vec{b}$. Trovare le forme parametrica e cartesiana del piano Π passante per P e parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$; del piano Π' passante per Q e ortogonale a $\vec{w}$; del piano Π'' passante per P, Q e R; del piano Π''' passante per Q e R e parallelo a $\vec{u} + 2\vec{w}$; della retta r passante per R e parallela a $2\vec{w} - \vec{v}$; e la distanza di Q da Π. Trovare infine la proiezione del vettore $\vec{v} + \vec{w}$ lungo il vettore $\vec{u}$.

(3) **Funzioni di una variabile reale.**

(a) Dire se $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ è iniettiva e se è suriettiva, e calcolare (eventualmente, restringendo e corestringendo opportunamente dominio e condominio) la funzione inversa. Dire se f è superiormente e/o inferiormente limitata. Calcolare l'antimmagine $f^{-1}(]-2,2])$.

(b) Stesse domande per $g(x) = e^{\frac{x}{x^2-2}}$.

(4) **Limiti e continuità.**

(a) Calcolare i seguenti limiti nei casi $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$. (Facoltativo: discutere $\alpha \in \mathbb{R}$.)

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^\alpha}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to-1^+} e^{\frac{\alpha}{x+1}} \log|x|, \qquad \text{(c)} \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg}(x^\alpha)+\alpha),$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\alpha x}-3x}{|x|^\alpha - 1}, \qquad \text{(e)} \lim_{x\to-1} (x^{2\alpha}-1)\log|x+1|, \qquad \text{(f)} \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1+\cos x},$$

$$\text{(g)} \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{10-x^2}-1}{\sin(\pi(x+\alpha))}, \quad \text{(h)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg}(\alpha x)}{\log 2x}, \quad \text{(i)} \lim_{x\to 0^+} \frac{2+\cos x - 3\sqrt[3]{1+x}+x}{x^\alpha}.$$

(b) Si consideri la funzione $h_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$h_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha x - 1 & (\text{se } x < -1) \\ x^2 - 4 & (\text{se } -1 \le x < 3) \\ \dfrac{x^\beta - 4x}{x^2-6} & (\text{se } x \ge 3) \end{cases}.$$

Si dica:

(i) per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $h_{\alpha,\beta}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$;

(ii) per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to-\infty} h_{\alpha,\beta}(x) = -1$;

(iii) per quali $\beta \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(x) \in \mathbb{R}$.

(5) **Derivazione.**

(a) Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{1-2x}$ e disegnarne il grafico (determinando se possibile anche la parabola asintoto di f a $\pm\infty$.) Dire in quali punti del dominio la retta tangente al grafico ha pendenza -1, e in quali altri la retta tangente al grafico passa per il punto $(2,0)$. Calcolare infine l'equazione cartesiana di tali rette.

(b) Sia $f(x) = \sqrt{|\cos x| - x}$. Dire qual'è il dominio di f, e in quali punti del dominio essa è derivabile; calcolare la derivata in tali punti.

(c) Tra tutti i coni retti a base circolare con assegnata superficie laterale S, determinare il raggio di base di quello avente il volume massimo.

(d) Per quale $\alpha > 0$ l'area della regione di piano racchiusa tra le spezzate $y = \alpha^2(|x|-1)$ e $y = \frac{1}{\alpha}(1-|x|)$ (che, si noti, si incontrano sempre nei punti $(\pm 1, 0)$) è minima?

(e) Studiare gli estremi locali di $f(x) = |x+3| - 4\operatorname{arctg} x$ e $g(x) = \log|2\cos x + 1| + x$.

(f) Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+x+5}$, e determinarne i punti più vicini alla retta $x - 3y + 5 = 0$. Stessa domanda per il tratto del grafico di $g(x) = \cos x$ con $|x| \le \pi$.

(6) **Studio di funzione.** Si studi l'andamento delle seguenti funzioni e se ne tracci il grafico.

$$\text{(a)}\ f(x) = |x-1|e^x, \qquad \text{(b)}\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2-x}{|x|-2}, \qquad \text{(c)}\ f(x) = \sin 2x - 2\cos x,$$

$$\text{(d)}\ f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} - 1, \qquad \text{(e)}\ f(x) = \log(\sqrt{|x+2|} - x) + 1, \qquad \text{(f)}\ f(x) = \sqrt{\frac{x^3-x^2}{x-2}}.$$

Risultati.

