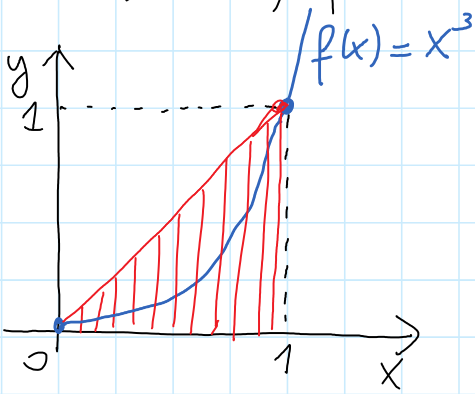
ESERCIZIO

(i) Calcoliamo, con trapezi, $\int_0^1 x^3\,dx$.

È $a=0$, $b=1$, $f(x)=x^3$ che ha grafico



$$I=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}$$

$$I_T=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$$ (area triangolo rosso).

c'è l'errore $E_T=I-I_T=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=$
$=-1/4$.

Calcoliamo il valore di ξ che realizza la formula dell'errore:

$$E_T=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$ con ξ punto opportuno di $(0,1)$.

È
$$f(x)=x^3\;;\quad f'(x)=3x^2\;;\quad f''(x)=6x$$

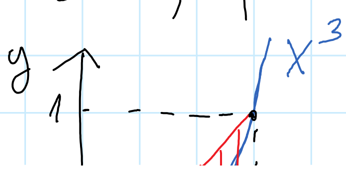
Perciò, abbiamo

$$-\frac{1}{4}=-\frac{(1-0)^3}{\cancel{12}_2}\cdot\cancel{6}\,\xi \iff \frac{1}{4}=\frac{1}{2}\xi \iff \xi=\frac{1}{2}$$

In generale ξ NON si calcola! Non ha senso farlo!

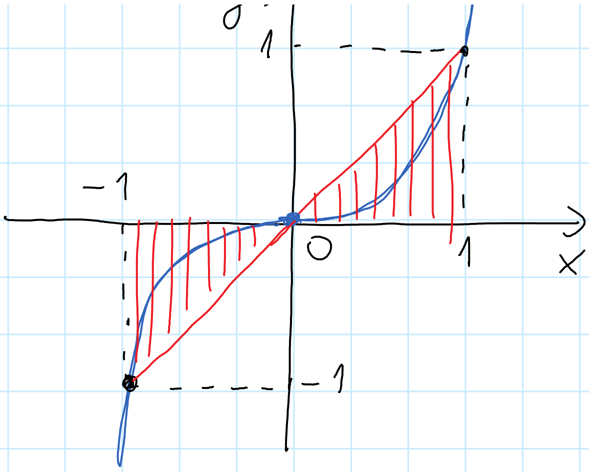
(ii) Ripetere con $\int_{-1}^1 x^3\,dx$.

È $a=-1$, $b=1$, $f(x)=x^3$



x^3 dispari e $[-1,1]$ è simmetrico rispetto a 0.

$$I=\int_{-1}^1 x^3\,dx \overset{\downarrow}{=} 0$$



[...] rispetto a 0.

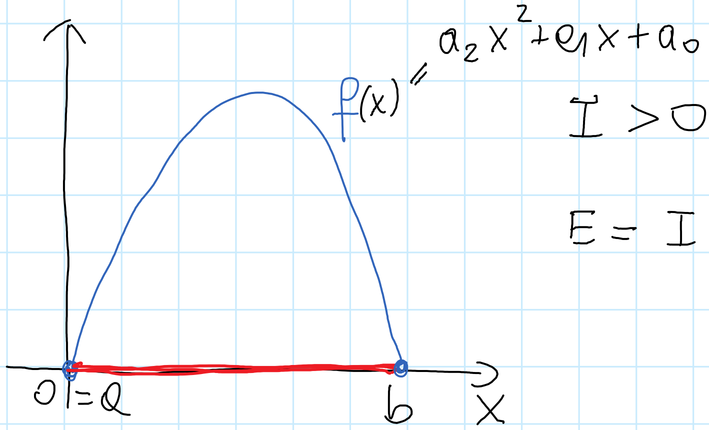
$$I = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

$$I_T = \frac{f(-1)+f(1)}{2}\left(1-(-1)\right) =$$

$$= \frac{-1+1}{2}\cdot 2 = 0$$

Perciò, l'errore $E_T = I - I_T = 0$.

