Università di Verona
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica Applicata

Soluzioni degli appelli di Analisi Matematica 2

Antonio Marigonda

Anni 2009-2017

Soluzioni delle prove scritte di Analisi Matematica 2
per il Corso di Laurea in Matematica Applicata

Antonio Marigonda

Dipartimento di Informatica - Università degli Studi di Verona

Strada Le Grazie 15 - I-37134 Verona, Italy

E-mail: `antonio.marigonda@univr.it`

Indice

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/2009

Prova scritta v.o. mod. av. di Analisi Matematica 2

Verona, 31 marzo 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, y) = \left(\sqrt{y^2+1}\cos\theta, y, \sqrt{y^2+1}\sin\theta\right), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ |y| < 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y/2, x)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$, centrata in $(0, 1, 0)$ e appartenente al piano $y = 1$ parametrizzata da
$$\gamma(\theta) = \left(\sqrt{2}\cos\theta, 1, \sqrt{2}\sin\theta\right), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1, 0, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 113.

Esercizio 2. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione del telegrafo sul segmento $[0, \pi]$, con ambedue le estremità libere:

$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0, \qquad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0,$$

assumendo come dati iniziali $u(x, 0) = 0$ e $u_t(x, 0) = x$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 114.

Esercizio 3. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} - 4x - 2y &= 4e^{5t}, \\ \dot{y} - 3x + y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Soluzione a pagina 116.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/2009

Prova scritta v.o. mod. av. di Analisi Matematica 2

Verona, 1 luglio 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ è assegnata la superficie Σ parametrizzata dalla funzione

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

definita da

$$\varphi(\theta, s) = ((s^2 + 1)\cos\theta, (s + 2)\sin\theta, s^3).$$

Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^4 + y, 5x + z, z^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$.
(2) Si calcoli la circuitazione di F lungo la curva di equazioni parametriche

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, 2\sin\theta, 0), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ e si calcoli l'elemento d'area di Σ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(0, 3, 1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\mathrm{rot}(\vec{F})$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione φ.

Soluzione a pagina 117.

Esercizio 5. Si determini col metodo di separazione di variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione di reazione-diffusione-trasporto sul segmento $[0, \pi]$:

$$u_t - u_{xx} - 2u_x - u = 0, \qquad x \in [0, \pi],\ t > 0,$$

con dati al contorno di Dirichlet omogenei $u(0, t) = u(\pi, t) = 0\ \forall\, t > 0$, assumendo come dato iniziale $u(x, 0) = x(\pi - x)e^{-x}$ per $0 \le x \le \pi$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 118.

Esercizio 6. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} - 3x + 2y = 3e^t, \\ \dot{y} - 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Soluzione a pagina 120.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/2009

Prova scritta v.o. mod. av. di Analisi Matematica 2

Verona, 15 luglio 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata dalla funzione

$$\varphi : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3 \text{ definita da } \varphi(u,v) = (ve^u, u^2, -v),$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^4z^2, z\cos y, x^2 + y^2).$$

(1) si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$
(2) si scriva la matrice Jacobiana di φ e si calcoli l'elemento d'area di Σ.
(3) si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo il bordo γ di Σ con l'orientamento su esso indotto dall'orientamento di Σ
(4) si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1/2, 0, -1/2)$.
(5) si calcoli il flusso di

$$\vec{H}(x,y,z) = (xz, yz^2, 0)$$

attraverso Σ con l'orientamento dato dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 121.

Esercizio 8. Si determini col metodo di separazione di variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione del calore sul segmento $[0,\pi]$, con estremità termicamente isolate:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0, & 0 \le x \le \pi\,,\ t > 0\,, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

assumendo come dato iniziale $u(x,0) = 2x$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 123.

Esercizio 9. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' + 2x - 3y &= 3t^2, \\ \\ y' + 4x - 6y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Soluzione a pagina 124.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/2009

Prova scritta v.o. mod. av. di Analisi Matematica 2

Verona, 7 settembre 2009

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 10. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, x) = (x, e^{x^2-1}\cos\theta, e^{x^2-1}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,\ |x| < 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x^2}{y^2 + z^2 + 1}, y^2 + z^2, x(y^2 + z^2)\right)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio e, centrata in $(1, 0, 0)$ e appartenente al piano $x = 1$ parametrizzata da $\gamma(\theta) = (1, e\cos\theta, e\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1, 0, 1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 125.

Esercizio 11. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -u_t + 2u_{xx} + 3u_x + u = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0, \pi[, \\ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ \\ u(x, 0) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(\dfrac{\pi}{2} - \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|\right), \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 126.

Esercizio 12. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} + 2x + 3y &= 3e^{-2t}, \\ \dot{y} + 5x + y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Soluzione a pagina 127.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/2009

Prova scritta v.o. mod. av. di Analisi Matematica 2

Verona, 22 settembre 2009

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 13. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^4), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ 0 \le r \le 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (3y^2 + 2z, 1 - 8x^3, 2x - 6y^2)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva Γ appartenente al piano $z = 1$ parametrizzata da $\gamma(\theta) = (5\cos\theta, 2\sin\theta, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1/2, 0, 15/16)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Suggerimento: si ricordi che $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = 3\pi/4$.

Soluzione a pagina 128.

Esercizio 14. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} -u_{tt} + 3u_{xx} = 0 \text{ in }]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x. \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 131.

Esercizio 15. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} 8\dot{x} + 14x - 9y &= 8\sin(2t), \\ 4\dot{y} - 6x + 13y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Soluzione a pagina 132.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 10 dicembre 2009

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 16. Si consideri l'insieme:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2\},$$

detto *Chiocciola di Pascal*.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che la curva interseca gli assi in cinque punti, di cui uno è l'origine. Si determinino gli altri quattro punti $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, e si scrivano le equazioni delle tangenti a Γ in essi.
(3) Per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi_i(x)$ di classe C^1 in un intorno di x_i con $\varphi_i(x_i) = y_i$.
(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ vincolati a Γ. Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 133.

Esercizio 17. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e indicata con D la regione illimitata del primo quadrante compresa tra l'iperbole di equazione $xy = 1$, la retta $y = x$ e l'asse delle x, si calcoli

$$\iint_D \frac{1}{x^\alpha}\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 141.

Esercizio 18. Si consideri la serie di funzioni definite per $(t, x) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}} e^{-4t} \cos(nx).$$

(1) Si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie.
(2) Si calcoli la somma della serie per $(t, x) = (0, 0)$.

Soluzione a pagina 142.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 19. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^2+1)\cos\theta, r^3+r^2, (r^2+1)\sin\theta), \qquad (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z^2, 4x^2-3z, 6x^2+y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione
$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione a pagina 142.

Esercizio 20. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 - y}{x}.$$

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;
d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

Soluzione a pagina 146.

Esercizio 21. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[, \\ u(0,x) = x(\pi - x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 146.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 22. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 4x^2 + 8xy - y^6 + 4y^2 = 0\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in cinque punti di cui uno è l'origine. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti di $\Gamma \cap \{xy = 0\}$ diversi dall'origine. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 148.

Esercizio 23. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2,\ x/4 < y^2 < x\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli l'area di Ω.

Soluzione a pagina 149.

Esercizio 24. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^2+1)\cos\theta, r^3 + r^2, (r^2+1)\sin\theta), \qquad (r,\theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y + z^2, 4x^2 - 3z, 6x^2 + y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione
$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione a pagina 150.

Esercizio 25. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 - y}{x}.$$

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;

d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

Soluzione a pagina 150.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello v.o. di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 26. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^2+1)\cos\theta, r^3+r^2, (r^2+1)\sin\theta), \qquad (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z^2, 4x^2-3z, 6x^2+y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione
$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione a pagina 150.

Esercizio 27. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\,, \\ u(0,x) = x(\pi - x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 150.

Esercizio 28. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} - 3x + 2y = e^{4t}, \\ \dot{y} + 6x - y = 0. \end{cases}$$

Si discuta la stabilità delle soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato.

Soluzione a pagina 150.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 18 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 29. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : -\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane, e si determini $\overline{\Gamma}$, dove $\overline{\Gamma}$ è la chiusura di Γ in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si dica se Γ è compatto. Si dica se $\overline{\Gamma}$ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca l'insieme C definito da $C = \{(x,y) : x^2 = y^2\}$ in due punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti di $\Gamma \cap C$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ vincolati a $\overline{\Gamma}$.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 152.

Esercizio 30. Si calcoli il volume del solido:

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x < 2,\ 0 < z < \frac{x}{x^2+y^2},\ x^2 < y < 2x^2\right\}.$$

Soluzione a pagina 153.

Esercizio 31. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = (u^2 - 3uv + 1, v^3u + u, u^2 + v^2), \qquad (u,v) \in [-1,1] \times [-1,1],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (6y, 6x - 4yz^2 + 5z^2, 10yz - 4y^2z).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (t \sin t + 1, t/2\pi, 5 \arctan(t^3 + 2t) \sin^2 t).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli la normale indotta dalla parametrizzazione nel punto $P\left(1, \frac{3}{1600} + \frac{3}{2\sqrt{10}}, \frac{1}{4}\right)$ (non è richiesta la normalizzazione).
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{G}(x,y,z) := (6y, 1, 1)$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 154.

Esercizio 32. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali con condizioni al contorno di Neumann:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) + 4u(t,x) = 0 \ \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\,, \\ u(0,x) = \left|\frac{\pi}{2} - x\right| , \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 156.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 16 giugno 2010

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 33. Si consideri l'insieme
$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : -\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + x^2 + y^2 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane. Si determini $\bar{\Gamma}$, chiusura di Γ in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in due punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle due intersezioni e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $x = \varphi(y)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = \arctan \log(x^2 + y^2 + 1)$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto, si dica se $\bar{\Gamma}$ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 157.

Esercizio 34. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 2,\ 0 < x-y < 2\pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \cos^2(x+y)\sin(3(x-y))\,dx\,dy$.

Soluzione a pagina 158.

Esercizio 35. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:
$$\varphi(u,v) = (u, v, 1 - u^2 - v^4), \qquad \text{con } u, v \in \mathbb{R},\ u^2 + v^4 \leq 1,$$
e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:
$$\vec{F}(x,y,z) = (9y^2 + 3z, 8z^2 + x, 6x^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t) := (\cos t, 0, \sin t)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(1/\sqrt{2}, 0, 1/2)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione a pagina 159.

Esercizio 36. Si consideri l'equazione differenziale:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{yx^2 - x}.$$

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 3$.

c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;
d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(1) = 3$.

Soluzione a pagina 160.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 9 luglio 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 37. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - \cos(6xy) - 1 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in quattro punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle intersezioni e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino i massimi della funzione $h(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 1$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 160.

Esercizio 38. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < 2,\ |x-y| < \pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \left(\frac{x+y}{3}\right)^3 \sin^2(x-y)\,dx\,dy$.

Soluzione a pagina 161.

Esercizio 39. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^3 - r^2 + 1)\cos\theta, (r^3 - r^2 + 1)\sin\theta, r), \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi], 0 \le r \le 2,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (2y^2 + 6z, 5z^2 + 4x, 2x^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(1,0,1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione a pagina 161.

Esercizio 40. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ in }]0,\pi[\times]0,+\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 164.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 13 settembre 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 41. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 + x^3y^3 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in quattro punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle intersezioni e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si dica se Γ è compatto.
(4) Si dica se esistono massimi e minimi della funzione

$$h(x,y) = \frac{4 - x^3y^3}{4}\, e^{-(4-x^3y^3)/4}$$

vincolati a Γ, in caso affermativo li si determini.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 165.

Esercizio 42. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < 1, |x-y| < \pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\sin(x-y)}{1+(x+y)^2}\, dx\, dy$.

Soluzione a pagina 166.

Esercizio 43. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \left(\left(v^2+1\right)^2 \sin(u), v^4, \left(v^2+1\right)^2 \cos(u)\right), \qquad \text{con } u \in [0, 2\pi], 0 \le v \le 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x + 4z^2, -x - 6y + 2, y - x^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P\left(\frac{25}{16}, \frac{1}{16}, 0\right)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione a pagina 167.

Esercizio 44. Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}}{x^2 + y^2}.$$

(1) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
(2) Si trovi la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.
(3) Si trovi la soluzione corrispondente al dato iniziale $y(0) = \sqrt[3]{3}$.

Soluzione a pagina 169.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/2010

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 27 settembre 2010

Cognome e nome: ____________________ matr.____________________

Esercizio 45. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(3x^2+y^2\right)^2 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in cinque punti punti, di cui uno è l'origine. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle intersezioni diverse dall'origine e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si dica se Γ è compatto. Si dica se $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ è compatto.
(4) Si dica se esistono massimi e minimi della funzione

$$h(x,y) = \log\arctan(x^2+y^2)$$

vincolati a $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$, in caso affermativo li si determini.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 169.

Esercizio 46. Definiamo $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ |x+y|<1,\ |x-y|<\pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{(x-y)e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\,dx\,dy.$

Soluzione a pagina 170.

Esercizio 47. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \left(v^2+1, v^2\sin(u), \left(v^2+1\right)\cos(u)\right), \qquad \text{con } u\in[0,2\pi], 0\le v\le 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (5x+2y+4z^2, -2x-y+z, -x^2+4y).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (\cos(t), 3\sin(t), 0).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P\,(2,1,0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione a pagina 170.

Esercizio 48. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} + u = 0 \text{ in }]0,\pi[\times]0,+\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \chi_{[0,\pi/2]}(x), \end{cases}$$

dove $\chi_{[0,\pi/2]}(x) = 1$ se $x \in [0,\pi/2]$ e $\chi_{[0,\pi/2]}(x) = 0$ altrimenti. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 173.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 13 dicembre 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Nota: i punti a. costituiscono la versione A del compito, quelli b. ne costituiscono la versione B.

Esercizio 49. Studiare la convergenza uniforme della serie di Fourier

a. $S(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 5n^{1/2}}{n^{7/2} - 6} \cos nx + (-1)^n \frac{3^{n+9}}{2^{3n-4}} \sin nx.$

b. $S(x) = 7 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+9}}{3^{3n-4}} \cos nx - \frac{n^{1/2} - 4}{8n^3 - 3n^2} \sin nx.$

Calcolare $\int_0^{2\pi} S(x)\, dx$. Dire inoltre se $S(x)$ è derivabile, giustificando adeguatamente quanto asserito.

Soluzione a pagina 174.

Esercizio 50. Determinare la natura dei punti critici della funzione

a. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3.$

b. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy + 3.$

Soluzione a pagina 175.

Esercizio 51. Determinare massimo e minimo della funzione f sull'insieme V con

a. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 z$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z^2 + y^2 - x^2 = 4\}$.

b. $f(x, y, z) = z^2 + x^2 y$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 - z^2 = 4\}$.

Soluzione a pagina 176.

Esercizio 52.

a. La relazione $(x^2 + z^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 - z^2$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x, z)$ intorno al punto $p_0 = (\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$. Si determinino le formule che esprimono $\frac{\partial y}{\partial z}$ e $\frac{\partial y}{\partial x}$, e se ne calcoli il valore in p_0. *Facoltativo:* si dica intorno a quali punti non si può esplicitare y in funzione di x, z. Si dica intorno a quali punti non è possibile esplicitare nessuna delle variabili in funzione delle rimanenti due.

b. La relazione $y^2 - x^2 - z^2 = (x^2 + z^2 + y^2)^2$ definisce implicitamente una funzione $x = f(y, z)$ intorno al punto $p_0 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 0)$. Si determinino le formule che esprimono $\frac{\partial x}{\partial z}$ e $\frac{\partial x}{\partial y}$, e se ne calcoli il valore in p_0. *Facoltativo:* si dica intorno a quali punti non si può esplicitare x in funzione di y, z. Si dica intorno a quali punti non è possibile esplicitare nessuna delle variabili in funzione delle rimanenti due.

Soluzione a pagina 178.

Esercizio 53.

a. Calcolare $\iint_D \frac{x}{y}\, dx\, dy$ dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 1\}$.

b. Calcolare $\iint_D x^2\,dx\,dy$ dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,0)$ e $(2,-2)$.

Soluzione a pagina 178.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 1 febbraio 2011

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 54. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 1)$.

(1) Si scrivano divergenza e rotore di $\vec{F}$.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, \ z = 3\},$$

percorsa muovendosi in senso antiorario rispetto all'asse z.
(3) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso le superfici

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, \ z \geq 3\}$$
$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \ z = 3\}$$

entrambe orientate con la normale rivolta verso l'alto.

Soluzione a pagina 178.

Esercizio 55. Si risolva, per separazione di variabili, il seguente problema relativo all'equazione del calore (in una sbarra con estremità termicamente isolate):

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), & x \in (0, \pi), t > 0; \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = \pi - x, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Si discuta poi la convergenza uniforme della serie ottenuta per stabilire se il dato iniziale è effettivamente assunto.

Infine, si discuta la derivabilità termine a termine della serie e si dica se è lecito affermare che la soluzione trovata soddisfa sia l'equazione differenziale che le condizioni al contorno imposte dal problema.

Soluzione a pagina 180.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 1 febbraio 2011

Cognome e nome: ______________________________ matr.________________________

Esercizio 56. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^3 - 3y^2x - 120y - 27x$.

(1) Si trovino i punti critici di f e se ne stabilisca la natura.
(2) Si dica se l'insieme di livello di f passante per il punto $(1, -1)$ è esprimibile come grafico di una funzione regolare di x in un intorno di tale punto.
(3) Si trovino il massimo ed il minimo assoluto di f sull'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 1\}$.

Soluzione a pagina 182.

Esercizio 57. Si calcoli il volume della porzione della semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

contenuta nel cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1/4\}$.

Soluzione a pagina 182.

Esercizio 58. Si studi la convergenza uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n}}\, e^{-nx} \sin(\sin nx)$$

sulla semiretta $[0, +\infty[$. Si discuta poi la derivabilità della somma $f(x)$ della serie sulla semiretta aperta $]0, +\infty[$. Quante volte è (eventualmente) derivabile $f(x)$?

Soluzione a pagina 183.

Esercizio 59. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 1)$.

(1) Si scrivano divergenza e rotore di $\vec{F}$.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z = 3\},$$

percorsa muovendosi in senso antiorario rispetto all'asse z.

(3) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso le superfici

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z \geq 3\}$$
$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25,\ z = 3\}$$

entrambe orientate con la normale rivolta verso l'alto.

Soluzione a pagina 183.

Esercizio 60. Si risolva, per separazione di variabili, il seguente problema relativo all'equazione del calore (in una sbarra con estremità termicamente isolate):

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & x \in (0,\pi), t > 0; \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t > 0; \\ u(0,x) = \pi - x, & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Si discuta poi la convergenza uniforme della serie ottenuta per stabilire se il dato iniziale è effettivamente assunto.

Infine, si discuta la derivabilità termine a termine della serie e si dica se è lecito affermare che la soluzione trovata soddisfa sia l'equazione differenziale che le condizioni al contorno imposte dal problema.

Soluzione a pagina 183.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 15 febbraio 2011

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Esercizio 61. Sia data la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

(1) Si trovino i punti critici di f e se ne stabilisca la natura.
(2) Si consideri l'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^3 + y^3 = 1\}$. Si dica se si tratta di una curva regolare e se tale insieme è localmente esprimibile come grafico di una funzione regolare di x in un intorno di $(0, 1)$. È possibile esprimere *globalmente* Γ come grafico di una funzione di x?
(3) Si trovino, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto di f su Γ.

Soluzione a pagina 183.