(1) • A_1 è limitato; max $= 4$, inf $= -1$; accumulazioni sono i punti di $[-1, 1]$; è intorno dei punti di $]-1, 1[$.
• $A_2 = \mathbb{Z}_{\leq -1}$, dunque è superiormente limitato; max $= -1$; accumulazione è $-\infty$; è intorno di nessun punto.
• $A_3 = \mathbb{R}_{\geq -e-2}$, dunque è inferiormente limitato; min $= -e-2$; accumulazioni sono tutti i suoi punti e $+\infty$; è intorno di $+\infty$ e di tutti i suoi punti tranne $-e-2$.
• A_4 è limitato; sup $= 3$, min $= -1-\frac{1}{\pi}$; accumulazioni sono -1 e i punti di $[\frac{1}{2}, 3]$; è intorno dei punti di $]\frac{1}{2}, 3[$.

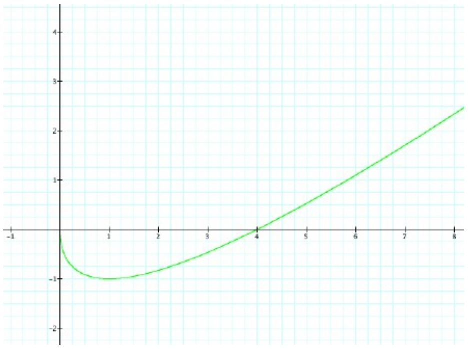
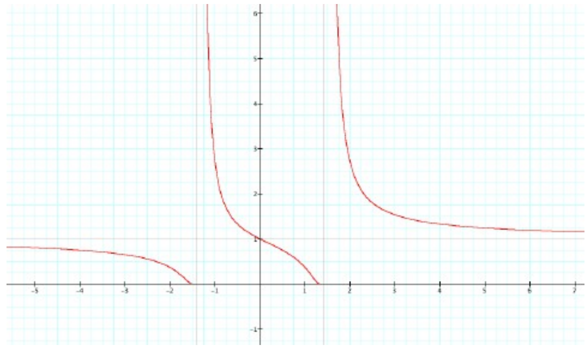
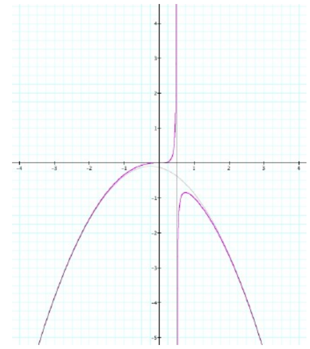
(2) • $r = \{(1-\alpha, 3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : 3x+y-3 = 0\}$; $s = \{(-1+\alpha, -1+2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : 2x-y+1 = 0\}$; $t = \{(1+2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x-2y-1 = 0\}$; $R(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$; $\text{dist}_t(R) = \frac{21}{25}\sqrt{5}$.
• $\vec{v} \wedge \vec{w} = 2(3, 1, -2)$; area $2\sqrt{14}$, volume 1; $\Pi = \{(1-\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, -2+2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 3x+y-2z-7 = 0\}$; $\Pi' = \{(-2+\alpha+2\beta, -1-\alpha, 1-\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x+y+2z+1 = 0\}$; $\Pi'' = \{(1+3\alpha+2\beta, \alpha+\beta, -2-3\alpha+2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 5x-12y+z-3 = 0\}$; $\Pi''' = \{(-2+2\alpha+5\beta, -1+3\alpha+2\beta, 1+3\alpha-\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 9x-17y+11z-10 = 0\}$; $r = \{(3+3\alpha, 1-\alpha, 4\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x+3y-6 = 0,\ 4y+z-4 = 0\}$; $\text{dist}_\Pi(Q) = \frac{8}{7}\sqrt{14}$; $p_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}$.