OSSERVAZIONE L'errore per il calcolo di $\int_a^b f(x)\,dx$ col metodo dei trapezi può essere elevato. Ad esempio



$I > 0 \ ; \quad I_T = 0$

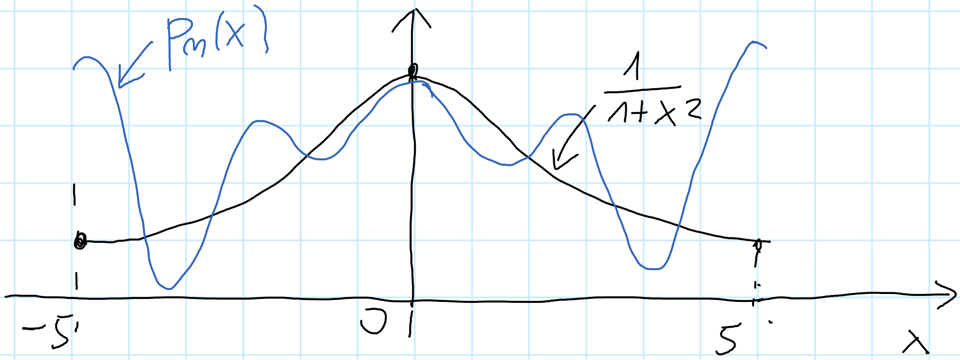
$E = I - I_T = I$

Rimedi

1) Aumento il grado del polinomio che interpola la funzione f. Ad esempio, nel caso di figura con $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ se scelgo un polinomio interpolante di grado due ho che

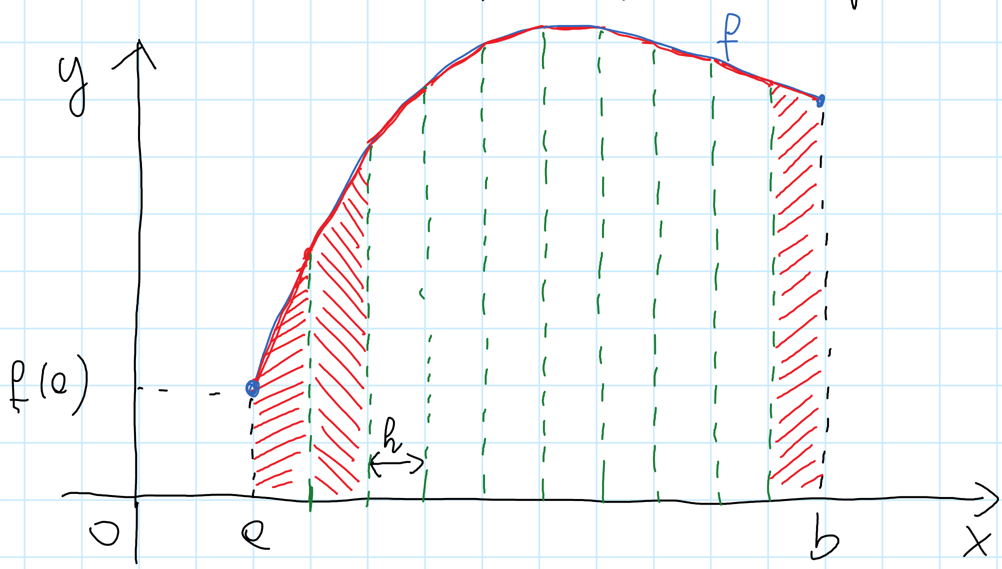
$$\underset{\substack{\text{esatto} \\ \| \\ \int_a^b f(x)\,dx}}{I} = \underset{\substack{\text{approssimazione} \\ \| \\ \int_a^b p_n(x)\,dx}}{I_n}$$

Il problema, al crescere del grado di $p_n(x)$ è la possibile nascita di oscillazioni di $p_n(x)$ vicino ai bordi (cioè, vicino ad "a" e "b").



Quindi, il grado n di $p_n(x)$ non deve essere troppo grande: tipicamente 1, 2, 3 o 4.

2) Vediamo un'altra strada, più pratica e funzionale.



Divido l'intervallo $[a, b]$ in m intervalli, tutti di uguale ampiezza h pari a

$$h = \frac{b-a}{m}$$

e applico, a ciascun intervallo, la formula di integrazione; ho

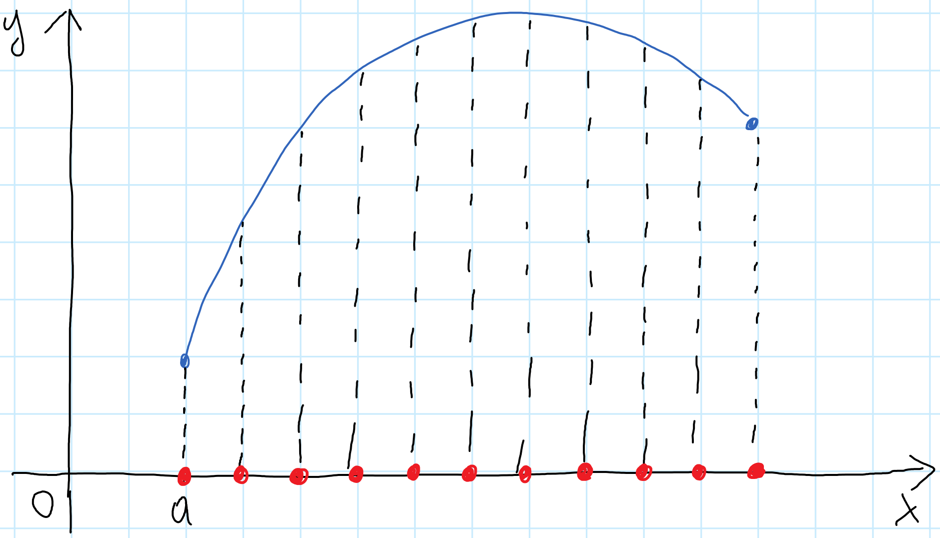
$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{I_i} f(x)\,dx \right) \approx \sum_{i=1}^{m} I_{n,i} = I_m$$

$$I = \int_a f(x)\,dx = \sum_{i=1} \Big(\int_{I_i} f(x)\,dx \Big) \approx \sum_{i=1} \big(I_{n,i} \big) = I_n$$

esatto su I_i $\qquad \approx \qquad$ "numerico" su I_i con una formula di quadratura