Esercizio 62. Si calcoli l'integrale

$$\int_D (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

ove D è il cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -1 \le z \le 1, \ x^2 + y^2 \le 1\}$.

Soluzione a pagina 184.

Esercizio 63. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y, -e^x \sin y, z).$$

(1) Calcolare la divergenza ed il rotore di $\vec{F}$. Dire se $\vec{F}$ è conservativo e, in caso affermativo, trovarne un potenziale scalare.
(2) Calcolare l'integrale del campo F lungo la curva

$$\gamma(t) = \left(t^2, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\right), \qquad t \in [0, 1].$$

(3) Calcolare il flusso del campo $\vec{F}$ attraverso le superfici

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z, \ z = 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 \le z \le 1\},$$

entrambe orientate con la normale rivolta verso l'alto.

Soluzione a pagina 184.

Esercizio 64. Si risolva, per separazione di variabili, il seguente problema relativo all'equazione della corda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x), & x \in]0, \pi[, \ t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = 0, & x \in]0, \pi[, \\ u_t(0, x) = \sin^3(x), & x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

C'è qualcosa da osservare sulla convergenza della serie ottenuta? (Just a joke...)

[Sugg.: *Può essere utile l'identità* $\sin^3(x) = 3/4 \sin x - 1/4 \sin 3x$.]

Soluzione a pagina 185.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 16 giugno 2011

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 65. Si consideri il seguente insieme:

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^4 - 3x^3y + y^2 = 1\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si dica se Γ è compatto. [*Sugg.* posto $y = mx$, si ottiene x in funzione di...]
(3) Si provi che Γ interseca gli assi in quattro punti distinti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(4) Si determinino, se esistono, i massimi *assoluti* vincolati a Γ della funzione $h(x, y) = 4x^4-3x^3y$. Esistono minimi *assoluti* di h vincolati a Γ? [*Sugg.* si sfrutti il punto (2)]
(5) *Facoltativo.* Motivando accuratamente la risposta, si determini il numero di soluzioni C^1 distinte della relazione $(z, \dot{z}) \in \Gamma$, in un intorno del dato iniziale $z(0) = 1/2$.

Soluzione a pagina 186.

Esercizio 66. Posto $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, si calcoli $I := \displaystyle\iiint_B e^z \, dx \, dy \, dz$.

Soluzione a pagina 187.

Esercizio 67. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r, \theta) = ((r^2 + 1)\cos\theta, r^3 + r^2, (r^2 + 1)\sin\theta), \qquad (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z^2, 4x^2 - 3z, 6x^2 + y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Soluzione a pagina 187.

Esercizio 68. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - 2\partial_{xx} u(t,x) = 0 \ \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\,, \\ u(0,x) = e^x, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 190.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 7 luglio 2011

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 69. Si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + 6zy - 3y^2 = 1\},$$
$$\Gamma_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5y^4 + 6xy + 2z^2 = 4\}.$$

(1) Si descrivano Γ_1 e Γ_2 in coordinate cilindriche.
(2) Si dica se Γ_1 e Γ_2 sono compatti.
(3) Si provi che il piano di equazione $y = 0$ interseca $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ in due punti distinti P_1 e P_2 di cui P_1 con terza coordinata strettamente positiva.
(4) Si dica se in un intorno di $P_1 = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ e $P_2 = (P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$, l'insieme $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ è parametrizzabile rispettivamente da una curva $\gamma_1(z) = (x_1(z), y_1(z), z)$ e $\gamma_2(z) = (x_2(z), y_2(z), z)$. In caso affermativo, si calcolino $\dot\gamma_1(P_{1z})$ e $\dot\gamma_2(P_{2z})$.
(5) Si determinino i punti di Γ_1 più vicini all'origine.
(6) *Facoltativo:* Si calcolino i vettori normali unitari $\hat n_1(P_1)$ a Γ_1 nel punto P_1 e $\hat n_2(P_1)$ a Γ_2 sempre nel punto P_1. Sia θ l'angolo formato da tali vettori normali. Si scelga il verso della normale $\hat n_2(P_1)$ in modo che $\theta \in [0, \pi]$ e si calcolino $\cos\theta$ e $\sin\theta$.

Soluzione a pagina 191.

Esercizio 70. Si consideri l'insieme:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ x + y < 2,\ y < x,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Dopo aver tracciato un grafico di D, si calcoli

$$\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 193.

Esercizio 71. Si considerino la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\Phi(z,\theta) = ((2 + \sin 3z)\cos\theta, (2 + \sin 3z)\sin\theta, z) \text{ con } z \in [0,\pi],\ \theta \in [0, 2\pi],$$

e il campo vettoriale $\vec F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec F(x,y,z) = (\sin^2 x \sin y, 2\sin x \cos x \cos y, \sin y).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec F$. Si dica se il campo $\vec F$ è solenoidale e/o conservativo.
(2) Si calcolino l'elemento d'area e la normale a S.
(3) Si calcoli il flusso di $\vec F$ attraverso S.

Soluzione a pagina 194.

Esercizio 72. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(x), & \text{per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & \text{per } t \in]0,+\infty[\\ u(0,x) = x + \cos 5x & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per trovare una soluzione in forma di serie, e si discuta la convergenza della serie ottenuta. Si calcoli, se esiste, il limite della soluzione per $t \to +\infty$.

Soluzione a pagina 194.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 12 settembre 2011

Cognome e nome: ____________________ matr.________________

Esercizio 73. In $\mathbb{R}^3$ si considerino:

$$\begin{aligned} B_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4\}, \\ C &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2+y^2=1\}, \\ \Gamma &:= B_2 \cap C, \\ \pi_1(\Gamma) &:= \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \text{ esiste } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } (x,y,z) \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

(1) Si esprima $\pi_1(\Gamma)$ in coordinate polari piane [*Sugg.: si espliciti x^2+y^2 nell'equazione di C*]
(2) Si dica se Γ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca gli assi in tre punti distinti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $\gamma(t) = (x(t), t, z(t))$ in un intorno di ciascuno di tali punti, in caso affermativo si calcoli $\dot\gamma(t)$ in tali punti.
(4) Si determinino, se esistono, i punti di Γ situati alla minima e massima distanza dal punto $A := (5,0,0)$.
(5) *Facoltativo.* Si tracci un grafico qualitativo dall'insieme $\pi_1(\Gamma)$.

Soluzione a pagina 195.

Esercizio 74. Posto $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -10 < z < 10,\ x^2+y^2 < 1,\ x^2+y^2 \le 2y,\ x < 0\}$ si tracci un grafico accurato di Ω e si calcoli

$$I := \iiint_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Soluzione a pagina 197.

Esercizio 75. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = (x, y, 1/\sqrt{x^2+y^2}), \qquad 1 < x^2+y^2 < 9,$$

e il campo vettoriale $\vec F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec F(x,y,z) = (y+z^2, 4x^2-3z, 1/z^4).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec F$. Si dica se il campo $\vec F$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec F$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (4, 2\cos t + 1, 7 + 2\sin t).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(\sqrt2, \sqrt2, 1/2)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec F$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 198.

Esercizio 76. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) + \partial_x u(t,x) = 0 \ \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\,, \\ u(0,x) = e^{x/2} x(\pi - x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 200.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2010/2011

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 30 settembre 2011

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 77. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme:

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2+y^2}(x^2+y^2) = |x|\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si dica se Γ è compatto, si dica se $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ è semplicemente connesso.
(3) Si provi che Γ interseca gli assi nell'origine e in altri due punti distinti P_1, P_2, e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $x = x(y)$ in un intorno di P_1 e P_2. [Sugg. non è richiesto di determinare in modo esplicito i punti di intersezione].
(4) Si consideri la funzione $h(x,y) = x/\sqrt{x^2+y^2}$ e si determinino, se esistono, i massimi e minimi di $h(x,y)$ vincolati a Γ.
(5) *Facoltativo.* Si tracci un grafico qualitativo dall'insieme Γ.

Soluzione a pagina 201.

Esercizio 78. Posto $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2+y^2 < 1\}$ si tracci un grafico accurato di Ω e si calcoli

$$I := \iiint_\Omega z\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Soluzione a pagina 203.

Esercizio 79. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, u^2+v^2\right), \qquad 0 < |u| < 5,\ 0 < |v| < 5,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z^2, 4x^2-3z, x+y).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (0, 2\cos t, 2\sin t).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(3,0,18)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 203.

Esercizio 80. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t,x) - \partial_{xx}u(t,x) = 0 \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[, \\ u(0,x) = x(\pi - x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 204.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 2 dicembre 2011

Cognome e nome: ______________________________ matr.________________________

Nota: i punti a. costituiscono la versione A del compito, quelli b. ne costituiscono la versione B.

Esercizio 81. Studiare la convergenza (in L^2, puntuale e uniforme) delle seguenti serie:

a. $S(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \log n + e^{-n}}{n - e^{n}} \cos nx + \cos(n\pi) \dfrac{5^{n+2}}{6^{3n-4}} \sin nx.$

b. $S(x) = 7 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \log n}{n^3 + 12n + 1} \cos nx - \dfrac{n^{1/4} - 4n}{6n^4 - 2n} \sin nx.$

Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\,dx$. Dire inoltre se $S(x)$ è continua, giustificando adeguatamente quanto asserito.

Soluzione a pagina 205.

Esercizio 82. Si consideri il sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^2$ definito da:

a. $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + 2y^2\right)^2 = x^2 + y^2\}$

b. $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 + 2y^2\}$

Si richiede di:

(1) esprimere Γ in coordinate polari piane.
(2) dire se Γ è chiuso, e se Γ è compatto.
(3) provare che Γ interseca gli assi in cinque punti distinti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 con $P_5 = (0, 0)$. Si scrivano poi le rette tangenti r_i, $i = 1, \dots, 4$, a Γ nei punti P_i, $i = 1, \dots, 4$ e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(4) dire se esistono i massimi e minimi assoluti della funzione $h(x, y) = x^2 + y^2$ vincolati a Γ e, in caso affermativo, determinarli.

Soluzione a pagina 205.

Esercizio 83.

a. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si determinino i punti critici della funzione $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g_\alpha(x, y) = x^3 + 2x^2 - \alpha xy + y^2$ e se ne stabilisca la natura.

b. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si determinino tutti i punti critici della funzione $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g_\alpha(x, y) = 4x^3 + 6x^2 + 3xy - \alpha y^2$. Dopo aver verificato che $O = (0, 0)$ è punto critico per ogni valore di α, si studi la natura di $O = (0, 0)$ al variare di α.

Soluzione a pagina 208.

Esercizio 84.

a. Calcolare $I := \displaystyle\iint_D \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$ dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

b. Calcolare $I := \displaystyle\iint_D \sqrt{1 + x + y}\,dx\,dy$ dove D è il triangolo delimitato dalle rette $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 3$.

Soluzione a pagina 211.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 3 febbraio 2012

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 85. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(\sin^2(u)\cos(v), \sin^2(u)\sin(v), u\right), \qquad u \in [0,2\pi], \; v \in [0,2\pi],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(5x^2, x + 2y^2 + z^2, z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := \left(2\cos(t), \sin^2(t), 3\right), \qquad t \in [0,2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = \left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Suggerimento: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4\theta \, d\theta = \frac{3\pi}{4}.$

(6) *Facoltativo:* Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 211.

Esercizio 86. Si consideri l'equazione differenziale $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\frac{2y + xy + \frac{y^3}{3x}}{x + \frac{y^2}{x}}$ con $x \neq 0$.

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

c.) si studi il segno della soluzione;
d.) si dica se essa è prolungabile ad una funzione C^1 definita su tutto $\mathbb{R}$ che sia soluzione dell'equazione per ogni $x \neq 0$;
e.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini.

Soluzione a pagina 214.

Esercizio 87. Si consideri la famiglia di funzioni:

$$u_\varepsilon(x,y) = \frac{x}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) e^{(y-x)^2+1} \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x).$$

Si studi la convergenza puntuale di $u_\varepsilon(x,y)$ per $\varepsilon \to 0^+$. Si calcoli

$$F(y) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon(x,y)\, dx.$$

Soluzione a pagina 216.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 3 febbraio 2012

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Esercizio 88. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x^4y^2 + 5x^4 + 2x^2y^4 + y^4 - y^2 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si dica se Γ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca le bisettrici dei quadranti nell'origine e in altri quattro punti distinti P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, di cui P_1 appartenente al primo quadrante aperto. Si determinino tali punti. Si indichi nel seguito con α l'ascissa di P_1 e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in P_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $x = x(y)$ in un intorno di P_i, $i = 1, 2, 3, 4$.
(4) Si consideri la funzione $h(x, y) = y^2$ e si determinino, se esistono, i massimi e minimi di $h(x, y)$ vincolati a Γ.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo dall'insieme Γ.

Soluzione a pagina 216.

Esercizio 89. Si consideri l'insieme $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0\} : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq y\}$ e si calcoli l'integrale:

$$I := \iint_\Omega \frac{xy^4}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 217.

Esercizio 90. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := \left(\sin^2(u)\cos(v), \sin^2(u)\sin(v), u\right), \qquad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(5x^2, x + 2y^2 + z^2, z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := \left(2\cos(t), \sin^2(t), 3\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = \left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.
Suggerimento: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{4}.$
(6) *Facoltativo:*Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 217.

Esercizio 91. Si consideri l'equazione differenziale $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y + xy + \frac{y^3}{3x}}{x + \frac{y^2}{x}}$, con $x \neq 0$.

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

c.) si studi il segno della soluzione;
d.) si dica se essa è prolungabile ad una funzione C^1 definita su tutto $\mathbb{R}$ che sia soluzione dell'equazione per ogni $x \neq 0$;
e.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini.

Soluzione a pagina 218.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 17 febbraio 2012

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 92. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 4x^3 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si dica se Γ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca le bisettrici dei quadranti nell'origine e in altri quattro punti distinti P_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Si determinino tali punti e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in P_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di P_i, $i = 1, 2, 3, 4$.
(4) Si consideri la funzione $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e si determinino, se esistono, i massimi e minimi di $h(x,y)$ vincolati a Γ. [*Suggerimento:* dall'espressione in coordinate polari, si usi il Teorema di Dini per studiare le derivate di $\rho = \rho(\theta)$, studiando a parte i punti dove la funzione non è esplicitabile.]

Soluzione a pagina 218.

Esercizio 93. Si consideri l'insieme $\Omega := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4,\ 1 \le z \le 2,\ 3 \le t \le 4\}$ e si calcoli l'integrale:

$$I := \int_\Omega \frac{1}{(x+y)^2(z+t)^2}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Soluzione a pagina 218.

Esercizio 94. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(3u^2 + v, u^2 + 4v^2, u + v\right), \qquad u \in [-1,1]\,,\ v \in [-1,1]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + y, x + y + z, z^2 - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 3\sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (3,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 219.

Esercizio 95. Si consideri l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - 36\,\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, & \text{in }]0,+\infty[\times]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = e^x. \end{cases}$$

Si applichi il metodo di separazione delle variabili per scrivere la soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 221.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 22 giugno 2012

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 96. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3x^2y^2 + x^2 + 6y^4 - 2 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si dica se Γ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca la retta $x = 2$ in quattro punti distinti P_i, $i = 1,2,3,4$. Si determinino tali punti e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in P_i, $i = 1,2,3,4$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $x = x(y)$ in un intorno di P_i, $i = 1,2,3,4$.
(4) Si consideri la funzione $h(x,y) = x^2 + y^2$ e si determinino, se esistono, i massimi e minimi di $h(x,y)$ vincolati a Γ.

Soluzione a pagina 222.

Esercizio 97. Sia $\alpha > 1$. Calcolare

$$I_\alpha := \int_{R_\alpha} \frac{1}{(\log x)^2 + (\log y)^2} \frac{1}{xy} \, dx \, dy,$$

dove

$$R_\alpha := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{\alpha^2} \le (\log x)^2 + (\log y)^2 \le \alpha^2, \right.$$
$$\left. \log x + \log y \ge \sqrt{(\log x)^2 + (\log y)^2} \right\}.$$

Soluzione a pagina 224.

Esercizio 98. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u + v, v^2 - u^2, u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 z, z^2, x^2 - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 224.

Esercizio 99. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{xy}(2 - xy) - xy^2}{x^2\left(e^{xy} - 2y\right)}$$

a.) Si scriva l'equazione data come equazione totale.

b.) Si scriva la soluzione dell'equazione data in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

c.) Per ogni $\varepsilon > 0$, si provi che se $y(\cdot)$ è una soluzione dell'equazione definita in $]0, \varepsilon[$, allora $\lim_{x\to 0^+} |y(x)| = +\infty$.

Soluzione a pagina 227.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 10 luglio 2012

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 100. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^4 + 5x^2 - 6xy + 4y^4 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si provi che Γ interseca la retta $y = x$ nell'origine e in altri due punti distinti P_i, $i = 1, 2$. Si determinino tali punti e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in P_i, $i = 1, 2$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di P_i, $i = 1, 2$.
(3) Si consideri la funzione

$$h(x, y) := \begin{cases} \dfrac{4x^2\left(x^4 + y^4\right)}{y^4}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo vincolati a Γ. Non è richiesta la determinazione esplicita dei punti di massimo. [*Sugg.* Ponendo $y = mx$ nell'equazione $f(x, y) = 0$ che definisce Γ si ottiene...]

Soluzione a pagina 228.

Esercizio 101. Posto $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$, calcolare:

$$I := \int_R \frac{2xy\,dx\,dy}{(x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2)}.$$

Soluzione a pagina 229.

Esercizio 102. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := \left(u + v^2, v - u^2, u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-2, 2]\,,\ v \in [-2, 2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xyz, y, 2z)\,.$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (3\cos(t), 0, \sin(t))\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0, 0, 0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 230.

Esercizio 103. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(t,x) + 2\partial_t u(t,x) - \partial_{xx}u(t,x) = 0, & \text{se } t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{se } t > 0, \\ \partial_t u(0,x) = 0, & \text{se } 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = x, & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(1) Si applichi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie.
(2) Si discuta la convergenza della serie ottenuta, stabilendo se essa effettivamente è una soluzione del problema.

Soluzione a pagina 232.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2011/2012

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 7 settembre 2012

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Esercizio 104. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 3x^2y + xy^2 = \dfrac{1}{6\sqrt{6}}\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto. In caso negativo, si determini se ammette asintoti.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := xy$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 234.

Esercizio 105. Posto

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y > 0,\ 1 < x^2 + y^2 < 9,\ \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{y}{x} < \sqrt{3}\right\},$$

si tracci il grafico del dominio Ω e si calcoli

$$I := \int_\Omega \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} \log(y^2 + x^2)\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 236.

Esercizio 106. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u + v, v - u, u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(xz, y + z, x^2 - y^2\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (\cos(t), t + 3\sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 236.

Esercizio 107. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -20x - 72y - \dfrac{3e^{-2t}}{2} \\ \\ \dot{y} &= 6x + 22y + \dfrac{e^{-2t}}{2}. \end{cases}$$

(1) Si scriva la soluzione generale del sistema, precisandone l'intervallo massimale di esistenza.
(2) Si scriva la soluzione $\gamma_P(t) = (x(t), y(t))$ passante per il punto $P(1, 0)$ al tempo $t = 0$.
(3) Si dica se $\gamma_P(t)$ è limitata per $t > 0$. Esistono soluzioni limitate per $t > 0$?

Soluzione a pagina 239.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 7 dicembre 2012

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Nota: i punti a. costituiscono la versione A del compito, quelli b. ne costituiscono la versione B.