(3) I risultati si comprendono meglio osservando le Figure 1 e 2.
• Il dominio di f è $A = [0, +\infty[$. Preso $y \in \mathbb{R}$, la fibra $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$ è vuota se $y < -1$, è formata dal solo punto $\{x = 1\}$ se $y = -1$, dai due punti distinti $\{x_1 = (1-\sqrt{y+1})^2, x_2 = (1+\sqrt{y+1})^2\}$ se $-1 < y \leq 0$ e dal solo punto $\{x = (1+\sqrt{y+1})^2\}$ se $y > 0$: dunque f non è né iniettiva né suriettiva, ed ha immagine $B = f(A) = [-1, +\infty[$. Ad esempio, restringendo il dominio di f a $A' = [1, +\infty[$ ed il codominio a B, la funzione $f : A' \to B$ diventa biiettiva, con inversa $f^{-1} : B \to A'$ data da $x = f^{-1}(y) = (1+\sqrt{y+1})^2$. La funzione è inferiormente limitata con minimo -1. Vale $f^{-1}(]-2, 2]) = [0, 2(2+\sqrt{3})]$.
• Il dominio di g è $A = \mathbb{R} \setminus \{\mp\sqrt{2}\}$. Preso $y \in \mathbb{R}$, la fibra $g^{-1}(y) = \{x \in A : g(x) = y\}$ è vuota se $y \leq 0$, è formata dal solo punto $\{0\}$ se $y = 1$, e dai due punti distinti $\{x_1 = \frac{1-\sqrt{1+8\log^2 y}}{2\log y}, x_2 = \frac{1+\sqrt{1+8\log^2 y}}{2\log y}\}$ se $y > 0$ con $y \neq 1$: dunque g non è né iniettiva né suriettiva, ed ha immagine $B = f(A) =]0, +\infty[$. Se $y > 1$ si ha $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$; poiché ad esempio per $y = e$ si ottiene $x_2 = 2$ e per $y = e^2$ si ottiene $x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \sim 1{,}7 < 2$, restringendo il dominio di g a $A' = [\frac{1+\sqrt{33}}{4}, 2]$ e il codominio a $B' = [e, e^2]$, la funzione $g : A' \to B'$ diventa biiettiva con inversa $g^{-1} : B' \to A'$ data da $x = g^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{1+8\log^2 y}}{2\log y}$. Anche g è inferiormente limitata con estremo inferiore (non minimo) 0. Vale $g^{-1}(]-2, 2]) = [-\infty, -\sqrt{2}[\cup [\frac{1-\sqrt{1+8\log^2 2}}{2\log 2}, \sqrt{2}[\cup [\frac{1+\sqrt{1+8\log^2 2}}{2\log 2}, +\infty[$.

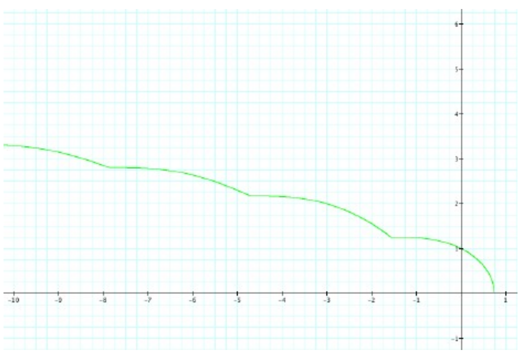
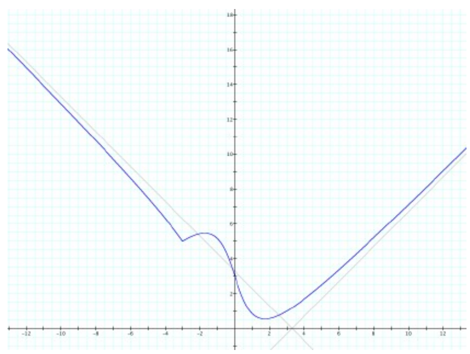
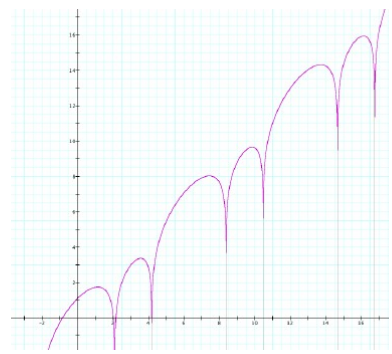
(4) Ecco le risposte già nel caso di α qualsiasi, che comprendono in particolare i casi $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.
• (a) Per $\alpha < \frac{1}{2}$ il limite vale -3. Per $\alpha = \frac{1}{2}$ vale $-\frac{3}{2}$. Per $\alpha > \frac{1}{2}$ vale 0^-.
• (b) Per $\alpha \leq 0$ il limite vale 0^-. Per $\alpha > 0$ vale $-\infty$.
• (c) Per $\alpha < 0$ il limite vale $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Per $\alpha = 0$ vale $\frac{\pi}{4}$. Per $\alpha > 0$ vale α.
• (d) Per $\alpha < 1$ il limite vale $+\infty$. Per $\alpha = 1$ vale 3. Per $\alpha > 1$ vale 0^+.
• (e) Per $\alpha < 0$ il $\lim_{x \to -1^\mp}$ vale $0^\pm$. Per $\alpha = 0$ la funzione è nulla. Per $\alpha > 0$ il $\lim_{x \to -1^\mp}$ vale $0^\mp$.
• (f) Per $\alpha \notin \mathbb{Z}$ il limite vale $+\infty$. Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ vale $2\alpha^2$.
• (g) Per $\alpha \notin \mathbb{Z}$ il limite vale 0. Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ vale $(-1)^\alpha \frac{3}{\pi}$.
• (h) La funzione esiste solo per $\alpha \neq 0$, e il limite vale $-(\text{sign}\,\alpha)\infty$.
• (i) Per $\alpha < 2$ il limite vale 0^-. Per $\alpha = 2$ vale $-\frac{1}{6}$. Per $\alpha > 2$ vale $-\infty$.