FORMULA DEI TRAPEZI COMPOSTA

Si ottiene usando per calcolare $I_{n,i}$ la formula dei trapezi.



$a = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$ (NODI EQUISPAZIATI)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=h} - \frac{\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{=h}{}^3}{12} f''(\xi_i) \Bigg] =$$

$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\big[f(x_{i-1}) + f(x_i) \big] - \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) =$$

$$= \frac{h}{2}\Big[\overbrace{f(x_0) + f(x_1)}^{i=1} + \overbrace{f(x_1) + f(x_2)}^{i=2} + \overbrace{f(x_2) + f(x_3)}^{i=3} + \dots +$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \overbrace{f(x_{m-1}) + f(x_m)}^{i=m} \right] - \frac{h^3}{12} m \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} f''(\xi_i)}{m} =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right] - \frac{h^3}{12} m \cdot f''(\xi) =$$

per un opportuno punto $\xi \in (a,b)$ se $f''(x)$ è continua in (a,b).

$$= I_{T,C}^{(m)} + E_{T,C}^{(m)}$$

dove

$$\boxed{I_{T,C}^{(m)} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right]}$$

FORMULA DEI TRAPEZI COMPOSTA

$$E_{T,C}^{(m)} = -\frac{h^3}{12} m\, f''(\xi) = -\frac{\left(\frac{b-a}{m}\right)^3}{12} m\, f''(\xi) =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12\, m^2} f''(\xi)$$

ERRORE NELLA FORMULA DEI TRAPEZI COMPOSTA

Notiamo che la formula dell'errore dipende da $1/m^2$: al crescere di m cala l'errore!

Posto

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

abbiamo l'interessante maggiorazione per l'errore $\left|E_{T,c}^{(m)}\right|$ data da

$$\left|E_{T,c}^{(m)}\right| = \left| -\frac{(b-a)^3}{12\,m^2} f''(\xi)\right| = \frac{(b-a)^3}{12\,m^2}\left|f''(\xi)\right| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{12\,m^2} M_2 .$$

Usando questa relazione posso controllare $\left|E_{T,c}^{(m)}\right|$; ad esempio, se voglio

$$\left|E_{T,c}^{(m)}\right| < \epsilon$$

ho che basta imporre

$$\frac{(b-a)^3}{12\,m^2} M_2 < \epsilon \implies m^2 > \frac{(b-a)^3 M_2}{12\,\epsilon}$$

da cui ottengo il numero di intervalli m.

ESEMPIO Calcolare il numero di suddivisioni necessarie per garantire il calcolo di

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

con un errore inferiore a 10^{-3}.

Deve essere

$$\left|E_{T,c}^{(m)}\right| < 10^{-3} \iff \left| -\frac{(1-0)^3}{12\,m^2} f''(\xi)\right| < 10^{-3}$$

È poi $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(\xi) = 6\xi$

Allora, detta $M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = \max_{x\in[0,1]} |6x| = 6$,

impongo che sia

$$\left| \frac{1}{12m^2} f''(\xi) \right| \overset{(*)}{\leq} \boxed{\frac{M_2}{12m^2} \overset{\text{impongo}}{<} 10^{-3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{12}_{2} m^2} < 10^{-3} \Rightarrow m^2 > \frac{10^3}{2} = 500$$

$$\Rightarrow m \geq 23.$$

Servono almeno 23 intervalli! Notare che, in virtù della maggiorazione (*), potrebbero servire meno di 23 intervalli.

OSSERVAZIONE Vediamo come si comporta l'errore passando da m a $2m$ suddivisioni.

$$E_{T,c}^{(m)} = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi)$$

$$E_{T,c}^{(2m)} = -\frac{(b-a)^3}{12\cdot(2m)^2} \cdot f''(\tilde{\xi})$$

Perciò ho

$$\frac{E_{T,c}^{(m)}}{E_{T,c}^{(2m)}} = \frac{-\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi)}{-\frac{(b-a)^3}{12\cdot 4\cdot m^2} \cdot f''(\tilde{\xi})} = 4 \cdot \frac{f''(\xi)}{f''(\tilde{\xi})}$$

Se $f''(x)$ "varia di poco" in $[a,b]$, allora $f''(\xi) \simeq f''(\tilde{\xi})$ per cui risulta

$$\boxed{\frac{E_{T,C}^{(n)}}{E_{T,C}^{(2n)}} \simeq 4}$$

Raddoppiando il numero di intervalli l'errore diventa (all'incirca) un quarto del precedente!