Esercizio 108. Si considerino le seguenti serie:

a. $S(x) := \dfrac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n} + n^2 - \log n}{n^5 + e^{-2n} + 1} \cos(nx).$

b. $S(x) := \dfrac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan n + n - \log 6n}{n^6 + e^{-5n} + 3} \cos(nx).$

Giustificando adeguatamente le risposte, si chiede di:

(1) studiare la convergenza puntuale, uniforme, totale e in $L^2(-\pi, \pi)$ della serie data.

(2) calcolare $\displaystyle\int_{-\pi}^{3\pi} S(x)\, dx.$

(3) dire se $S(\cdot)$ è continua, se è pari oppure dispari e se è di classe C^1.

(4) provare che $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2\, dx > 25\pi/2.$

Soluzione a pagina 240.

Esercizio 109. a., b. Si consideri il sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^4 + 2xy - (x^2 + y^2)^2 = 0\}.$$

Si richiede di:

(1) esprimere Γ in coordinate polari piane.

(2) dire se Γ è chiuso, e se Γ è compatto.

(3) provare che Γ interseca gli assi in cinque punti distinti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 con $P_5 = (0, 0)$. Si scrivano poi le rette tangenti r_i, $i = 1, \dots, 4$, a Γ nei punti P_i, $i = 1, \dots, 4$ e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.

(4) dimostrare che la funzione $h(x, y) = x^2 + y^2$ ammette massimo e minimo assoluti vincolati a Γ, e che i punti di massimo e minimo assoluti sono date dalle intersezioni di Γ con la retta $y = -x$ [*Nota: non si richiede la determinazione esatta dei massimi e dei minimi vincolati.*]

Soluzione a pagina 241.

Esercizio 110. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

a. $g_\alpha(x, y) = 2 + \alpha x^2 + 4xy + (\alpha - 3)y^2 + (2x + y)^3$.

b. $g_\alpha(x, y) = 2 + \alpha y^2 + 4xy + (\alpha - 3)x^2 + (2y + x)^3$.

Dopo aver determinato tutti i punti critici di g_α e aver provato che l'origine è punto critico di g_α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si stabilisca se l'origine è punto di massimo relativo, di minimo relativo o sella.

Soluzione a pagina 243.

Esercizio 111. Dopo aver tracciato un grafico accurato del dominio Ω, si calcolino i seguenti integrali:

a. $I := \displaystyle\iint_\Omega \frac{xy^4}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} :\ x \geq 0, x^2+y^2 \leq y\}$.

b. $I := \displaystyle\iint_\Omega \frac{(x-y)e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\,dx\,dy$, dove $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x+y| < 1,\ |x-y| < \pi\}$.

Soluzione a pagina 245.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 6 febbraio 2013

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Esercizio 112. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u+v, u^2+v^2+1, v\right), \qquad u \in [-1,1], \, v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(xyz, y^2z^2, x^2\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 1, 2\sin(2t)+1), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,2,1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 246.

Esercizio 113. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 4\partial_t u(t,x) - 2\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, & \text{per } t>0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t>0, \\ u(0,x) = x^2, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 248.

Esercizio 114. Al variare di $\varepsilon > 0$ si considerino le funzioni:

$$f_\varepsilon(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\tan\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\cos(y-x), & \text{per } 0 \le x \le \varepsilon\pi/4, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli il limite puntuale di $f_\varepsilon(x,y)$ per $\varepsilon \to 0^+$, si calcoli

$$F(y) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x,y)\,dx,$$

e si dica se vale il passaggio al limite sotto al segno di integrale.

Soluzione a pagina 250.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 6 febbraio 2013

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 115. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 4x^2 + 8xy - y^6 + 4y^2 = 0\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in cinque punti di cui uno è l'origine. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti di $\Gamma \cap \{xy = 0\}$ diversi dall'origine. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 251.

Esercizio 116. Si calcoli il volume del solido V intersezione della sfera $B := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ con il cono $C := \{(x,y,z) : z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Soluzione a pagina 251.

Esercizio 117. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u+v, u^2+v^2+1, v\right), \qquad u \in [-1,1], \, v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(xyz, y^2z^2, x^2\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 1, 2\sin(2t) + 1), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,2,1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 251.

Esercizio 118. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 4\partial_t u(t,x) - 2\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, & \text{per } t > 0, \ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0, \\ u(0,x) = x^2, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 251.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 25 febbraio 2013

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 119. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y^2 + 4y - 2 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x, y) := x^2 + y$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 251.

Esercizio 120. Si determini l'area della porzione del paraboloide P di equazione $z(x, y) = 4-x^2-y^2$ che giace nel semispazio $z > 0$.

Soluzione a pagina 252.

Esercizio 121. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := \left(v - u, v^2 - u^2, u^2\right), \qquad u \in [-1, 1]\,, v \in [-1, 1]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(y^2 + z^2, x^3 + z^2, x + y^2\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\sin(t), 0, t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0, 0, 1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 252.

Esercizio 122. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(y^3 + 3\right)}{2 - x\left(y^3 - 6\right)}.$$

Si richiede di:

a. scrivere tale equazione come equazione totale $\omega(x, y) = 0$.
b. risolvere l'equazione totale $\omega(x, y) = 0$.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$.

c. si dica se tale funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e se ammette asintoti.
d. si dica se tale soluzione è strettamente monotona nel suo intervallo di esistenza.

Soluzione a pagina 256.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 17 giugno 2013

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 123. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^3 - 2x^2 + y^4 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ o $x = x(y)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^4 + y^4$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 257.

Esercizio 124. Dopo aver tracciato un grafico accurato di $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2(x-y)\}$, si calcoli l'integrale:

$$I := \int_\Omega \frac{x^2 + y^2}{x - y}\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 258.

Esercizio 125. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := (u(u+v), v(u-v), u+v)\,, \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(y^2 z^2, x, x - y + z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (t\cos(t), 0, \sin(t))\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,-1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 258.

Esercizio 126. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= t^2 + x(t) + 3y(t), \\ \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 260.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 8 luglio 2013

Cognome e nome: ____________________________ matr.________________________

Esercizio 127. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2 + y^4 - 6 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 261.

Esercizio 128. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+6y| < 4, |2x-y| < \pi^2\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $I := \displaystyle\iint_\Omega \left(\frac{x+6y}{3}\right)^3 \arctan^2(2x-y)\,dx\,dy$.

Soluzione a pagina 262.

Esercizio 129. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u - v^2, u^2 - v^2, u^3 + v\right), \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(yz, 1, x^2 + y^2\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (t\cos t, 3\sin t, 2t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

[*Suggerimento*: si utilizzi la relazione $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$.
Si presti particolare attenzione agli estremi di integrazione.]
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 262.

Esercizio 130. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + 4\partial^2_{xx} u(t,x) + 2u(t,x) = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0 \\ u(0,x) = 2x^2, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 264.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 3 settembre 2013

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 131. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \big(x^2+y^2+2y\big)^2 - x^2 - y^2 = 0\Big\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 266.

Esercizio 132. Posto

$$\Omega := \left\{(x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[: \ x^2+y^2 \le 1, \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x\right\},$$

dopo aver tracciato un grafico accurato di Ω, si calcoli il seguente integrale:

$$I := \int_\Omega \frac{2x\,dx\,dy}{y\cos^2(x^2+y^2)}.$$

Soluzione a pagina 267.

Esercizio 133. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \big(u+2v, u^4+v^4, 2u-v\big)\,, \qquad u \in [-1,1]\,,\ v \in [-1,1]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \big(x^2 z, z^2, x^2 - y\big)\,.$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (2\cos(t), 3\sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,0,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 267.

Esercizio 134. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{y(5xy+3)}{3\,(x-y^3)}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.

b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.
c. Si determini una forma implicita per la soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$.

Soluzione a pagina 270.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2012/2013

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 17 settembre 2013

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 135. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \big(x^2+y^2\big)^3 - xy = 0\Big\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con le bisettrici, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 271.

Esercizio 136. Posto

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2,\ 0 \le y \le x\right\},$$

dopo aver tracciato un grafico accurato di Ω si calcoli il seguente integrale:

$$I := \iint_\Omega \frac{2(x^2+y^2)^3\cos(x^2+y^2)}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 271.

Esercizio 137. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \big(u+v, -u^2, v^2-1\big)\,, \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \big(x+y+z, x^2+z, x^2-y\big)\,.$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (2\cos(t), \sin(t), 1)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1, -1, -1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 272.

Esercizio 138. Si scriva la soluzione generale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} x'(t) &= 4x(t) + 2y(t) + t \\ y'(t) &= x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

Si determini poi la soluzione soddisfacente a $(x(0), y(0)) = (1, 2)$.

Soluzione a pagina 273.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 2 dicembre 2013

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 139. Studiare la convergenza (in L^2, puntuale e uniforme) delle seguenti serie:

a. $S(x) = 6 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + \tan(1/n)}{n^2} \cos nx + \frac{2^{n-2}\cos(n\pi)}{9^{5n-1}} \sin nx.$

b. $S(x) = \pi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{n^5 + 12n^2 + 1} \cos nx - \frac{n - 4n^2}{6n^4 - 2n} \sin nx.$

Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\,dx$. Dire inoltre se $S(x)$ è continua, giustificando adeguatamente quanto asserito.

Soluzione a pagina 275.

Esercizio 140. Si consideri il sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 - 2x^2y^4 + y^8 = 0\}.$$

Si richiede di:

(1) esprimere Γ in coordinate polari piane.
(2) dire se Γ è chiuso, e se Γ è compatto.
(3) provare che Γ interseca le bisettrici in cinque punti distinti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 con $P_5 = (0, 0)$. Si scrivano poi le rette tangenti r_i, $i = 1, \ldots, 4$, a Γ nei punti P_i, $i = 1, \ldots, 4$ e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(4) dire se esistono i massimi e minimi assoluti della funzione $h(x, y) = x^2$ vincolati a Γ e, in caso affermativo, determinarli.

Soluzione a pagina 275.

Esercizio 141.

a. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g_\alpha(x, y) = \alpha(1 - \alpha)x^2 - 4\alpha xy^2 + 2\alpha^2 xy + 4\alpha y^4 - \alpha^2 y^2$$

Dopo aver verificato che $O = (0, 0)$ è punto critico per ogni valore di α, si studi la natura di $O = (0, 0)$ al variare di α.

b. Si determinino i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y - y^2 - 10x^2 - 5,$$

e se ne stabilisca la natura.

Soluzione a pagina 277.

Esercizio 142. Dopo aver tracciato un grafico accurato del dominio di integrazione, calcolare:

a. $I := \displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$ dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\},$

b. $J := \displaystyle\iint_E e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dx\,dy$ dove E è il trapezio di vertici $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ e $(0,-1)$.

Soluzione a pagina 278.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 5 febbraio 2014

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 143. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(\left(v^3+1\right)\cos(u), \left(v^3+1\right)\sin(u), v\right), \qquad u \in [-\pi,\pi]\,,\ v\in[-1,1]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2+y, z-2y, z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t)\,, \qquad t\in[0,2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P=(1,0,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 279.

Esercizio 144. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{-12x^2y^3-6y^4+5y}{6xy^3+10x}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(0)=(5/6)^{1/3}$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 282.

Esercizio 145. Per ogni $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ si consideri

$$g_n(t) := \frac{n\sin^2(nt)}{\pi}\chi_{[-\pi/n,\pi/n]}(t),$$

dove $\chi_A(t)=0$ se $t\notin A$ e $\chi_A(t)=1$ se $t\in A$. Si ponga

$$f_n(y) := \int_{\mathbb{R}} g_n(t)\arctan(y+t)\,dt.$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si calcoli $f(y) := \lim_{n\to+\infty} f_n(y)$. Vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale?

Soluzione a pagina 283.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 5 febbraio 2014

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 146. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^4 + xy^2 + y^4 + 2y^2 - 2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 283.

Esercizio 147. Sia Ω la regione finita di piano delimitata dalle rette $x+y=0$, $x+y=1$, $2x-y=0$, $2x-y=3$. Dopo aver tracciato un grafico accurato di Ω si calcoli

$$I := \iint_\Omega (x+y)^2 \, dx \, dy.$$

Soluzione a pagina 284.

Esercizio 148. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(\left(v^3+1\right)\cos(u), \left(v^3+1\right)\sin(u), v\right), \qquad u \in [-\pi, \pi], \, v \in [-1, 1],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2 + y, z - 2y, z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,0,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 285.

Esercizio 149. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} -\partial_t u(x,t) + 6\partial^2_{xx} u(x,t) + u(x,t) = 0, & \text{per } t > 0, \, x \in]0, \pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0 \\ u(0,x) = 2x^2 + 1, & \text{per } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 285.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 20 febbraio 2014

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 150. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + x^2y^2 + x^2y + y^2 - 1 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := y$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 287.

Esercizio 151. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da $xy = 1$, $xy = 9$, $y = x$, $y = 4x$. Dopo aver tracciato un grafico accurato di D si calcoli

$$I := \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx\,dy.$$

Soluzione a pagina 289.

Esercizio 152. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u - 2v, u + 4v^2, u^3 - v^3\right), \qquad u \in [-2,2], \, v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := (z - 4x, x + y, x + y + z).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (1, 3\sin(t), 3\cos(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 289.

Esercizio 153. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{10xy^2}{3 - 12y^3}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 291.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 18 giugno 2014

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 154. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 5x^2y^2 + 6y^3 - 2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := y$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 292.

Esercizio 155. Si consideri l'insieme $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq y\}$ e si calcoli l'integrale:

$$I := \iint_\Omega \frac{xy^4}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 293.

Esercizio 156. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(4u - 5v, u^2 + v^2 + 2, 2u + v\right), \qquad u \in [-1,1]\,, v \in [-1,1]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2 z, z, x^2 - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (3\cos(t), \sin(t), 3\sin(t))\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,2,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 293.

Esercizio 157. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= t^2 + x(t) + 3y(t), \\ \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 296.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 9 luglio 2014

Cognome e nome: ____________________________ matr.____________________

Esercizio 158. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 - 2 = 0\big\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := y$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 298.

Esercizio 159. Indicato con D il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, si calcoli

$$I := \iint_D x \sin|y-2x|\,dx\,dy.$$

Si tracci un grafico accurato del dominio prima di iniziare lo svolgimento.

Soluzione a pagina 299.

Esercizio 160. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \big(u, v^2, u^2+v^2\big), \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \big(xyz, y^2+z^2, x^2-y\big)\,.$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (t\cos(t), \sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,0,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 299.

Esercizio 161. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 2\partial_t u(x,t) + 3\partial^2_{xx}u(x,t) = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0 \\ u(0,x) = 4x^2 - 1, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 302.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 4 settembre 2014

Cognome e nome: ____________________ matr.____________________

Esercizio 162. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + 3xy + y^3 - 2 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 304.

Esercizio 163. Si calcoli il seguente integrale:

$$I := \iint_D \arcsin(x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

dove D è il dominio delimitato dalla curva di equazione polare $\rho = \sqrt{\sin\theta}$ per $\theta \in [0, \pi]$.

Soluzione a pagina 305.

Esercizio 164. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u - v, u + v^2, u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(y^2 z, x^2, x - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (t, 3\sin t, \cos t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,2,2)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 305.

Esercizio 165. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = -\frac{4x^3y^3 + 1}{6x^4y^2}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(1) = 1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 307.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2013/2014

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 18 settembre 2014

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 166. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + x + e^y y = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^3$ e si dica se esistono punti di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ (*non è necessario determinarli esplicitamente*).
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 308.

Esercizio 167. Posto $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -10 < z < 10,\ x^2+y^2 < 1,\ x^2+y^2 \le 2y,\ x < 0\}$ si tracci un grafico accurato di Ω e si calcoli

$$I := \iiint_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Soluzione a pagina 309.

Esercizio 168. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u+2v, v^2-2u^2, 2u^2+v^2\right), \qquad u \in [-2,1],\ v \in [-1,1],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := (xz, z, x-y).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 2\sin(t), 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,-2,2)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 309.

Esercizio 169. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= t^2 + x(t) + 2y(t), \\ \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) + y(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 312.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2014/2015

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 1 dicembre 2014

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 170. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 - 4x + y^2\right)^2 - x^2 + y^2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 313.

Esercizio 171. Si consideri la seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi} e^{(-2n^2-1)t} \cos(nx),$$

dove $t > 0$, $x \in [-\pi, \pi]$. Si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie e si dica se tale serie risolve l'equazione $\partial_t u - 2\partial^2_{xx} u + u = 0$ in $t > 0$, $x \in]-\pi, \pi[$.

Soluzione a pagina 316.

Esercizio 172. Si calcoli il volume del solido di $\mathbb{R}^3$ ottenuto sezionando il cilindro $x^2 + y^2 = 9$ con i piani $y + z = 5$ e $z = 1$.

Soluzione a pagina 317.

Esercizio 173. Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = 2\alpha x^2 - 9x^2 + 14\alpha xy - 60xy + \alpha^2 y^2 + 18\alpha y^2 - 90y^2,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determinino massimi e minimi relativi di f_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione a pagina 317.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2014/2015

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2015

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 174. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u^2+v, v^2-u^2, u+v^2\right), \qquad u\in[-2,2]\,,\ v\in[-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2z, yz, x^2-yz\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), 0)\,, \qquad t\in[0,2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P=(2,0,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 317.

Esercizio 175. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{y^3(2x-5y)}{5xy^3+6}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(2)=1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 319.

Esercizio 176. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)+3x_2(t)+2t+1, \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_2(t)-2x_1(t). \end{cases}$$

con le condizioni $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$.

Soluzione a pagina 320.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2014/2015

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2015

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 177. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^4+4x^2y^2-x\sqrt{x^2+y^2}+y^4+\frac{1}{20}=0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y=y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y):=x^2+y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 323.

Esercizio 178. Calcolare l'area della porzione della superficie di equazione $z=\arctan(y/x)$ soddisfacente a $x\geq|y|$ e $1\leq x^2+y^2\leq 16$. [*Suggerimento*: per calcolare una primitiva di $\sqrt{1+u^2}$ si ponga $u=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=\sinh t$ da cui $t=\log(u+\sqrt{1+u^2})$, $du=\cosh t\,dt$ ...]

Soluzione a pagina 324.

Esercizio 179. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v):=\left(u^2+v, v^2-u^2, u+v^2\right), \qquad u\in[-2,2],\, v\in[-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z):=\left(x^2z, yz, x^2-yz\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t):=(3\cos(t),3\sin(t),0), \qquad t\in[0,2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P=(2,0,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 325.

Esercizio 180. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 2\partial_t u(x,t)-4\partial^2_{xx}u(x,t)+u(x,t)=0, & \text{per } t>0,\ x\in]0,\pi[,\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, & \text{per } t>0\\ u(0,x)=3x, & \text{per } x\in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 325.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2014/2015

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 16 febbraio 2015

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 181. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -x^4 - 2x^2y^2 + x^2 + 4xy - y^4 + y^2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 327.

Esercizio 182. Data la curva C di equazione cartesiana

$$4x^2y^2 + 4x^2(x-y) - (x-y)^2 = 0,$$

calcolare l'area della regione limitata dall'arco di curva C che ha per estremi i punti $(0,0)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$, dall'asse delle x, e dalla retta $x = \frac{1}{4}$. *[Suggerimento: nel calcolo di alcuni degli integrali può essere conveniente la sostituzione $t = \sqrt{1-2x}$.]*

Soluzione a pagina 328.

Esercizio 183. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u + 3v, u - v, 4u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-2,2]\,, \, v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(z^2 - y, x + z, 2x\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,0,0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 329.

