Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 13
Facoltativo

Gli esercizi seguenti sono dedicati alle formule risolutive per un'equazione di quarto grado $x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4 = 0$ su un campo F di caratteristica diversa da 2 e 3.

1. Si verifichi che, tramite un opportuno cambio di variabile, ci si riconduce all'equazione $f(y) = y^4 + py^2 + qy + r = 0$, con radici $y_1, y_, y_3, y_4$ tali che $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

2. Si consideri l'equazione $g(z) = z^3 - pz^2 + 4rz + 4pr - q^2 = 0$ (detta *risolvente cubica di* f). Si verifichi che le sue radici z_1, z_2, z_3 soddisfano le relazioni $z_1 = y_1y_2 + y_3y_4$, $z_2 = y_1y_3 + y_2y_4$, $z_3 = y_1y_4 + y_2y_3$.

3. Sia $V =< 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) >\leq S_4$. Si verifichi che V è un sottogruppo normale di $S_4 = \mathrm{Gal}(F(y_1, y_2, y_3, y_4)/F)$ e che $Fix_F V = K$, con $K = F(z_1, z_2, z_3)$.

4. Sia $G = \{1, (12)(34)\} \leq V$. Si verifichi che G è un sottogruppo normale di V e che $Fix_K G = F(y_1y_2, y_3y_4)$.

5. Si trovi il grado dell'estensione $[F(y_1, y_2, y_3, y_4) : F(y_1y_2, y_3y_4)]$ e $[F(y_1y_2, y_3y_4) : K]$.

6. Si verifichi che $(x - y_1y_2)(x - y_3y_4) = x^2 - z_1x + r$ e $(x - (y_1 + y_2))(x - (y_3 + y_4)) = x^2 + z_3z_4$.

7. Si trovino formule per y_1, y_2, y_3 e y_4 in termini di z_1, z_2 e z_3 e di radici quadrate di elementi di K.

8. Ricordando le formule risolutive per le equazioni di terzo grado (vedi Foglio 12), si trovino gli zeri del polinomio $x^4 - 2x^3 - 8x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.