(5) • (a) (Vedi Figura 3) La parabola asintotica è $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$. Pendenza -1 solo in $c = 1$, e passante per il punto $(2, 0)$ in $c = 0$, $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$. Le tangenti si calcolano con la formula $y - f(c) = f'(c)(x-c)$.
• (b) (Vedi Figura 4) Il confronto grafico dice che esiste un solo $c \in]0, 1[$ tale che $|\cos c| = c$, e il dominio è $]-\infty, c]$; la funzione è ivi continua, e derivabile ovunque tranne che in c e in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$. La derivata è $\frac{-(\text{sign}\,\cos x)\sin x - 1}{2\sqrt{|\cos x| - x}}$: si noti che è sempre ≤ 0, dunque f è sempre decrescente.
• (c) Il raggio di base per cui il volume è massimo è $\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.
• (d) L'area è minima per $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
• (e) (Vedi Figure 5 e 6) $f(x)$ ha due punti di minimo locale in $x = -3$ (singolare, perché angoloso) e $x = \sqrt{3}$, e un punto di massimo locale in $x = -\sqrt{3}$. $g(x)$ ha infiniti punti di massimo locale nei punti $x = -\arccos(\frac{-1-\sqrt{7}}{4}) + 2k\pi$ e $x = \arccos(\frac{-1+\sqrt{7}}{4}) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
• (f) (Vedi Figura 7) Il punto di minima distanza del grafico di $f(x)$ è quello con $x = \frac{-4+\sqrt{38}}{8} \sim 0{,}27$. Il punto di minima distanza del grafico di $g(x)$ con $|x| \leq \pi$ è quello con $x = -\arcsin\frac{1}{3} \sim -0{,}34$.