Esercizio 184. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{1 - 36x^3}{8x^2y^3}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.

b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(1) = 1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 330.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2014/2015

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 22 giugno 2015

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 185. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 4x^2y + 3y^2 - 4 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x, y) := x^2 \left(y - \frac{2x^2}{3}\right)$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 331.

Esercizio 186. Definiamo $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2,\ x/4 < y^2 < x\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli l'area di Ω.

Soluzione a pagina 333.

Esercizio 187. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := \left(2u + v, -u - 3v, u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-1, 1]\,, v \in [-1, 1]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) := \left(xz, yz^2, x + y + 1\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0, 0, 0)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 333.

Esercizio 188. Si trovi la soluzione generale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t^2 + x(t) + y(t), \\ \\ \dot{y}(t) = 4x(t) + y(t) + 4. \end{cases}$$

Soluzione a pagina 336.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2014/2015

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 3 settembre 2015

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 189. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+8y^2+8y-2=0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y=y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2+2y$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 337.

Esercizio 190. Sia $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\geq 0,\, z=2-x^2-y^2\}$. Si calcoli

$$I := \int_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento d'area di Σ.

Soluzione a pagina 338.

Esercizio 191. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(2u+v, 2v^2-u^2, u^2+v^2\right), \qquad u\in[-2,2],\, v\in[-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2yz, xz, y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (4\cos(t), \sin(t), t), \qquad t\in[0,2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P=(2,-1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 338.

Esercizio 192. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 2\partial_t u(x,t)+2\partial^2_{xx}u(x,t)+\partial_x u(x,t)+6u(x,t)=0, & \text{per } t>0,\ x\in]0,\pi[,\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, & \text{per } t>0\\ u(0,x)=5x, & \text{per } x\in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 340.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2015/2016

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 30 novembre 2015

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 193. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^4+4x+y^3+2y^2+4y=0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si considerino le funzioni $h(x,y) := x^4$ e $k(x,y) := y$ e si dica se esistono punti di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ. *[In caso affermativo, non è necessaria l'esatta determinazione di tali punti.]*
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 342.

Esercizio 194. Data la curva γ nel piano xz definita da

$$\gamma(t) := \begin{cases} x(t) = 1-\sin t, \\ z(t) = -\log\cos t, \end{cases} \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,$$

si calcoli il volume della regione illimitata di spazio che si ottiene ruotando la curva intorno all'asse z. Mostrare inoltre che la superficie che delimita questa regione ha area finita.

Soluzione a pagina 342.

Esercizio 195. Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, si determinino il dominio e i massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f_\alpha(x,y) := \arcsin\left(\max\left\{-1, e^{x^2+2y^2-2(x+2\alpha y)+1}-2\right\}\right).$$

Soluzione a pagina 344.

Esercizio 196. Data la curva γ definita da

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2-4=0, \\ x^2+y^2-z^2-2x=0. \end{cases}$$

Si determini il punto di γ dove la terza componente assume il suo valore massimo.

Soluzione a pagina 344.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2015/2016

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 1 febbraio 2016

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 197. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u+2v, v^2-2u^2, u^2+v^2\right), \qquad u \in [-2,2],\, v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2-z, 1-z^2, x^2+x-y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (3\cos(t), 2\sin(t), t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,-2,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 346.

Esercizio 198. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 3\partial_t u(x,t) - 4\partial^2_{xx} u(x,t) + 2u(x,t) = 0, & \text{per } t>0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0 \\ u(0,x) = 7x, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 349.

Esercizio 199. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= x(t) + y(t) + \sin(t), \\ \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 351.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2015/2016

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 1 febbraio 2016

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 200. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 3xy + 3y^2 - 1 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x, y) = x$ e si determinino, se esistono, i massimi e minimi di $h(x, y)$ vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo dall'insieme Γ.

Soluzione a pagina 352.

Esercizio 201. Calcolare il volume del solido delimitato dalle superfici di equazione $z = x^2 + y^2$ e $z = \sqrt{3 - 2(x^2 + y^2)}$.

Soluzione a pagina 354.

Esercizio 202. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := \left(u + 2v, v^2 - 2u^2, u^2 + v^2\right), \qquad u \in [-2, 2], \, v \in [-2, 2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) := \left(x^2 - z, 1 - z^2, x^2 + x - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (3\cos(t), 2\sin(t), t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1, -2, 1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 354.

Esercizio 203. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{2xy^2\left(6 - 5y^2\right)}{10x^2y^3 + 3}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(3) = 1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.

e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 354.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2015/2016

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 15 febbraio 2016

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Esercizio 204. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 6x^4y^2 + 5x^4 + 2x^2y^4 + y^4 - y^2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si dica se Γ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca le bisettrici dei quadranti nell'origine e in altri quattro punti distinti P_i, $i = 1,2,3,4$, di cui P_1 appartenente al primo quadrante aperto. Si determinino tali punti. Si indichi nel seguito con α l'ascissa di P_1 e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in P_i, $i = 1,2,3,4$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $x = x(y)$ in un intorno di P_i, $i = 1,2,3,4$.
(4) Si consideri la funzione $h(x,y) = y^2$ e si determinino, se esistono, i massimi e minimi di $h(x,y)$ vincolati a Γ.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo dall'insieme Γ.

Soluzione a pagina 355.

Esercizio 205. Dopo averne tracciato un grafico accurato, si trovi il volume limitato dal paraboloide di equazione $z = 2x^2 + y^2$ e dalla superficie di equazione $z = 4 - y^2$.

Soluzione a pagina 356.

Esercizio 206. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u+v, v^2-u^2, u^2+v^2\right), \qquad u \in [-2,2]\,,\ v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2y^2, z, x^2-y^2\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (3t, 3\sin(t), 0)\,, \qquad t \in [0,2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 356.

Esercizio 207. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 3\partial_t u(x,t) - 4\partial^2_{xx}u(x,t) + 2u(x,t) = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0 \\ u(0,x) = 7x, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 359.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2015/2016

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 17 giugno 2016

Cognome e nome: ____________________ matr.____________________

Esercizio 208. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 - 4x + y^2\right)^2 - x^2 + y^2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 361.

Esercizio 209. Sia A la porzione di piano contenuta nel primo quadrante e racchiusa fra le curve di equazione $x - y = 0$ e $x^3 + y^3 - xy = 0$ con $x \geq y$. Calcolare il volume del cilindroide di base A delimitato dal grafico della funzione $f(x,y) = y/x^2$. *[Suggerimento: utilizzare le formule di Gauss-Green].*

Soluzione a pagina 361.

Esercizio 210. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(4u + v, v^2 - 2u^2, u - 3v\right), \qquad u \in [-2,2]\,, \; v \in [-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(3x^2 - z, y + z^2, x^2 - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (\cos(t), 3\sin(t), 3\sin(t))\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (1, 1, -3)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 361.

Esercizio 211. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= 5x(t) + 4y(t) + t, \\ \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 364.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2015/2016

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 2 settembre 2016

Cognome e nome: ________________________ matr.________________________

Esercizio 212. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} : \dfrac{x^2\left(y^2-1\right)+y^4+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y=y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y):=|x|$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 366.

Esercizio 213. Posto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2+y\geq 0,\ y\leq\sqrt{3}x, x\geq 0\}$ si calcoli

$$I := \iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy.$$

Soluzione a pagina 367.

Esercizio 214. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u+v, v^2-u^2, u^2+v^2\right), \qquad u\in[-2,2]\,,\ v\in[-2,2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(x^2y, z^2, x^2-2z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := \left(\sin(t), \sin^2(t), 0\right), \qquad t\in[0,2\pi]\,.$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P=(1,1,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 367.

Esercizio 215. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{x^4\left(1-3y^2\right)-3}{3x^5y}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(1) = 1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.
d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione a pagina 371.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2016/2017

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 2 dicembre 2016

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 216. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - \left(x^2+y^2\right)^{3/2} + 6x^2 - 6y^2 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con le bisettrici dei quadranti, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 371.

Esercizio 217. Si consideri il seguente insieme

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \arctan(x^2+y^2) \leq z \leq \pi/4\}.$$

Si disegni E e se ne calcoli il volume.

Soluzione a pagina 373.

Esercizio 218. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$\begin{cases} z^3 + z + \sqrt{2}y - \sqrt{2}x = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Si provi che tale insieme è una curva γ di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$, e si determini il punto di γ con terza componente massima.

Soluzione a pagina 373.

Esercizio 219. Dire se esistono massimi e minimi assoluti della funzione f e, in caso affermativo, determinarli.

$$f(x,y) := \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\,xy^4\right)}{1+\sqrt{1-x^2-y^4}}.$$

[Suggerimento: utilizzare metodi indiretti]

Soluzione a pagina 374.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2016/2017

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 6 febbraio 2017

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 220. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u-v, u-v^2, u^2+v^2\right), \qquad u \in [-2,2], \, v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(y^2 - z, x^3, x^2 - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 2\sin(t), 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,0,2)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 374.

Esercizio 221. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) + u(t,x) = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0, \\ u(0,x) = \frac{x^2}{2}, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 378.

Esercizio 222. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= 4x(t) + 2y(t) + 4t, \\ \\ \dot{y}(t) &= 6y(t) - x(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 379.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2016/2017

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 6 febbraio 2017

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 223. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - 4\left(x^2+y^2\right)^{3/2} + 2\sqrt{x^2+y^2} - 2y = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 380.

Esercizio 224. Sia

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le 3,\ x^2+y^2 \ge 2x,\ x^2+y^2 \ge 2y,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Dopo aver tracciato un grafico accurato di D, si calcoli

$$I := \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione a pagina 381.

Esercizio 225. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := \left(u-v, u-v^2, u^2+v^2\right), \qquad u \in [-2,2],\ v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(y^2 - z, x^3, x^2 - y\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 2\sin(t), 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,0,2)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 381.

Esercizio 226. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) + u(t,x) = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & \text{per } t > 0, \\ u(0,x) = \frac{x^2}{2}, & \text{per } x \in]0,\pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 381.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2016/2017

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 20 febbraio 2017

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Esercizio 227. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^3 - 3x + 2y^3 + y = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x, y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 381.

Esercizio 228. Posto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, (|x| - 1)^2 + y^2 \geq 1, y \geq -1\}$, dopo aver tracciato un grafico accurato di D si calcoli $I := \iint_D (x^2y + x^4y^3)\, dx\, dy$.

Soluzione a pagina 382.

Esercizio 229. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := (u(u + v), v(u - v), u + v)\,, \qquad u \in [-2, 2]\,, v \in [-2, 2]\,,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) := \left(x^2z, x + y - z, x - y + z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), 0, \sin(t))\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0, -1, 1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 382.

Esercizio 230. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = \frac{18x^2y^4 - y^6}{2xy^5 + 9}.$$

a. Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
b. Si risolva l'equazione trovando la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente a $y(1) = 1$.

c. Si dica se è definita su tutto $\mathbb{R}$, in caso negativo se ne determini l'intervallo massimale di esistenza.

d. Si dica se ammette asintoti e di che tipo.
e. Se ne tracci un grafico qualitativo.

Suggerimento: per c., d., e., utilizzare una parametrizzazione opportuna della forma implicita della soluzione.

Soluzione a pagina 385.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2016/2017

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 12 giugno 2017

Cognome e nome: ________________________ matr.____________________

Esercizio 231. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^4 - 2x^2y^2 + x^2 + 4xy - y^4 + y^2 = 0\right\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e, ove possibile, si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x,y) := x^2 + y^2$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 387.

Esercizio 232. Calcolare il volume e la superficie della regione dello spazio

$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 4 \text{ e } x^2 + y^2 + (z+2)^2 \le 9\right\}.$$

Soluzione a pagina 387.

Esercizio 233. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) := (u(2u+v), v(u-2v), u+v), \qquad u \in [-2,2], \, v \in [-2,2],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) := \left(yz^2, y+z, 2z-2x\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) := (\cos(t), t, \sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = (0,-2,1)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 387.

Esercizio 234. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + 8t, \\ \\ \dot{y}(t) &= 3x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

Soluzione a pagina 391.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2016/2017

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 4 settembre 2017

Cognome e nome: ______________________________ matr._________________________

Esercizio 235. In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^4 + 2(x+y)^3 - 2(x+y)^2 + y^4 = 0\}$.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane e si dica se è compatto.
(2) Si determinino i punti di intersezione di Γ con gli assi, e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ in tali punti. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di essi.
(3) Si consideri la funzione $h(x, y) := (x+y)^4 + y^4$ e se ne determinino, se esistono, i valori di massimo e minimo assoluti vincolati a Γ.
(4) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Soluzione a pagina 392.

Esercizio 236. Calcolare il volume del solido

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1 + 3(y^2 + z^2),\ 16(y^2 + z^2) \le x^2,\ y^2 + z^2 \le 1/4\}.$$

Soluzione a pagina 393.

Esercizio 237. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata da:

$$\varphi(u, v) := \left(u(u+v), v\left(u - v^2\right), u + v^2\right), \qquad u \in [-1, 1],\ v \in [-1, 1],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) := \left(y^2, x + 2y, 2x - 3y + 3z\right).$$

(1) Si calcolino la divergenza e il rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva
$$\gamma(t) := (\cos(t), t, \sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right)$.
(5) Si scriva il flusso di $\vec{F}$ e di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Soluzione a pagina 393.

Esercizio 238. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 3\partial_t u(t, x) - \partial^2_{xx} u(t, x) + u(t, x) = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0, \pi[, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & \text{per } t > 0, \\ u(0, x) = x^2 + 2, & \text{per } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Si usi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Soluzione a pagina 397.

Svolgimento (Esercizio 1). Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x, y, z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 2x + 1/2,$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y/2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x \end{pmatrix} = (0, -1, 0).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Dal teorema di Stokes, la circuitazione è il flusso del rotore attraverso la superficie $D = \{(x, 1, z) : x^2 + z^2 \le 2\}$ con normale $(0, -1, 0)$, infatti la normale $(0, -1, 0)$ su D induce per la regola della mano destra l'orientamento richiesto su γ. Il flusso è:

$$\int_D \mathrm{rot}\, \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_D d\sigma = \mathrm{Area}(D) = 2\pi.$$

Verifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}\, d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\sqrt{2}\cos\theta, 1, \sqrt{2}\sin\theta) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta, 0, \sqrt{2}\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(-2^{3/2}\cos^2\theta\sin\theta + 2\cos^2\theta \Big)\, d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\mathrm{Jac}\, \varphi(\theta, y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3},$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_1 = (y^2+1)\sin^2\theta.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_2 = y^2,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \det^2 B_3 = (y^2+1)\cos^2\theta.$$

da cui $\omega_2 = \sqrt{2y^2+1}$.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $(1, 0, 0) = \varphi(0, 0)$ si ha $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. La normale deve essere ortogonale a questi due vettori, e avere norma uno, per cui è della forma $(\pm 1, 0, 0)$. Verifichiamo quale di questi due è la normale indotta dalla parametrizzazione:

$$\det \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & = \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mp 1.$$

Il determinante deve essere positivo, per cui la normale indotta nel punto $(1, 0, 0)$ è $(-1, 0, 0)$.

(5) Il flusso richiesto vale:

$$\begin{aligned}
\Phi(S,\vec{F}) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ F_2\circ\varphi & 0 & 1 \\ F_3\circ\varphi & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ y/2 & 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-y/2)\det\begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-1)\det\begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} y^2/2\,dy\,d\theta + \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \Big((y^2+1)^{3/2}\cos^3\theta + (y^2+1)\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta\,dy \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è sfruttato il fatto che:

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\sin w\,dw = 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi}(1-\sin^2\theta)\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-1}^{1}(1-w^2)\,dw + \int_{1}^{-1}(1-w^2)\,dw = 0.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 2). Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ha:

$$\ddot{U}(t)X(x) + 2\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) = 0,$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ottiene:

$$\frac{\ddot{U}(t)+2\dot{U}(t)}{U(t)} - \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = 0,$$

pertanto si ha:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0, \\ \ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t) - \lambda U(t) = 0. \end{cases}$$

Dai dati iniziali si ricava $u_x(0,t) = U(t)\dot{X}(0) = 0$ e $u_x(\pi,t) = U(t)\dot{X}(\pi) = 0$ da cui $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Cerchiamo quindi soluzioni non nulle di:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0, \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione caratteristica è $\mu^2 = \lambda$.

Se $\lambda > 0$ la soluzione è:

$$\begin{aligned} X(x) =& c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \dot{X}(x) =& c_1\sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sostituendo le condizioni iniziali e finali si ha $0 = \dot{X}(0) = (c_1 - c_2)\sqrt{\lambda}$ da cui $c_1 = c_2$, e $0 = \dot{X}(\pi) = c_1\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$ il che implica $c_1 = 0$, quindi l'unica soluzione è quella identicamente nulla, non accettabile.

Se $\lambda = 0$ la soluzione è $X(x) = c_1 + c_2 x$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché $\dot{X}(x) = c_2$, si ottiene $c_2 = 0$ e si ha la soluzione accettabile $X(x) = c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $\lambda < 0$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda|}$, la soluzione è $X(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si ottiene $\dot{X}(x) = -c_1\omega \sin(\omega x) + c_2\omega\cos(\omega x)$, e sostituendo si ha $0 = \dot{X}(0) = c_2\omega$ da cui $c_2 = 0$ e $0 = \dot{X}(\pi) = -c_1\omega\sin(\omega x)$ da cui $\omega \in \mathbb{Z}$, pertanto $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Quindi l'equazione per $X(x)$ ammette soluzioni accettabili per $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ e si ha $X_n(x) = c_n \cos(nx)$, il che comprende anche il caso $\lambda = n = 0$. L'equazione per $U(t)$ risulta:

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t) + n^2 U(t) = 0, \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 + 2\mu + n^2 = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4(1 - n^2)$. Studiamo i vari casi in base al segno del discriminante, tenendo presente che $n \in \mathbb{N}$.

Se $n = 0$ si ha $\Delta > 0$ e le radici sono $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = -2$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 + d_2 e^{-2t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = -d_2$ e quindi $U_0(t) = d_1(1 - e^{-2t})$.

Se $n = 1$ si ha $\Delta = 0$ e l'unica radice doppia è $\mu = -1$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 e^{-t} + d_2 t e^{-t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e quindi $U_1(t) = d_2 t e^{t}$.

Se $n > 1$ si ha $\Delta < 0$ e si hanno le due radici complesse coniugate $\mu_1 = -1 + i\sqrt{n^2-1}$, $\mu_2 = -1 - i\sqrt{n^2-1}$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 e^{-t}\cos(\sqrt{n^2-1}\,t) + d_2 e^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}\,t)$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e quindi $U_n(t) = d_n e^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}\,t)$.

Definiamo $u_n(x,t) = U_n(t)X_n(x)$, si ha:

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= d_0(1 - e^{-2t})c_0 = a_0(1 - e^{-2t}) \\ u_1(x,t) &= d_1 t e^{-t} c_1 \cos x = a_1 t e^{-t}\cos x \\ u_n(x,t) &= d_n e^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}\,t)\, c_n\cos(nx) = a_n e^{-t}\sin(\sqrt{n^2-1}\,t)\,\cos(nx). \end{aligned}$$

Derivando in t e valutando in 0:

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(x,0) &= 2a_0 \\ \partial_t u_1(x,0) &= a_1\cos x \\ \partial_t u_n(x,0) &= a_n\sqrt{n^2-1}\cos(nx). \end{aligned}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$, derivando in t e valutando per $t = 0$ si deve avere:

$$x = \partial_t u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t u_n(x,0) = 2a_0 + a_1\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\sqrt{n^2-1}\cos(nx).$$

Pertanto è necessario calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x$ definita in $[0, \pi]$ estesa per parità in $[-\pi, \pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Se $n > 1$ si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = -\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$$

Pertanto si ha per $|x| \le \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

da confrontare con

$$x = 2a_0 + a_1\cos x + \sum_{n=2}^\infty a_n\sqrt{n^2-1}\cos(nx).$$

Ne segue che $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $a_1 = -\dfrac{4}{\pi}$, e $a_{2k} = 0$ e $a_{2k+1} = -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4k(1+k)}(2k+1)^2}$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \le 1$.
Pertanto si ottiene:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2t}) - \frac{4}{\pi}te^{-t}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-t}\sin(\sqrt{4k(1+k)}\,t)}{\sqrt{4k(1+k)}(2k+1)^2}\cos((2k+1)x),$$

il termine generale della serie è maggiorato uniformemente rispetto a (t, x) in modulo da $1/(2k+1)^2$ che è termine generale di una serie convergente, quindi la serie converge totalmente, dunque uniformemente.

Svolgimento (Esercizio 3). Il sistema può essere scritto nella forma:

$$\dot{z} = Az + B(t) \qquad \text{con } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = -10 \ne 0$ quindi $Az = 0$ se e solo se $z = 0$. Pertanto le soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato sono $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Calcoliamo autovalori e autovettori di A: gli autovalori risolvono l'equazione $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = 0$, ovvero $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$. Tali valori sono reali di segno discorde, per cui le soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato sono nodi instabili. Calcoliamo gli autovettori relativi agli autovalori:

$$0 = (A - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene $3v_1^x + v_1^y = 0$, e possiamo scegliere $v_1 = (1, -3)$.

$$0 = (A - \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene $-v_2^x + 2v_2^y = 0$, e possiamo scegliere $v_2 = (2, 1)$.
Sia P la matrice le cui colonne sono gli autovettori e P^{-1} la sua inversa ($\det P = 7 \ne 0$).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Posto $w = P^{-1}z$, e ricordando che $P^{-1}AP$ è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di A e tutti gli altri valori pari a 0, si ottiene

$$\dot{w} = P^{-1}\dot{z} = P^1 Az + P^{-1}B(t) = P^{-1}AP^{-1}w + P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 4e^{5t}/7 \\ 12e^{5t}/7 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{w}_x &= -2w_x + \dfrac{4}{7}e^{5t}, \\ \\ \dot{w}_y &= 5w_y + \dfrac{12}{7}e^{5t}. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione per w_x è c_1e^{-2t}. Per trovare una soluzione particolare utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati: dato che il temine noto è del tipo $e^{\alpha t}$ con $\alpha \neq -2$, cerchiamo una soluzione della forma Ae^{5t}. Sostituendo nell'equazione si ottiene $5Ae^{5t} + 2Ae^{5t} = 4e^{5t}/7$ da cui $A = 4/49$. Quindi si ha $w_x(t) = c_1e^{-2t} + 4e^{5t}/49$. La soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione per w_y è c_2e^{5t}. Per trovare una soluzione particolare utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati: dato che il temine noto è del tipo $e^{\alpha t}$ con $\alpha = 5$, cerchiamo una soluzione della forma Cte^{5t}. Sostituendo nell'equazione si ottiene $Ce^{5t} + 5Ce^{5t}t - 5Ce^{5t} = 12e^{5t}/7$ da cui $C = 12/7$. Quindi si ha $w_y(t) = c_2e^{5t} + 12e^{5t}t/7$. Si ha $z = Pw$, per cui:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{-2t} + 4e^{5t}/49 \\ c_2e^{5t} + 12e^{5t}t/7 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è allora:

$$\begin{cases} x(t) &= c_1e^{-2t} + \dfrac{4}{49}e^{5t} + 2c_2e^{5t} + \dfrac{24}{7}e^{5t}t, \\ \\ y(t) &= -3c_1e^{-2t} - \dfrac{12}{49}e^{5t} + c_2e^{5t} + \dfrac{12}{7}e^{5t}t. \end{cases}$$

Svolgimento (Esercizio 4).

(1) Si ha $\operatorname{div}(\vec{F})(x) = 12x^3 + 2z$ e $\operatorname{rot}(\vec{F})(x) = (-1, 0, 4)$.
(2) Si ha:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{F}\, ds &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma(\theta)\dot{\gamma}(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3\cos^4\theta + 2\sin\theta, 5\cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-3\cos^4\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta + 10\cos^2\theta\right)\, d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

Infatti si ha:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\sin\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4\theta\sin\theta\, d\theta = 0,$$

perché l'integranda è 2π-periodica, dispari e nell'ultimo integrale si ha che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; inoltre per periodicità si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta + \pi/2)\, d\theta = \int_{\pi/2}^{5/2\pi} \sin^2\sigma\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \sin^2(\sigma)\, d\sigma,$$

che permette di calcolare:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta.$$

Si può anche osservare che la curva assegnata è il bordo della superficie

$$C := \{(x, y, z) : \ z = 0,\ x^2 + y^2/4 \leq 1\},$$

orientata con normale $(0,0,1)$. Dal teorema di Stokes si ricava allora che:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,ds = \int_C \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\,d\sigma = 4\text{Area}(C) = 8\pi,$$

che conferma il calcolo precedente.

(3) La matrice Jacobiana della parametrizzazione è:

$$\operatorname{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ (s+2)\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 3s^2 \end{pmatrix}.$$

Posti:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ (s+2)\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix},$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ 0 & 3s^2 \end{pmatrix},$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} (s+2)\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 3s^2 \end{pmatrix},$$

per il teorema di Binet l'elemento d'area risulta quindi:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\right) d\theta\,ds \\ &= \sqrt{9(s+2)^2\cos^2(t)s^4 + 9\left(s^2+1\right)^2\sin^2(t)s^4 + \left(2s(s+2)\cos^2(t) + (s^2+1)\sin^2(t)\right)^2}\,d\theta\,ds. \end{aligned}$$

(4) Si ha $\varphi(\pi/2,1) = (0,3,1)$ e la normale indotta dalla parametrizzazione in tale punto vale:

$$\partial_\theta\varphi(\pi/2,1)\wedge\partial_s\varphi(\pi/2,1) = \det\left(\begin{array}{c|c} \hat{\imath} & \\ \hat{\jmath} & \operatorname{Jac}\varphi \\ \hat{k} & \end{array}\right)_{(\theta,s)=(\pi/2,1)} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & -2 & 0 \\ \hat{\jmath} & 0 & 1 \\ \hat{k} & 0 & 3 \end{pmatrix} = (0,6,-2).$$

Si ha quindi $\hat{n}(0,3,1) = \frac{(0,6,-2)}{|(0,6,-2)|} = \frac{1}{2\sqrt{10}}(0,6,-2)$.

(5) Il flusso richiesto è:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\,d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \det\begin{pmatrix} -1 & -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ 0 & (s+2)\cos\theta & \sin\theta \\ 4 & 0 & 3s^2 \end{pmatrix} ds\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-3s^2(s+2)\cos\theta + 4(-(s^2+1)\sin^2\theta - 2s(s+2)\cos^2\theta))\right) ds\,d\theta \\ &= \int_0^1 -4\pi\left(3s^2+4s+1\right)\,ds = -16\pi. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 5). Cerchiamo soluzioni $u(t,x) = U(t)X(x)$, sostituendo nell'equazione si ha:

$$\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) - 2U(t)\dot{X}(x) - U(t)X(x) = 0,$$

e supponendo che $u(t,x) = U(t)X(x) \neq 0$ per ogni (t,x) si ottiene dividendo per tale espressione:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} - \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} - 2\frac{\dot{X}(x)}{X(x)} - 1 = 0,$$

ovvero:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \frac{\ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x)}{X(x)} + 1 = \lambda \in \mathbb{R},$$

Consideriamo a questo punto le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = \lambda U(t) \\ \ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + (1-\lambda)X(x) = 0. \end{cases}$$

Dalle condizioni al contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ricava che $X(0) = X(\pi) = 0$, pertanto cerchiamo i $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui vi sia soluzione non identicamente nulla per:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + (1-\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione è $\mu^2 + 2\mu + 1 - \lambda = 0$, da cui si ricavano

$$\mu_1 = -1 - \sqrt{1-(1-\lambda)} = -1 - \sqrt{\lambda}, \qquad \mu_2 = -1 + \sqrt{\lambda}.$$

Quindi per $\lambda > 0$ si ottiene che l'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t}.$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali. Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_1 + c_2 = 0$, e da $X(\pi) = 0$ si ha: $0 = c_1(e^{\mu_1 \pi} - e^{\mu_2 \pi})$. Poiché $\mu_1 \neq \mu_2$ si ottiene che l'unica possibilità è avere $c_1 = c_2 = 0$, quindi se $\lambda > 0$ l'unica soluzione compatibile è la soluzione identicamente nulla, non accettabile.

Se $\lambda = 0$, si ha $\mu_1 = \mu_2 = -1$. L'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali. Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_1 = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene $c_2 \pi e^{-\pi} = 0$, quindi $c_2 = 0$ e si ottiene solo la soluzione identicamente nulla, non accettabile.

Studiamo ora il caso $\lambda < 0$ e poniamo $\omega = \sqrt{|\lambda|}$. Per $\lambda < 0$ si ottiene che le radici dell'equazione caratteristica sono $\mu_1 = -1 - i\omega$ e $\mu_2 = -1 + i\omega$, e quindi l'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{-t} e^{-i\omega x} + c_2 e^{-x} e^{i\omega x} = e^{-x}\left(c_1 e^{-i\omega x} + c_2 e^{i\omega x}\right) = e^{-x}\left(d_1 \cos \omega x + d_2 \sin \omega x\right).$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali: da $X(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene $d_2 \sin \pi\omega = 0$. Poiché si cercano soluzioni non identicamente nulle, si ottiene $d_2 \neq 0$ e quindi $\omega = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In definitiva, si ottiene che $\lambda = -n^2$ al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e le soluzioni di:

$$\begin{cases} \ddot{X}_n(x) + 2\dot{X}_n(x) + (1-n^2)X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

sono tutte della forma $X_n(x) = d_n e^{-x} \sin nx$ al variare di $d_n \in \mathbb{R}$. L'equazione $\dot{U}_n(t) = -n^2 U(t)$ ammette come soluzione $U_n(t) = U_n(0)e^{-n^2 t}$. Poniamo $u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x)$. Per ogni n, essa è una soluzione dell'equazione data soddisfacente $u_n(0,t) = u_n(\pi,t) = 0$ per ogni $t > 0$. Posto $b_n = U_n(0)d_n \in \mathbb{R}$ si ottiene per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $u_n(t,x) = b_n e^{-n^2 t} e^{-x} \sin nx$. Cerchiamo di soddisfare il dato iniziale con una serie di tali funzioni. Cerchiamo i coefficienti b_n in modo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = u(x,0)$ ovvero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-x} \sin nx = x(\pi - x)e^{-x}$, quindi $x(\pi - x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti di Fourier della funzione ottenuta prolungando $x(\pi - x)$

a tutto $[-\pi,\pi]$ per disparità, e poi a tutto $\mathbb{R}$ per 2π-periodicità.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-x^2+\pi x)\sin nx\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}(-x^2+\pi x)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx(-2x+\pi)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx(-2x+\pi)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin nx}{n}(-2x+\pi)\right]_0^\pi + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin nx\,dx\\
&= \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

Quindi $b_{2k}=0$ e $b_{2k+1}=8/(\pi(2k+1)^3)$ per $k\in\mathbb{N}$. Si ha allora:

$$u(t,x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2t-x}\sin\big((2k+1)x\big).$$

Studiamo la convergenza della serie così ottenuta. Per ogni $t\ge 0$ e $x\in[0,\pi]$

$$\left|\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2t-x}\sin\big((2k+1)x\big)\right| \le \frac{1}{(2k+1)^3},$$

quindi

$$\sum_{k=0}^\infty \sup_{\substack{t>0\\ x\in[0,\pi]}}\left|\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2t-x}\sin\big((2k+1)x\big)\right| \le \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^3} < +\infty,$$

infatti il termine generale della serie di sinistra $(2k+1)^{-3}<2^{-3}k^{-3}<1/(8k^2)$, termine generale di una serie convergente. Pertanto la serie che definisce $u(t,x)$ converge totalmente, quindi uniformemente.

Svolgimento (Esercizio 6). Posto $z={}^T(x,y)$, $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ e $b(t)={}^T(e^{3t},0)$ (dove il segno ^{T} indica il trasposto) si ha $\dot z = Az+b(t)$. Cerchiamo autovalori e autovettori di A. L'equazione degli autovalori è $\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+\det(A)=0$, ossia $\lambda^2-\lambda-2=0$, quindi $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=-1$. Poiché $\det(A)\neq 0$, si ha che $Az=0$ se e solo se $z={}^T(0,0)$. Pertanto l'unica soluzione stazionaria del sistema omogeneo associato è $x(t)=0$, $y(t)=0$, e poiché gli autovalori sono reali di segno discorde, si che ha tale punto è una sella, quindi un equilibrio instabile.

Gli autovettori di A sono le soluzioni $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$ di $(A-\lambda_i\mathrm{Id})v_i=0$, $i=1,2$, ossia $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}v_1 = 0$ da cui $v_1={}^T(2,1)$, e $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}v_2=0$ da cui $v_2={}^T(1,2)$. Definiamo quindi la matrice del cambiamento di base le cui colonne sono i vettori v_1, v_2 e la sua inversa:

$$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Moltiplicando il sistema per P^{-1} e posto $P^{-1}z=w$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}w = P^{-1}\dot z = P^{-1}APw + P^{-1}b(t),$$

quindi

$$\begin{pmatrix}\dot w_1\\ \dot w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix} + P^{-1}b(t) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2/3e^{3t}\\ -1/3e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Si ottengono quindi le equazioni $\dot w_1 = 2w_1+2/3e^{3t}$ e $\dot w_2=-w_2-1/3e^{3t}$. Le omogenee associate hanno soluzione c_1e^{2t} e c_2e^{-t} al variare di $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Per cercare le soluzioni particolari, applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati osservando che e^{3t} non è soluzione delle omogenee associate. Cerchiamo quindi soluzioni particolari nella forma C_1e^{3t} per la prima e C_2e^{3t} per la seconda. Sostituendo, si ha $3C_1 = 2C_1+2/3$ da cui $C_1 = 2/3$ e $3C_2 = -C_2-1/3$ da cui $C_2 = -1/12$. Pertanto $w_1(t) = c_1e^{2t}+2/3e^{3t}$ e $w_2(t) = c_2e^{-t} - e^{3t}/12$. Si ha infine:

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Pw(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + 2/3e^{3t} \\ c_2e^{-t} - e^{3t}/12 \end{pmatrix}$$

e pertanto la soluzione generale del sistema risulta:

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1e^{2t} + 5/4e^{3t} + c_2e^{-t}, \\ \\ y(t) = c_1e^{2t} + 1/2e^{3t} + 2c_2e^{-t}, \end{cases}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 7).

(1) Posto $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, si ha:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 4x^3z^2 - z\sin y$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \partial_x & F_1 \\ \hat{j} & \partial_y & F_2 \\ \hat{k} & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \partial_x & x^4z^2 \\ \hat{j} & \partial_y & z\cos y \\ \hat{k} & \partial_z & x^2+y^2 \end{pmatrix} = (2y - \cos y, 2x(x^3z - 1), 0)$$

(2) La matrice Jacobiana di $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ è:

$$\operatorname{Jac} \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ 2u & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate 2×2 di $\operatorname{Jac} \varphi(u, v)$, si ha:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ 2u & 0 \end{pmatrix}.$$

e l'elemento d'area risulta

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\, du\, dv \\ &= \sqrt{(-2u)^2 + (-ve^u)^2 + (-2ue^u)^2}\, du\, dv \\ &= \sqrt{4u^2 + v^2e^{2u} + 4u^2e^{2u}}\, du\, dv. \end{aligned}$$

(3) Per il teorema di Stokes si ha che tale circuitazione è il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso Σ. Posto $\operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot ds &= \int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi & \\ G_2\circ\varphi & \operatorname{Jac}\varphi \\ G_3\circ\varphi & \end{array}\right)du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix} 2u^2-\cos u^2 & ve^u & e^u \\ -2ve^u(v^4e^{3u}+1) & 2u & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-2u(2u^2-\cos u^2)-2v^2e^{2u}(v^4e^{3u}+1)\big)\,du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-2e^{5u}v^6-2e^{2u}v^2-4u^3+2u\cos(u^2)\big)\,du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-2e^{5u}v^6-2e^{2u}v^2\big)\,du\,dv.
\end{aligned}$$

perché il termine $-4u^3+2u\cos(u^2)$ è dispari e integrato in un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Sviluppando l'integrale si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot ds &= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\big(-2e^{5u}v^6-2e^{2u}v^2\big)\,dv\right)du = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{4}{7}e^{5u}-\frac{4}{3}e^{2u}\right)du \\
&= -\frac{4}{35}(e^5-e^{-5})-\frac{2}{3}(e^2-e^{-2}) = -\frac{8\sinh(5)}{35}-\frac{4\sinh(2)}{3}.
\end{aligned}$$

Si poteva procedere anche nel modo seguente: il bordo di Γ è costituito dalla curva formata dalla giustapposizione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \varphi(-1,t) = (t/e, 1, -t), & \dot{\gamma}_1(t) &= (e^{-1}, 0, -1) \\
\gamma_2(t) &= \varphi(t,1) = (e^t, t^2, -1), & \dot{\gamma}_2(t) &= (e^t, 2t, 0) \\
\gamma_3(t) &= \varphi(1,-t) = (-te, -1, t), & \dot{\gamma}_3(t) &= (-e, 0, 1) \\
\gamma_4(t) &= \varphi(-t,-1) = (-e^{-t}, t^2, 1) & \dot{\gamma}_4(t) &= (e^{-t}, 2t, 0),
\end{aligned}$$

per $-1 \le t \le 1$. Si ha quindi (ricordando che $\vec{F}(x,y,z) = (x^4z^2, z\cos y, x^2+y^2)$):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot ds &= \sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i}\vec{F}\circ\gamma_i(t)\dot{\gamma}_i(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}(t^6/e^4, -t\cos 1, t^2/e^2+1)\cdot(e^{-1},0,-1)\,dt + \int_{-1}^{1}(e^{4t}, -\cos t^2, e^{2t}+t^4)\cdot(e^t, 2t, 0)\,dt+ \\
&\quad + \int_{-1}^{1}(t^6e^4, t\cos(-1), t^2e^2+1)\cdot(-e,0,1)\,dt + \int_{-1}^{1}(e^{-4t}, \cos t^2, e^{-2t}+t^4)\cdot(e^{-t}, 2t, 0)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\Big((t^6e^{-5}-t^2e^{-2}-1)+(e^{5t}-2t\cos t^2)+(-t^6e^5+t^2e^2+1)+(e^{-5t}+2t\cos t^2)\Big)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\left(e^{-5t}+e^{5t}-t^6e^5+t^2e^2-\frac{t^2}{e^2}+\frac{t^6}{e^5}\right)dt \\
&= \frac{4}{35}(e^5-e^{-5})+\frac{2}{3}(e^2-e^{-2}) = +\frac{8\sinh(5)}{35}+\frac{4\sinh(2)}{3}.
\end{aligned}$$

Per determinare se l'orientamento scelto per il bordo sia quello corretto, ovvero quello indotto dalla parametrizzazione, osserviamo come nello spazio dei parametri (u, v) in bordo del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ venga percorso in senso orario, quindi negativo. Pertanto è necessario invertire il segno del risultato, che conferma così il risultato ottenuto con il Teorema di Stokes.