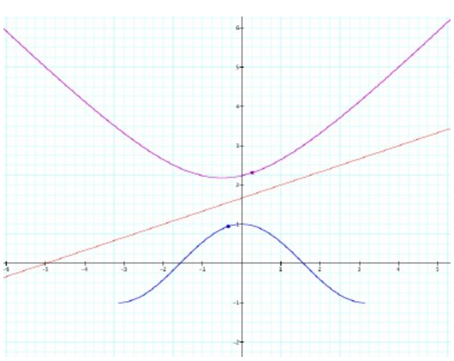
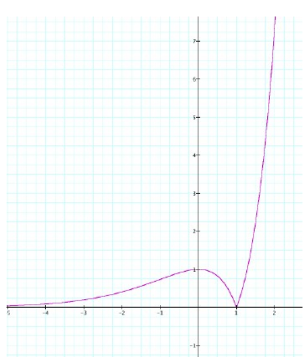
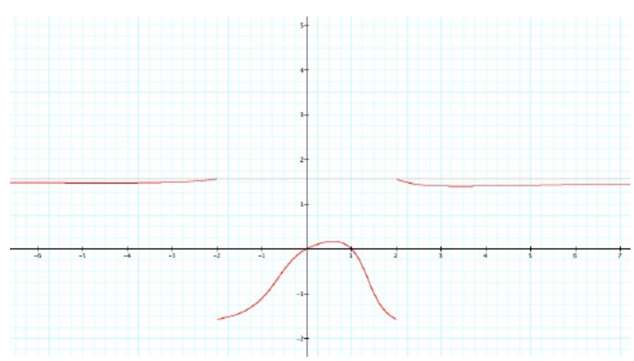
(6) I grafici delle sei funzioni proposte sono riportati nelle Figure 8-9-10-11-12-13.

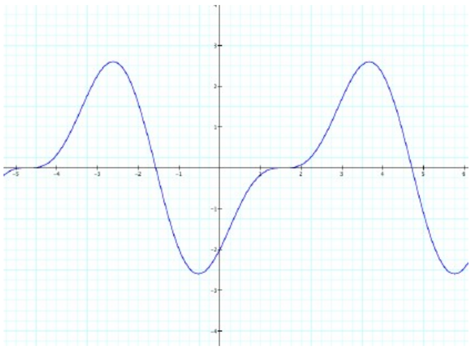
(1) Grafico di $x - 2\sqrt{x}$; **(2)** Grafico di $e^{\frac{x}{x^2-2}}$; **(3)** Grafico di $\frac{x^3}{1-2x}$.

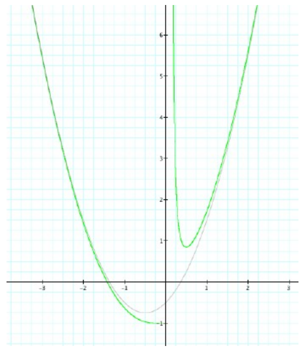




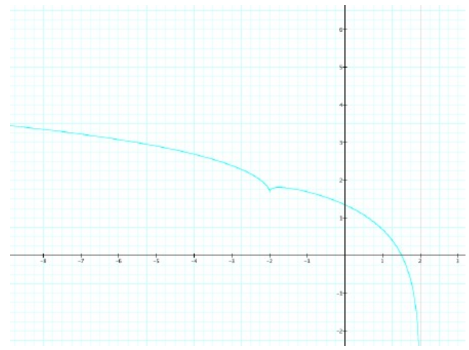
(4) Grafico di $\sqrt{|\cos x| - x}$; **(5)** Grafico di $|x+3| - 4\,\mathrm{arctg}\, x$; **(6)** Grafico di $\log|2\cos x + 1| + x$.

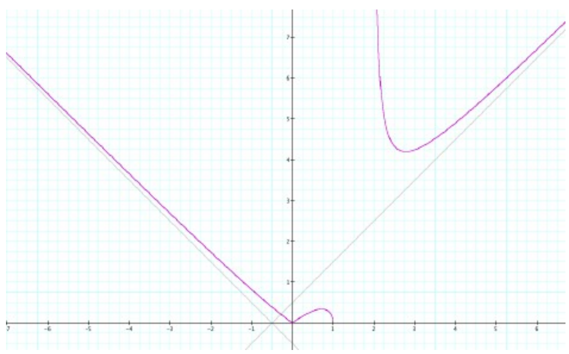
(7) Grafici di $\sqrt{x^2+x+5}$ e $\cos x$ (con $|x| \leq \pi$), e punti di minima distanza dalla retta $x - 3y + 5 = 0$; **(8)** Grafico di $|x-1|e^x$; **(9)** Grafico di $\mathrm{arctg}\, \frac{x^2-x}{|x|-2}$.







(10) Grafico di $\sin 2x - 2\cos x$; **(11)** Grafico di $x^2 e^{\frac{1}{x}} - 1$; **(12)** Grafico di $\log(\sqrt{|x+2|} - x) + 1$.



(13) Grafico di $\sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x-2}}$.