(4) si ha $\varphi(0, 1/2) = (1/2, 0, -1/2)$. La normale indotta in tale punto è:

$$\partial_u\varphi(0,1/2) \wedge \partial_v\varphi(0,1/2) = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \hat{\jmath} & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \hat{k} & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}_{(0,1/2)} = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & 1/2 & 1 \\ \hat{\jmath} & 0 & 0 \\ \hat{k} & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 1/2, 0),$$

da cui

$$\hat{n}(1/2, 0, -1/2) = \frac{\partial_u\varphi(0,1/2) \wedge \partial_v\varphi(0,1/2)}{|\partial_u\varphi(0,1/2) \wedge \partial_v\varphi(0,1/2)|} = \frac{(0, 1/2, 0)}{1/2} = (0, 1, 0).$$

(5) posto $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$, il flusso di $\vec{H}$ attraverso Σ è dato da:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \vec{H} \cdot \hat{n}\, d\sigma &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} H_1 \circ \varphi & \\ H_2 \circ \varphi & \operatorname{Jac}\varphi \\ H_3 \circ \varphi & \end{array}\right) du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} -v^2e^u & ve^u & e^u \\ v^2u^2 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(2uv^2e^u + v^3u^2e^u\right) du\, dv \end{aligned}$$

Il termine con potenza dispari di v si annulla per disparità nell'integrazione su un intervallo simmetrico, e quindi

$$\int_\Sigma \vec{H} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2uv^2e^u\, dv\, du = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} ue^u\, du = \frac{8}{3e}.$$

Svolgimento (Esercizio 8). Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t, x) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $\dot{U}(t)X(x) - 5U(t)\ddot{X}(x) = 0$, da cui dividendo per $5U(t)X(x)$ si ha

$$\frac{\dot{U}(t)}{5U(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = 5\lambda U(t), \\ \ddot{X}(x) = \lambda X(x), \end{cases}$$

da accoppiare con le condizioni iniziali $u_x(0, t) = U(t)\dot{X}(0) = 0$ e $u_x(\pi, t) = U(t)\dot{X}(\pi) = 0$ che porgono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Studiamo quindi:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0, \\ \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 - \lambda = 0$. Distinguiamo quindi i vari casi in base al segno del discriminante dell'equazione. Se $\lambda > 0$ abbiamo come radici $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ e le soluzioni dell'equazione data sono

$$X(x) = c_1e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Derivando si ottiene:

$$\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

Valutando la derivata in 0 e ponendola pari a zero si ottiene $c_1 = c_2$, sostituendo questo fatto e valutando la derivata in π si ottiene che per soddisfare $\dot{X}(\pi) = 0$ si deve avere $c_1 = c_2 = 0$, ma la soluzione nulla non è accettabile.

Se $\lambda = 0$ l'equazione ha per soluzioni $X(x) = c_1 + c_2x$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la cui derivata $\dot{X}(x) = c_1$. Si deve avere quindi $c_2 = 0$ e la soluzione risulta essere $X(x) = c_1$. Affinché tale soluzione sia accettabile, è necessario richiedere $c_1 \neq 0$.

Se $\lambda < 0$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda|}$ l'equazione ha per soluzioni $X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$, la cui derivata è $\dot{X}(x) = -\omega c_1\sin(\omega x) + \omega c_2\cos(\omega x)$. Valutando tale derivata in 0 e in π e ponendola pari a zero si ricava $c_2 = 0$ e $\sin(\omega\pi) = 0$ da cui $\omega = \sqrt{|\lambda|} \in \mathbb{Z}$.

Il sistema pertanto ammette soluzioni accettabili solo per $\lambda = -n^2$, con $n \in \mathbb{N}$ e detta X_n la soluzione corrispondente a $\lambda = -n^2$, tali soluzioni sono date da $X_n(x) = c_1\cos(nx)$. Tale scrittura comprende anche il caso $n = 0$.

L'equazione per U, ovvero $\dot{U}_n(t) = -5n^2U_n(t)$ ha per soluzione $U_n(t) = U_n(0)e^{-5n^2t}$, si ha quindi al variare di $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_ne^{-5n^2t}\cos(nx),$$

dove si è posto $a_n = U(0)c_1$, quindi $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cerchiamo di raggiungere il dato iniziale con una serie di queste soluzioni:

$$u(0,x) = 2x = \sum_{j=0}^{\infty} u_n(0,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx),$$

quindi i coefficienti a_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione $f(x) = 2x$, mentre a_0 è il doppio del coefficiente di ordine 0 dello sviluppo in serie di Fourier di f. Prolunghiamo quindi f per parità a tutto $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \pi \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{4}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi} = 4\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}
\end{aligned}$$

Quindi $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$ e $a_{2k-1} = -8/(\pi(2k-1)^2)$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. La soluzione risulta quindi:

$$u(t,x) = \pi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-5(2k-1)^2t}\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2}.$$

La serie converge totalmente quindi uniformemente, infatti si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup\left|\frac{e^{-5(2k-1)^2t}\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} < +\infty,$$

(ad esempio per confronto con la serie di termine generale $1/k^2$).

Svolgimento (Esercizio 9). Moltiplicando la prima equazione per 2 e sottraendo la seconda si ottiene $2x' - y' = 6t^2$, da cui $2x(t) - y(t) = 2t^3 + c_1$. Sostituendo, si ha $y' + 2(y + 2t^3 + c_1) - 6y = 0$ ossia $y' - 4y = -4t^3 - 2c_1$. L'omogenea associata è $y' = 4y$ che ha per soluzione $y(t) = c_2e^{4t}$, per trovare la soluzione della non omogenea cerchiamo una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati nella forma $At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene: $A = 1$, $B = 3/4$, $C = 3/8$, $D = \frac{3}{32} + \frac{c_1}{2}$. Pertanto si ha:

$$y(t) = c_2 e^{4t} + t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{8}t + \frac{3}{32} + \frac{c_1}{2},$$
$$x(t) = \frac{c_2}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{16}t + \frac{3}{64} + \frac{3}{4}c_1.$$

Il sistema omogeneo associato, posto $z = (x, y)$ è $\dot{z} = Az$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Essendo la seconda riga il doppio della prima, tale matrice ha determinante nullo. Le soluzioni stazionarie sono date da tutti i punti della retta $-2x + 3y = 0$. Gli autovalori risolvono l'equazione $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\,\lambda + \det(A) = 0$, ovvero $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ ovvero $\lambda = 0$ e $\lambda = 4$. Pertanto si tratta di equilibri instabili.
Per la determinazione della soluzione, si poteva anche procedere nel modo seguente. Derivando la prima equazione si ottiene $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3\dot{y} = 6t$. Dalla seconda equazione si ha $\dot{y} = 6y - 4x$, per cui sostituendo nella prima si ha $\ddot{x} + 2\dot{x} - 18y + 12x = 6t$. Dalla prima equazione si ha $3y = \dot{x} + 2x - 3t^2$, sostituendo si ha quindi $\ddot{x} + 2\dot{x} - 6\dot{x} - 12x - 18t^2 + 12x = 6t$, quindi l'equazione per la funzione $x(t)$ risulta essere $\ddot{x} - 4\dot{x} = 18t^2 + 6t$. L'omogenea associata è $\ddot{x} - 4\dot{x} = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ che ha come soluzioni $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$, pertanto le soluzioni dell'omogenea associata sono $d_1 + d_2 e^{4t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Per risolvere l'equazione, utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati e cerchiamo quindi una soluzione particolare nella forma At^3+Bt^2+Ct+D. Sostituendo nell'equazione si ottiene $6At+2B-4(3At^2+2Bt+C) = 18t^2+6t$, da cui $A = 3/2$, $B = 3/8$, $C = 3/16$. Il valore della costante D è aribitrario, possiamo scegliere $D = 0$. Quindi si ottiene

$$\begin{cases} x(t) &= d_1 + d_2 e^{4t} + \dfrac{3}{2}t^3 + \dfrac{3}{8}t^2 + \dfrac{3}{16}t, \\ \\ y(t) &= \dfrac{1}{3}(\dot{x} + 2x - 3t^2) = t^3 + \dfrac{3t^2}{4} + \dfrac{3t}{8} + 2d_2 e^{4t} + \dfrac{2d_1}{3} + \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Le soluzioni ottenute con i due differenti procedimenti sono equivalenti: basta infatti porre $2d_2 = c_2$ e $d_1 = 3/64 + 3/4c_1$, infatti in questo modo si ha $d_2 = c_2/2$ e $2/3d_1 + 1/16 = 1/32 + 1/2c_1 + 1/16 = 3/32 + c_1/2$, il che mostra l'equivalenza delle soluzioni.

Svolgimento (Esercizio 10). Poniamo $\varphi(\theta, x) = (\varphi_1(\theta, x), \varphi_2(\theta, x), \varphi_3(\theta, x))$ e $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

(1) Si ha:

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = \frac{2x}{y^2 + z^2 + 1} + 2y + 2xz,$$
$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix}$$
$$= \left(2xy - 2z, -\frac{2x^2 z}{(y^2 + z^2 + 1)^2} - y^2 - z^2, \frac{2x^2 y}{(y^2 + z^2 + 1)^2}\right).$$

Poiché $\mathrm{rot}(\vec{F}) \neq 0$, il campo non è conservativo.

(2) La circuitazione richiesta è:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma(\theta) \cdot \dot{\gamma}(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^2 + 1}, e^2, e^2\right) \cdot (0, -e\sin\theta, e\cos\theta)\, d\theta = 0.$$

(3) La matrice Jacobiana è:

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{x^2-1}\sin\theta & 2xe^{x^2-1}\cos\theta \\ e^{x^2-1}\cos\theta & 2xe^{x^2-1}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento di superficie 2-dimensionale è dato dalla somma dei quadrati dei determinanti delle sottomatrici 2×2 ovvero:

$$d\sigma = \sqrt{4x^2e^{4(x^2-1)} + e^{2(x^2-1)}}\, d\theta\, dx = e^{x^2-1}\sqrt{4x^2e^{2(x^2-1)}+1}\, d\theta\, dx.$$

(4) Si ha $\varphi(\pi/2, 1) = (1, 0, 1)$, in questo punto si ha

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(\pi/2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Dette v_1 e v_2 le colonne di tale matrice, si ha:

$$\hat{n}(1,0,1) = \frac{v_1 \wedge v_2}{|v_1 \wedge v_2|} = \frac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

(5) Il flusso richiesto è:

$$\Phi(\vec{F}, S) = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \det\begin{pmatrix} \frac{x^2}{e^{2(x^2-1)}+1} & 0 & 1 \\ e^{2(x^2-1)} & -e^{x^2-1}\sin\theta & 2xe^{x^2-1}\cos\theta \\ xe^{2(x^2-1)} & e^{x^2-1}\cos\theta & 2xe^{x^2-1}\sin\theta \end{pmatrix} dx\, d\theta$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left(e^{x^2+2(x^2-1)-1}x\sin(t) + e^{x^2+2(x^2-1)-1}\cos(t) - \frac{2e^{2x^2-2}x^3}{e^{2(x^2-1)}+1}\right) dx\, d\theta = 0.$$

Svolgimento (Esercizio 11). Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$, sostituendo si ottiene

$$-\dot{U}(t)X(x) + 2U(t)\ddot{X}(x) + 3U(t)\dot{X}(x) + U(t)X(x) = 0,$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-\dot{U}(t)+U(t)}{U(t)} = -\frac{2\ddot{X}(x)+3\dot{X}(x)}{X(x)}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} -\dot{U}(t) + (1-\lambda)U(t) = 0, \\ 2\ddot{X}(x) + 3\dot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, la sua equazione caratteristica al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ è $2\mu^2 + 3\mu + \lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 9 - 8\lambda$. Dalle condizioni al contorno, si ricava $u(0,t) = U(t)X(0) = 0$ per ogni t e $u(\pi,t) = U(t)X(\pi) = 0$ per ogni t, il che implica $X(0) = X(\pi) = 0$.

Se $\Delta > 0$, l'equazione caratteristica ammette le radici reali distinte λ_1 e λ_2, e l'equazione per $X(x)$ ammette come soluzione generale $X(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$. Sostituendo, si ottiene $0 = c_1 + c_2$ dalla prima e quindi $X(x) = c_1(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})$. Sostituendo $X(\pi) = 0$, si ha $0 = c_1(e^{\lambda_1\pi} - e^{\lambda_2\pi})$, ed essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ottiene $c_1 = c_2 = 0$, soluzione non accettabile.

Se $\Delta = 0$, l'equazione caratteristica ammette la radice reale doppia λ_1, e l'equazione per $X(x)$ ammette come soluzione generale $X(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_1 x}$. Sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ e $0 = c_2\pi e^{\lambda_1\pi}$, il che implica $c_2 = 0$ e anche questa soluzione non è accettabile. Supponiamo $\Delta < 0$, in tal caso l'equazione caratteristica ammette le radici complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ e $\lambda_2 = \alpha - i\omega$ dove $\alpha = -3/4$ e $\omega = \sqrt{|\Delta|}/4 \neq 0$. La soluzione generale dell'equazione è $X(x) =$

$e^{\alpha x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$, sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ e $0 = c_2 e^{\alpha\pi} \sin \omega\pi$. Ciò implica $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. In particolare, poiché $4\omega = \sqrt{|\Delta|}$ si deve avere $\omega = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e quindi $16n^2 = -\Delta$ perché $\Delta < 0$, pertanto si ha $16n^2 = -9 + 8\lambda_n$ e $\lambda_n = (2n^2 - 9/8)$. Pertanto al variare di $n \in \mathbb{N}$ la soluzione relativa a λ_n è

$$X_n(x) = c_n e^{-3/4x} \sin nx.$$

Studiamo ora l'equazione per $U(t)$, essa è $-\dot{U} = (\lambda - 1)U$, la cui soluzione generale è $U(t) = U(0)e^{-(\lambda-1)t}$. Sostituendo i valori di λ accettabili, ovvero i valori λ_n si ottengono soluzioni $U_n(t) = U_n(0)e^{-(2n^2+1/8)t}$. Poniamo $b_n = U_n(0)c_n$ e costruiamo le soluzioni elementari

$$u_n(x,t) = b_n e^{-(2n^2+1/8)t} e^{-3/4x} \sin nx.$$

Per coprire il dato iniziale si deve avere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0),$$

da cui

$$\frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie (di soli seni) della funzione

$$x \mapsto \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$$

definita su $[0,\pi]$ e prolungata per disparità a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Pertanto i coefficienti b_n sono dati da:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \right) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione risulta essere:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} e^{-(2n^2+1/8)t} e^{-3/4x} \sin(nx).$$

Essa converge uniformemente, infatti si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,+\infty[} \left| \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} e^{-(2n^2+1/8)t} e^{-3/4x} \sin(nx) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

che prova la convergenza totale e quindi uniforme della serie.

Svolgimento (Esercizio 12). Posto $z = (x,y)$, il sistema si riscrive nella forma $\dot{z} = Az + B(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $T = \operatorname{tr}(A) = -3$ e $D = \det(A) = -13$. L'equazione degli autovalori è $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ ovvero $\lambda^2 + 3\lambda - 13 = 0$, che ammette come soluzioni i due autovalori reali

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-3 - \sqrt{61}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{61}\right).$$

Poiché $D \neq 0$, l'unico punto di equilibrio per l'omogeneo associato è $(0,0)$, e poiché gli autovalori sono di segno discorde tale punto è una sella.

Riscrivendo il sistema dato, si ha:

$$\begin{cases} -3y = \dot{x} + 2x - 3e^{-2t}, \\ \dot{y} = -5x - y. \end{cases}$$

Derivando la prima equazione, si ottiene $-3\dot{y} = \ddot{x} + 2\dot{x} + 6e^{-2t}$.

Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$-3(-5x - y) = \ddot{x} + 2\dot{x} + 6e^{-2t}.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x - 3y + 6e^{-2t} = 0$.

Sostituiamo l'espressione di y ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x + (\dot{x} + 2x - 3e^{-2t}) + 6e^{-2t} = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x + \dot{x} + 2x - 3e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - (-2 - 1)\dot{x} + (2 - 15)x - 3e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0.$$

In notazione compatta, si ha $\ddot{x} - T\dot{x} + D\,x = -3e^{-2t}$. L'omogenea associata ha soluzione generale $c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ Cerchiamo una soluzione particolare di tale equazione con il metodo dei coefficienti indeterminati. Poiché -2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione nella forma qe^{-2t} con $q \in \mathbb{R}$. Sostituendo e semplificando e^{-2t}, si ottiene $4q - 6q - 13q = -3$ da cui $q = 1/5$, quindi si ottiene

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{5}e^{-2t}.$$

Derivando, si ha:

$$\dot{x}(t) = c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} - \frac{2}{5}e^{-2t}.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3}\left(c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} - \frac{2}{5}e^{-2t} + 2\left(c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{5}e^{-2t}\right) - 3e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{61})t}\left(-\left(1+\sqrt{61}\right)c_1e^{\sqrt{61}t} + \left(\sqrt{61}-1\right)c_2 + 6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{61}-1\right)t}\right). \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è quindi:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{61}\right)t} + c_2e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t} + \frac{e^{-2t}}{5} \\ y(t) = \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t}\left(-\left(1+\sqrt{61}\right)c_1e^{\sqrt{61}t} + \left(\sqrt{61}-1\right)c_2 + 6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{61}-1\right)t}\right) \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 13). Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{F} &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & 3y^2 + 2z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & 1 - 8x^3 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & 2x - 6y^2 \end{pmatrix} = (-12y, 0, -24x^2 - 6y). \end{aligned}$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Utilizziamo il teorema di Stokes: Γ è bordo di un'ellisse $\mathcal{E}$ appartenente al piano $z = 1$. La normale unitaria a tale ellisse sarà quindi $(0, 0, \pm 1)$. Parametrizziamo tale ellisse con $\psi(r, \theta) = (5r \cos\theta, 2r \sin\theta, 1)$, $0 \leq r \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Lo Jacobiano di tale parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}(\psi) = \begin{pmatrix} 5\cos\theta & -5r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e l'elemento d'area risulta $d\sigma = \sqrt{(10r\sin^2\theta + 10r\cos^2\theta)^2} = 10r$. Si ha poi che la normale alla superficie in ogni punto concorde con l'orientamento di questa parametrizzazione dell'ellisse è

$$\hat{n}(\theta, 1) = \frac{1}{|d\sigma|}\det\begin{pmatrix} e_1 & 5\cos\theta & -5\sin\theta \\ e_2 & 2\sin\theta & 2\cos\theta \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1).$$

Questa parametrizzazione dell'ellisse per la regola della mano destra induce lo stesso orientamento su Γ della parametrizzazione assegnata. Dal teorema di Stokes si ricava (sfruttando la simmetria del dominio):

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \vec{F} \cdot ds &= \int_{\mathcal{E}} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_{\mathcal{E}} (-24x^2 - 6y)\, d\sigma \\ &= -24\int_{\mathcal{E}} x^2\, d\sigma = -24\int_0^{2\pi}\int_0^1 25r^2\cos^2\theta \cdot 10r\, dr\, d\theta = -1500\pi.\end{aligned}$$

Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \vec{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma(\theta) \cdot \dot{\gamma}(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3(2\sin\theta)^2 + 2, 1 - 8(5\cos\theta)^3, 2(5\cos\theta) - 6(2\sin\theta)^2)(-5\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-60\sin^3\theta - 10\sin\theta + 2\cos\theta - 2000\cos^4\theta)\, d\theta = -2000\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\, d\theta = -1500\pi\end{aligned}$$

che conferma il calcolo precedente.

Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta &= [\sin\theta\cos^3\theta]_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta \\ \int_0^{2\pi}\cos^4\theta &= \int_0^{2\pi}(1 - \sin^2\theta)\cos^2\theta\, d\theta = \pi - \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta,\end{aligned}$$

pertanto:

$$\pi - \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta,$$

da cui

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4},$$

e quindi $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^4\theta = \frac{3}{4}\pi$.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\theta,r)=\begin{pmatrix}-r\sin\theta & \cos\theta\\ r\cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -4r^3\end{pmatrix}.$$

Il prodotto vettoriale delle colonne di tale matrice è

$$\det\begin{pmatrix}e_1 & -r\sin\theta & \cos\theta\\ e_2 & r\cos\theta & \sin\theta\\ e_3 & 0 & -4r^3\end{pmatrix}=(4r^4\cos\theta,4r^4\sin\theta,-r).$$

L'elemento d'area è il modulo di tale prodotto vettoriale, quindi

$$d\sigma=r\sqrt{(16r^6+1)}.$$

(4) si ha $\phi(0,1/2)=(1/2,0,15/16)$. La normale è $\hat{n}=\frac{(-1/4,0,-1/2)}{\sqrt{1/16+1/4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}(-1,0,-2)$.

(5) Consideriamo la superficie ausiliaria $C=\{(x,y,0):\ x^2+y^2\le 1\}$. Si ha che $S\cup C$ è superficie chiusa che racchiude il volume V. Per il teorema della divergenza si ha che, orientando $S\cup C$ con la normale esterna a V:

$$0=\int_V \mathrm{div}\vec{F}\,dV=\int_{S\cup C}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma=\int_S\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma+\int_C\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma.$$

Pertanto, orientando S e C con la normale esterna a V si ottiene:

$$\int_S\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma=-\int_C\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma.$$

La normale a C è $(0,0,-1)$. Dal punto precedente, si è visto come tale orientamento sia l'opposto di quello definito dalla parametrizzazione assegnata su S, infatti il vettore $\hat{n}$ è normale unitaria interna a V. Pertanto si ha, passando in coordinate polari piane:

$$\begin{aligned}\Phi(S,\vec{F})&=\int_C\vec{F}\cdot(0,0,-1)\,d\sigma=-\int_C(2x-6y^2)\,dxdy=6\int_C y^2\,dxdy\\&=6\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin^2\theta\,drd\theta=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Procedendo per calcolo diretto, si ha:

$$\begin{aligned}\Phi(S,\vec{F})&=\int_0^{2\pi}\int_0^1\det\begin{pmatrix}F_1\circ\varphi & -r\sin\theta & \cos\theta\\ F_2\circ\varphi & r\cos\theta & \sin\theta\\ F_3\circ\varphi & 0 & 4r^3\end{pmatrix}dr\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1\Big(3(r\sin\theta)^2+2(1-r^4)\Big)4r^4\cos\theta\,dr\,d\theta+\\&\quad+\int_0^{2\pi}\int_0^1\Big(1-8(r\cos\theta)^3\Big)4r^4\sin\theta\,dr\,d\theta+\\&\quad-\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\Big(2(r\cos\theta)-6(r\sin\theta)^2\Big)\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo perché $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=2\int_1^{-1}t\,dt=0$ (si ponga $t=\cos\theta$), il secondo perché l'integranda come funzione di θ è dispari e 2π-periodica.

$$\Phi(S,\vec{F})=-\int_0^{2\pi}\int_0^1-6r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta=\frac{3}{2}\pi,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 14). Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$. Dalle condizioni iniziali si ricava $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$ Sostituendo, si ottiene al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-\ddot{U}(t)X(x) + 3U(t)\ddot{X}(x) = 0,$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-\ddot{U}(t)}{U(t)} = \frac{-3\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Si ha dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\ddot{U}(t) - \lambda U(t) = 0, \\ 3\ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione in $X(x)$ accoppiata con i dati $X(0) = X(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica è $3\mu^2 + \lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = -12\lambda$. Se $\Delta > 0$ allora necessariamente $\lambda < 0$, l'equazione caratteristica ammette due radici reali, distinte e non nulle. La soluzione generale è $X(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$ la cui derivata è $\dot{X}(x) = c_1\mu_1 e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 x}$. Sostituendo i dati $\dot{X}(0) = 0$ e $\dot{X}(\pi) = 0$ si otterrebbe il sistema (nelle incognite c_1 e c_2):

$$\begin{cases} c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0 \\ c_1\mu_1 e^{\mu_1\pi} + c_2\mu_2 e^{\mu_2\pi} = 0 \end{cases}$$

Il determinante di tale sistema è $\mu_1\mu_2(e^{\mu_2\pi} - e^{\mu_1\pi}) \neq 0$, pertanto l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile.

Se $\Delta = 0$ allora necessariamente $\lambda = 0$ e $\mu_1 = 0$ è l'unica radice dell'equazione caratteristica. Si ha $X(x) = c_1 + c_2 x$ come soluzione generale, derivando si ha $\dot{X}(x) = c_2$ e sostituendo le condizioni date si ottiene $c_2 = 0$, pertanto si ottiene la soluzione accettabile $X(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se $\Delta < 0$ allora necessariamente $\lambda > 0$ e si ottengono le radici complesse coniugate $\pm i\omega$ dove $\omega = \sqrt{\lambda/3}$. La soluzione generale è $X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$, derivando si ha $\dot{X}(x) = -\omega c_1\sin(\omega x) + \omega c_2\cos(\omega x)$ e sostituendo $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_2 = 0$, pertanto $X(x) = c_1\cos(\omega x)$. Affinché sia $\dot{X}(\pi) = 0$ si deve avere $\omega \in \mathbb{N}$ e per avere $\Delta < 0$ si deve avere $\omega \neq 0$, quindi $\lambda = 3n^2$, $n \neq 0$.

Si ha dunque $X_n(x) = c_n\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ che comprende le soluzioni accettabili per $\Delta \leq 0$.

Risolviamo l'equazione per U corrispondente a $\lambda = 3n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\ddot{U}(t) + 3n^2U(t) = 0$ con la condizione iniziale $U(0) = 0$. Se $n = 0$ si ha la soluzione $U(t) = c_1 + c_2 t$ e sostituendo la condizione iniziale, si ottiene $U(t) = c_2 t$ Se $n \neq 0$, si ha che l'equazione caratteristica è $\mu^2 + 3n^2 = 0$, le cui soluzioni sono $\mu_1 = in\sqrt{3}$ e la complessa coniugata $\mu_2 = -in\sqrt{3}$, la soluzione generale pertanto è $U(t) = c_1\cos(n\sqrt{3}t) + c_2\sin(n\sqrt{3}t)$ e poiché $U(0) = 0$ si ha $c_1 = 0$, quindi $U_n(t) = d_n\sin(n\sqrt{3}t)$. Si ha quindi, posto $k_n = c_n d_n$,

$$\begin{aligned} u_0(x,t) =& U(t)X(x) = k_0 t, \\ u_n(x,t) =& U(t)X(x) = k_n\sin(n\sqrt{3}t)\cos(nx), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(x,0) =& k_0, \\ \partial_t u_n(x,0) =& n\sqrt{3}k_n\cos(nx). \end{aligned}$$

Sviluppiamo il dato iniziale in serie di coseni

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n^2\pi}(1 - (-1)^n),$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Per confronto, si ha:

$$\partial_t u(x,0) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{3}k_n\cos(nx),$$

da cui si ottiene $k_0 = \pi/2$ e $n\sqrt{3}k_n = -\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$, quindi $k_n = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}$. La soluzione è quindi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\pi}{2}t - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(n\sqrt{3}t)\cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2}t - \frac{4\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)\sqrt{3}t)\cos((2k+1)x). \end{aligned}$$

Il termine generale della serie è maggiorato da $1/n^3$, termine generale di una serie convergente. Pertanto la serie converge totalmente, quindi uniformemente.

Svolgimento (Esercizio 15). Poniamo $z(t) = (x(t), y(t))$,

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{7}{4} & \dfrac{9}{8} \\ & \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{13}{4} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema diviene $\dot{z} = Az + B$. Calcoliamo gli autovalori di A, essi sono soluzioni di $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, ossia $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$. Quindi $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -4$. Poiché $\det(A) = 4 \neq 0$ l'unica soluzione stazionaria dell'omogeneo associato è $x(t) = y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ed essendo gli autovalori con parte reale strettamente negativa l'origine è un nodo proprio stabile per l'omogeneo associato. Calcoliamo gli autovettori $v_1 = (v_1^x, v_1^y)$ e $v_2 = (v_2^x, v_2^y)$:

$$0 = (A - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})v_1 = \begin{pmatrix} -3/4 & 9/8 \\ 3/2 & -9/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} \text{ da cui } -\frac{3}{4}v_1^x + \frac{9}{8}v_1^y = 0,$$

$$0 = (A - \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})v_2 = \begin{pmatrix} 9/4 & 9/8 \\ 3/2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} \text{ da cui } \frac{9}{4}v_2^x + \frac{9}{8}v_2^y = 0.$$

Possiamo quindi prendere $v_1 = (3,2)$ e $v_2 = (-1,2)$. Pertanto si ha:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi, posto $w(t) = P^{-1}z(t)$, $w(t) = (w_x(t), w_y(t))$:

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}(P^{-1}z) = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}(Az+B) = P^{-1}(APw+B) = P^{-1}APw + P^{-1}B = Dw + P^{-1}B,$$

dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale degli autovalori. Ciò equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{w}_x = -w_x + \frac{1}{4}\sin(2t) \\ \\ \dot{w}_y = -4w_y - \frac{1}{4}\sin(2t) \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione: l'omogenea è $\dot{w}_x + w_x = 0$, il polinomio caratteristico è $\mu - \lambda_1 = 0$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea è $w_x(t) = c_1 e^{-t}$. Per trovare una soluzione particolare applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati, essendo il termine noto della forma $\sin(\alpha t)$. Poiché

$2 = \alpha \neq \lambda_1 = -1$, cerchiamo una soluzione nella forma $A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$. Sostituendo e ricordando che $\alpha = 2$ si ottiene:

$$-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) + A\cos(2t) + B\sin(2t) = \frac{1}{4}\sin(2t),$$

che implica $A + 2B = 0$ e $B - 2A = 1/4$, quindi $A = -2B$ e $B + 4B = 1/4$ per cui $B = 1/20$, $A = -1/10$. Pertanto:

$$w_x(t) = c_1 e^{-t} - \frac{1}{10}\cos(2t) + \frac{1}{20}\sin(2t).$$

Risolviamo la seconda equazione: l'omogenea è $\dot{w}_y + 4w_y = 0$, il polinomio caratteristico è $\mu - \lambda_2 = 0$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea è $w_y(t) = c_2 e^{-4t}$. Per trovare una soluzione particolare applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati, essendo il termine noto della forma $\sin(\alpha t)$. Poiché $2 = \alpha \neq \lambda_1 = -4$, cerchiamo una soluzione nella forma $A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$. Sostituendo e ricordando che $\alpha = 2$ si ottiene:

$$-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) + 4A\cos(2t) + 4B\sin(2t) = -\frac{1}{4}\sin(2t),$$

che implica $2B + 4A = 0$ e $-2A + 4B = -1/4$, quindi $B = -2A$ e $B + 4B = -1/4$ per cui $B = -1/20$, $A = 1/40$. Pertanto:

$$w_y(t) = c_2 e^{-4t} + \frac{1}{40}\cos(2t) - \frac{1}{20}\sin(2t).$$

Poiché $z(t) = Pw(t)$, si ottiene:

$$\begin{cases} x(t) &= 3w_x(t) - w_y(t) = 3c_1 e^{-t} - c_2 e^{-4t} - \dfrac{13}{40}\cos(2t) + \dfrac{1}{5}\sin(2t) \\ \\ y(t) &= 2w_x(t) + 2w_y(t) = 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-4t} - \dfrac{3}{20}\cos(2t). \end{cases}$$

Svolgimento (Esercizio 16). Poniamo:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x)^2 - (x^2 + y^2)$$

È utile osservare come $f(x, -y) = f(x, y)$ pertanto l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

(1) In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= (\rho^2 - 2\rho\cos\theta)^2 - \rho^2 = \rho^2((\rho - 2\cos\theta)^2 - 1) \\ &= \rho^2(\rho - 2\cos\theta - 1)(\rho - 2\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

Quindi $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \ \rho - 2\cos\theta - 1 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\}, \\ \Gamma_2 &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \ \rho - 2\cos\theta + 1 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\}, \end{aligned}$$

e questa scrittura[1] comprende anche l'origine $(0, 0)$.

(2) Poiché $f(0, 0) = 0$ si ha $(0, 0) \in \Gamma$. Studiamo le intersezioni con l'asse delle y ponendo $x = 0$: $f(0, y) = y^4 - y^2 = 0$ quindi le intersezioni sono $O = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$. Analogamente, studiamo le intersezioni con l'asse delle x ponendo $y = 0$:

$$f(x, 0) = (x^2 - 2x)^2 - x^2 = (x^2 - 2x - x)(x^2 - 2x + x) = x^2(x - 3)(x - 1),$$

quindi le intersezioni sono $P_3 = (1, 0)$, $P_4 = (3, 0)$ e $O = (0, 0)$.

[1] Era importante osservare come Γ in coordinate polari fosse espresso da *due rami differenti* ovvero da $|\rho - 2\cos\theta| = 1$. In generale non è lecito passare da $(\rho - 2\cos\theta)^2 = 1$ a $\rho - 2\cos\theta = 1$, perché in questo modo si sta escludendo uno dei due rami. Ricordiamo che $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Inoltre è *necessario* aggiungere la condizione $\rho \geq 0$, come risulterà evidente nel calcolo del massimo e minimo vincolato.

Calcoliamo il differenziale di f:

$$\begin{aligned}df(x,y) &= \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy\\ &= (4(x^2+y^2-2x)(x-1)-2x)\,dx + (4(x^2+y^2-2x)y-2y)\,dy.\end{aligned}$$

Si ha quindi $df(P_1) = -4\,dx + 2\,dy$, pertanto esiste $q_1 \in \mathbb{R}$ tale per cui la retta $-4x+2y = q_1$ sia tangente a Γ in P_1. Sostituendo si ha $q_1 = 2$ e la retta tangente è $y = 2x+1$. Poiché Γ è simmetrico rispetto alle ascisse, e P_2 è il simmetrico rispetto a tale asse di P_1, si ha che la retta tangente a Γ in P_2 è la simmetrica rispetto all'asse delle ascisse di quella tangente in P_1, ovvero $y = -2x-1$. Si ha poi $df(P_3) = -2\,dx$, pertanto la tangente a Γ in questo punto è la retta verticale $x = 1$, e analogamente si ha $df(P_4) = 18\,dx$, pertanto la tangente a Γ in questo punto è la retta verticale $x = 3$.

(3) Osserviamo che $\partial_y f(P_3) = \partial_y f(P_4) = 0$, quindi in questi punti il Teorema di Dini non è applicabile (la tangente a Γ è verticale). Invece si ha $\partial_y f(P_1) = -\partial_y f(P_2) \neq 0$ e quindi per il Teorema di Dini esistono φ_1 e φ_2 con le proprietà richieste. Si ha che $\varphi_1'(0)$ e $\varphi_2'(0)$ sono i coefficienti angolari delle tangenti a Γ rispettivamente in P_1 e P_2, ovvero $\varphi_1'(0) = -\varphi_2'(0) = 2$.

(4) Si ha $h(x,y) \geq 0$ e l'uguaglianza vale solo nell'origine. Quindi l'origine è l'unico minimo assoluto per h. Inoltre essa appartiene a Γ, quindi è l'unico minimo assoluto vincolato e $h(0,0) = 0$. Studiamo i massimi e minimi vincolati di h su Γ_1 e su Γ_2 separatamente. In coordinate polari si ha che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho$, Γ_1 è dato[2] da $\rho_1(\theta) = 2\cos\theta + 1$, $\rho_1 \geq 0$ e Γ_2 è dato da $\rho_2(\theta) = 2\cos\theta - 1$, $\rho_2 \geq 0$. Individuiamo il dominio in cui sono definite ρ_1 e ρ_2 alla luce della condizione $\rho \geq 0$. Si ha che ρ_1 è definito per $\cos\theta > -1/2$, quindi $\theta \in \mathrm{dom}(\rho_1) := [0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]$, mentre ρ_2 è definita per $\cos\theta > 1/2$, quindi $\mathrm{dom}(\rho_2) := \theta \in [0, \pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$.

Se si sceglie di parametrizzare θ tra $-\pi$ e π (è assolutamente la stessa cosa), si ottiene $\mathrm{dom}(\rho_1) := [-2\pi/3, 2\pi/3]$ e $\mathrm{dom}(\rho_2) := [-\pi/3, \pi/3]$. Questa scelta che, ribadiamo, è perfettamente equivalente al parametrizzare θ tra 0 e 2π, presenta il vantaggio permettere una scrittura più semplice.

Si tratta di studiare i massimi e minimi delle funzioni ρ_1 e ρ_2 sotto i vincoli $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, ovvero rispettivamente in $\mathrm{dom}(\rho_1)$ e in $\mathrm{dom}(\rho_2)$. Cominciamo con lo studiare tale funzioni nell'interno dei domini in cui sono definite. Si ha $\rho_1'(\theta) = \rho_2'(\theta) = -2\sin\theta$. Si ha $\rho_1'(\theta) = \rho_2'(\theta) \leq 0$ per $0 < \theta < \pi$ e l'uguaglianza vale per $\theta \in \{0, \pi\}$.

Osserviamo che $\pi \notin \mathrm{dom}(\rho_1)$ e $\pi \notin \mathrm{dom}(\rho_2)$, quindi π non è un valore accettabile: infatti si ha $\rho_1(\pi) = -1$ e $\rho_2(\pi) = -3$ non accettabile alla luce della condizione $\rho_1 \geq 0$ e $\rho_2 \geq 0$.

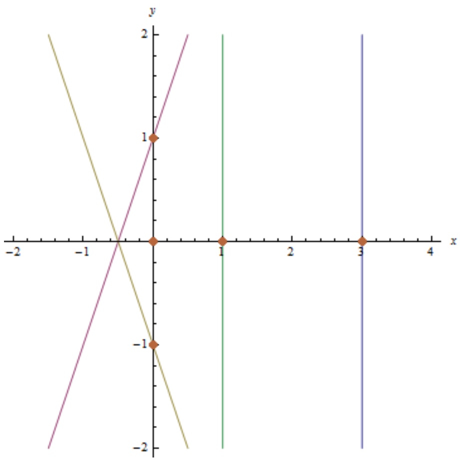
Per quanto riguarda 0, calcoliamo $\rho_1''(\theta) = \rho_2''(\theta) = -2\cos\theta$ e $\rho_1''(0) = \rho_2''(0) = -2 < 0$, quindi si ha che $\rho_1(0) = 3$ accettabile e massimo relativo, $\rho_2(0) = 1$ accettabile massimo relativo.

Rimangono da studiare i punti sulla frontiera dei domini: si ha $\rho_1(\pm 2\pi/3) = \rho_1(4\pi/3) = \rho_2(\pm\pi/3) = \rho_2(5\pi/3) = 0$. Tutti questi punti corrispondono quindi in coordinate cartesiane all'origine ($\rho = 0$ caratterizza l'origine) pertanto si ottiene nuovamente che l'origine è minimo assoluto. Il massimo assoluto è raggiunto nel punto corrispondente a $\rho_M = \rho_1(0)$ e $\theta_M = 0$, quindi è $(\rho_M\cos\theta_M, \rho_M\sin\theta_M) = (3,0)$ e vale $h(3,0) = 3$, l'altro massimo relativo è raggiunto nel punto corrispondente a $\rho_m = \rho_1(0)$ e $\theta_m = 0$, quindi è $(\rho_m\cos\theta_m, \rho_m\sin\theta_m) = (1,0)$ e vale $h(1,0) = 1$.

L'insieme Γ è chiuso perché f è continua e si è appena visto che è limitato perché contenuto nella palla chiusa centrata nell'origine e di raggio 3, quindi è compatto.

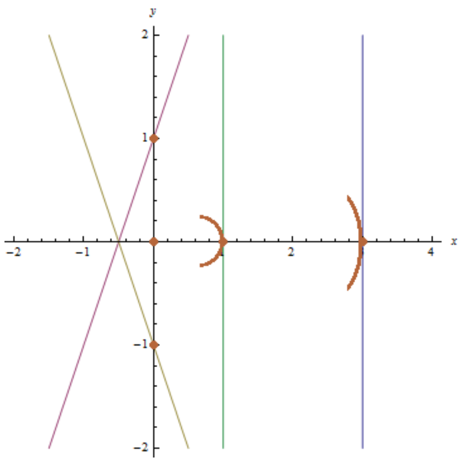
(5) Vogliamo ora dare un'idea dell'andamento qualitativo.

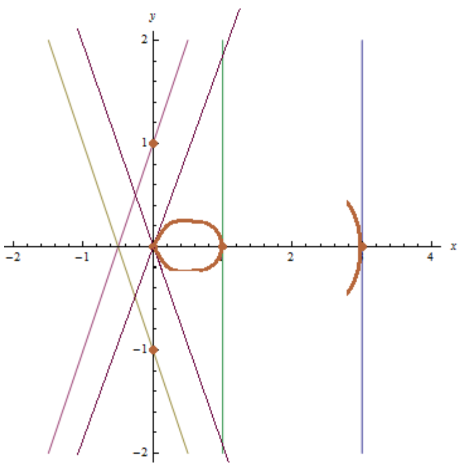
[2]Qui risulta fondamentale l'aver correttamente individuato i due rami e il richiedere comunque $\rho \geq 0$.



1. Ecco la situazione iniziale con i punti e le tangenti finora trovate.

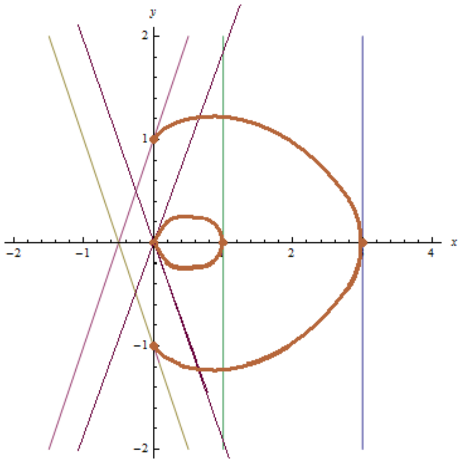
2. Vi è una simmetria rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $(3,0)$ è max. ass. per la distanza dall'origine. Non vi sono punti di Γ a dx della retta $x = 3$. Attorno a tale punto non si ha un'esplicitazione $y = y(x)$, però si ha un'esplicitazione $x = x(y)$. Analogamente $(1,0)$ è massimo relativo per la distanza dall'origine, pertanto vicino a tale punto non vi sono punti a dx della retta $x = 1$, non si ha un'esplicitazione $y = y(x)$, però si ha un'esplicitazione $x = x(y)$.

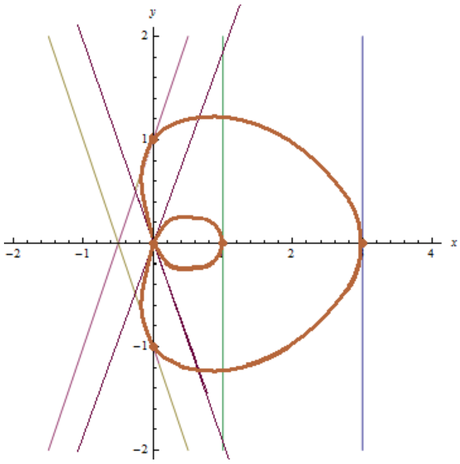




3. Ricordiamo che il ramo corrispondente in coordinate polari a $\rho_2(\theta)$ raggiunge la sua massima distanza dall'origine proprio in $(1,0)$ e poi agli estremi del dominio, ovvero per $\theta = \pm\pi/3$ tale ramo ritorna in 0. Inoltre si ha sempre che $\rho_2 \leq \rho_1$. In figura sono riportate anche le due rette corripondenti ad un angolo di $\pm\pi/3$ con l'asse delle ascisse. Sfruttando la simmetria rispetto all'asse delle ascisse ci si porta nella situazione indicata.

4. Studiamo ora il ramo corrispondente a ρ_1. Poiché $\pm\pi/2 \in \mathrm{dom}(\rho_1)$, si ha che tale ramo congiunge il punto $(3, 0)$ (massima distanza dall'origine) con i punti $(0, \pm 1)$ che sono le uniche due intersezioni di Γ con l'asse delle ascisse. Tale ramo deve inoltre essere tangente alle due rette passanti per $(0, \pm 1)$ Inoltre non può intersercare il ramo di ρ_2.





5. Partendo dai punti $(0, \pm 1)$, sappiamo che il ramo ρ_1 deve ritornare nell'origine perché agli estremi del dominio di ρ_1 si ha $\rho_1 = 0$. Quindi si ha un cappio nell'origine, come ci si poteva attendere da $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Questo *concludeva* lo studio qualitativo richiesto dall'esercizio. Con ulteriori calcoli, un po' lunghi ma non particolarmente complicati, si può essere ancora più precisi ed arrivare a tracciare un grafico più dettagliato. Ribadiamo che comunque, questa parte, *esulava* dalle richieste dell'esercizio, la riportiamo solo per completezza.

Studiamo i punti critici di x vincolati a Γ, ovvero i punti a tangente verticale (diversi dall'origine). Essi risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \partial_y f(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} y = \pm\dfrac{\sqrt{-2x^2 + 4x + 1}}{\sqrt{2}}, \text{ oppure } y = 0 \\ f(x, y) = 0. \end{cases} \qquad ,$$

da cui $y = 0$ oppure

$$-x^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + 4x + 1\right) - 2x\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2x^2 - 4x - 1\right) = 0,$$

perciò $x = -1/8$. Da $y = 0$ si ottengono i punti $O = (0, 0)$ (non accettabile) e $A = (3, 0)$, mentre da $x = -1/8$ si ha $B_\pm = \left(-\dfrac{1}{8}, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$.

Studiamo i punti critici di y vincolati a Γ, ovvero i punti a tangente orizzontale (diversi dall'origine). Essi risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0, \\ f(x,y) = 0. \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = \pm\sqrt{\dfrac{-2x^3+6x^2-3x}{2(x-1)}}, \\ f(x,y) = 0. \end{cases},$$

da cui

$$-\frac{x\left(8x^2-15x+6\right)}{4(x-1)^2} = 0,$$

perciò $x = 0$ e $x = \dfrac{1}{16}(15 \pm \sqrt{33})$. Per $x = 0$ si ottiene $(0,0)$ (non accettabile). Per $x = \dfrac{1}{16}(15-\sqrt{33})$ si ottengono i punti:

$$C_\pm = \left(\frac{1}{16}(15-\sqrt{33}), \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}\right),$$

per $x = \dfrac{1}{16}(15+\sqrt{33})$, si ottengono i punti:

$$D_\pm = \left(\frac{1}{16}(15+\sqrt{33}), \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right).$$

Confrontando questi valori con l'origine (che viene studiata a parte), e ricordando la compattezza di Γ, osserviamo che il punto A è di massimo assoluto per x vincolata a Γ, i punti $B_\pm$ sono di minimo assoluto per x vincolata a Γ, il punto D_+ è di massimo assoluto per y vincolata a Γ e il punto D_- è di minimo assoluto vincolato a Γ.

Consideriamo una retta $x = k$, e studiamo il numero di soluzioni y dell'equazione $f(k,y) = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = f(k,y) &= (k^2+y^2-2k)^2 - (k^2+y^2) \\ &= y^4 + (2k^2-4k-1)y^2 + (k^2-2k)^2 - k^2 \\ &= y^4 + (2k^2-4k-1)y^2 + k^2(k-3)(k-1) \end{aligned}$$

Posto $t = y^2$, cerchiamo soluzioni non negative di $p_k(t) = t^2+(2k^2-4k-1)t+k^2(k-3)(k-1) = 0$. Si ha $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$ e $p_k(0) = k^2(k-3)(k-1)$. Si ha $p_k(0) > 0$ per $k < 1$ o $k > 3$.

(a) se $1 < k < 3$ l'equazione $p_k(t) = 0$ ammette due soluzioni distinte t^- e t^+ di segno discorde perché $p_k(0) < 0$ e $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$. Sia $t^+ > 0$, allora si ottiene $y_1 = \sqrt{t^+}$ e $y_2 = -\sqrt{t^-}$. Dato $1 < x < 3$ esistono quindi $\varphi_1(x)$ e $\varphi_4(x)$, distinti, $\varphi_1(x) < 0 < \varphi_4(x)$ tali che $(x,y) \in \Gamma$ se e solo se $y \in \{\varphi_1(x), \varphi_4(x)\}$.

(b) se $k < 1$ o $k > 3$ ma $k \neq 0$, allora $p_k(0) > 0$, quindi le soluzioni reali di $p_k(y) = 0$, se esistono, sono entrambe strettamente positive o entrambe strettamente negative: se l'ascissa del vertice delle parabola $z = p_k(t)$ è positiva, allora se esistono sono entrambe strettamente positive, altrimenti o non esistono oppure sono entrambe strettamente negative. Le radici negative non sono accettabili. Tale ascissa è $z_k = -(2k^2-4k-1)/2$. Si ha $z_k > 0$ per $\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{6}\right) < k < \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{6}\right)$. Poiché

$$\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{6}\right) < 0 < 1 < \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{6}\right) < 3,$$

si ottiene che se $p_k(y) = 0$ ammette radici reali, esse sono due radici strettamente positive per $\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{6}\right) < k < 0$ e per $0 < k < 1$.Il discriminante di $p_k(t) = 0$ è

$$\Delta = (2k^2 - 4k - 1)^2 - 4k^2(k-3)(k-1) = 1 + 8k.$$

Per $0 < k < 1$ e $-1/8 < k < 0$ tale discriminante è positivo, quindi si hanno due soluzioni strettamente positive. Pertanto per $k \in]0,1[\cup]-1/8, 0[$, la retta $x = k$ interseca Γ in quattro punti distinti, due a due simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Dato $\frac{1}{2}(2-\sqrt{6}) < x < 1$ esistono quindi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$, distinti, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < 0 < \varphi_3(x) < \varphi_4(x)$ tali che $(x, y) \in \Gamma$ se e solo se $y \in \{\varphi_i(x) : i = 1, 2, 3, 4\}$.

(c) per $k = 0$, si hanno le intersezioni con l'asse y, quindi $O = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = 0$. Poniamo $\varphi_1(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 1$ e $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$.

$$df(x, y) = (4(x^2 + y^2 - 2x)(x-1) - 2x)\, dx + (4(x^2 + y^2 - 2x)y - 2y)\, dy.$$

Si ha

(i) $df(0, 0) = 0$, quindi in un intorno di $(0, 0)$ non è possibile applicare il Teorema di Dini.

(ii) $df(0, 1) = -4\, dx + 2\, dy$ quindi in un intorno di $(0, 1)$ è possibile applicare il Teorema di Dini. In un intorno di tale punto φ_4 è di classe C^1 e $\varphi_4(0) = 1/2 > 0$

(iii) $df(0, -1) = -4\, dx - 2\, dy$ quindi in un intorno di $(0, -1)$ è possibile applicare il Teorema di Dini. In un intorno di tale punto φ_1 è di classe C^1 e $\varphi_1(0) = -1/2 < 0$

(d) per $k = 1$, si ha $p_1(y) = y^2(y^2 - 3)$ da cui si ottengono le intersezioni $(1, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$. Poniamo $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 1$.

(e) per $k = 3$, si ha $p_3(y) = y^2(y^2 + 11)$ da cui si ottiene la sola intersezione $(3, 0)$. Poniamo $\varphi_1(3) = \varphi_4(3) = 0$

(f) per $k = -1/8$ si ha $p_{-1/8}(y) = -(1/64) - y^2 + (17/64 + y^2)^2$ da cui si ottengono le due intersezioni $(-1/8, -\sqrt{15}/8)$ e $(-1/8, +\sqrt{15}/8)$. Poniamo $\varphi_4(-1/8) = \varphi_3(-1/8) = (-1/8, +\sqrt{15}/8)$ e $\varphi_1(-1/8) = \varphi_2(-1/8) = (-1/8, -\sqrt{15}/8)$

Le quattro funzioni φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sono due a due simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Inoltre la tangente a Γ nei punti (x, y) con $x \neq 0, 1, 3$ non è mai verticale. Per il teorema di Dini, queste funzioni sono quindi C^1 negli intervalli aperti che non contengano $x = 0, 1, 3$ e in cui siano definite. Per quanto visto al punto precedente, si ha che φ_1 e φ_4 sono C^1 all'interno di tutto il loro dominio.

Studiamo ora i massimi e minimi relativi di $y = \rho \sin\theta$ vincolati a Γ, ovvero i massimi e minimi delle funzioni $g_1(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta = \sin 2\theta + \sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]$ e la funzione $g_2(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = \sin 2\theta - \sin\theta$ con $\theta \in [0, \pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$. Se h è nulla anche g_1 e g_2 sono nulle, quindi $g_1(2\pi/3) = g_1(4\pi/3) = g_2(\pi/3) = g_2(5\pi/3) = 0$. Si ha quindi

$$g_1'(\theta) = 2\cos 2\theta + \cos\theta = 4\cos^2\theta + \cos\theta - 2,$$

che si annulla per

$$\cos\theta_1^* = \frac{1}{8}\left(-1 + \sqrt{33}\right), \qquad \cos\theta_2^* = -\frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{33}\right).$$

Si ha $\cos\theta_1^* > -1/2$, quindi θ_1^* è accettabile, $\cos\theta_2^* < -1/2$ non accettabile. Analogamente:

$$g_2'(\theta) = 2\cos 2\theta - \cos\theta = 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2,$$

che si annulla per

$$\cos\theta_3^* = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{33}\right), \qquad \cos\theta_4^* = \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{33}\right).$$

Si ha $\cos\theta_3^* > 1/2$, quindi θ^*3 è accettabile, $\cos\theta_2^* < 1/2$ non accettabile. Posto $\rho_1^* = 2\cos\theta_1^* + 1$ e $\rho_3^* = 2\cos\theta_3^* - 1$, si ottengono quindi gli unici punti critici:

$$x_1 = \rho_1^* \cos\theta_1^* = \left(2\left(\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right)\right)+1\right)\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right) = \frac{15+\sqrt{33}}{16}$$

$$x_3 = \rho_3^* \cos\theta_3^* = \left(2\left(\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right)\right)-1\right)\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right) = \frac{15-\sqrt{33}}{16}.$$

Vogliamo ora stabilire una corrispondenza tra le curve $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$ e le curve $\varphi_i(x)$, $i = 1,2,3,4$. A tal proposito ricordiamo che $\varphi_4(x)$ è sempre maggiore di $\varphi_3(x) > 0$, e che φ_1 e φ_2 sono le simmetriche di φ_4 e φ_3 rispetto all'asse delle asccisse. Quindi, nel primo quadrante laddove esistono entrambe le curve in coordinate polari $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$, la curva tra le due che in coordinate cartesiane ha l'ordinata maggiore rappresenterà φ_4 e l'altra rappresenterà φ_3. Ricordo che l'ordinata è data da $\rho_1(\theta)\sin\theta$ e $\rho_2(\theta)\sin\theta$.

Osserviamo che se $\theta \in [0,\pi] \cap \mathrm{dom}(\rho_1) \cap \mathrm{dom}(\rho_2)$, si ha $\rho_1(\theta)\sin\theta > \rho_2(\theta)\sin\theta$. Quindi nei punti del primo quadrante la curva $\rho_1(\theta)$ descrive φ_4 e la curva ρ_2 descrive φ_3. Per cui x_1^* è punto critico di φ_4, e quindi anche della sua simmetrica φ_1, e x_3^* è punto critico di φ_3, e quindi anche della sua simmetrica φ_2. Si ha che $\varphi_3(0) = \varphi_3(3) = 0$, $\varphi_3(x) > 0$ in $]0,1[$, e φ_3 ha un solo punto critico, tale punto deve essere di massimo relativo per φ_3 e quindi di minimo relativo per φ_2.

Poiché $x_1^* > 0$ e $\varphi_4(0) > 0$ si ha che x_1^*, unico punto critico per $0 < x < 3$, deve essere un massimo assoluto per φ_4 e simmetricamente un minimo assoluto per φ_1. Determiniamo esattamente i valori di x^* e y^*:

(a) Sostituendo nell'equazione per determinare i valori del massimo, si ha:

$$0 = f(x_1^*, y) = \frac{-3(693+283\sqrt{33}) - 128(175+\sqrt{33})y^2 + 8192y^4}{8192},$$

che ha come soluzioni reali (si pone $y = t^2$ e si sceglie l'unica soluzione t positiva. Allora $y = \pm\sqrt{t}$)

$$\varphi_1(x_1^*) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}, \qquad \varphi_4(x_1^*) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}.$$

(b) Sostituendo il valore di x_2^*, si ha:

$$0 = f(x_2^*, y) = \frac{8192y^4 + 128\left(\sqrt{33}-175\right)y^2 + 849\sqrt{33} - 2079}{8192}.$$

Con la sostituzione $y^2 = t$ si ottiene un'equazione di secondo grado in t che ha due radici positive. I valori di $\varphi_2(x_2^*)$ e $\varphi_3(x_3^*)$ sono i valori dati da $\pm\sqrt{t}$ dove t è la radice di modulo minimo dell'equazione: infatti l'altra radice dà luogo ai valori di $\varphi_1(x_2^*)$ e $\varphi_4(x_2^*)$ (che infatti in modulo sono strettamente maggiori dei precedenti).

$$\varphi_2(x_3^*) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}, \qquad \varphi_3(x_3^*) = +\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}.$$

In figura le rette verticali da sinistra a destra sono:

(a) la retta $x = -1/8$, tangente a Γ nei punti $(-1/8, \pm\sqrt{15}/8)$. Non vi sono punti di Γ con ascissa strettamente minore di $-1/8$;

(b) la retta $x = 0$, che interseca Γ nei punti $(0,0)$, $(0,\pm 1)$;

(c) la retta $x = \frac{15-\sqrt{33}}{16}$ che interseca Γ in quattro punti, i due punti più vicini all'asse delle ascisse sono estremali per le funzioni implicitamente definite da γ passanti per essi, tali punti sono $\left(\frac{15-\sqrt{33}}{16}, \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}\right)$;

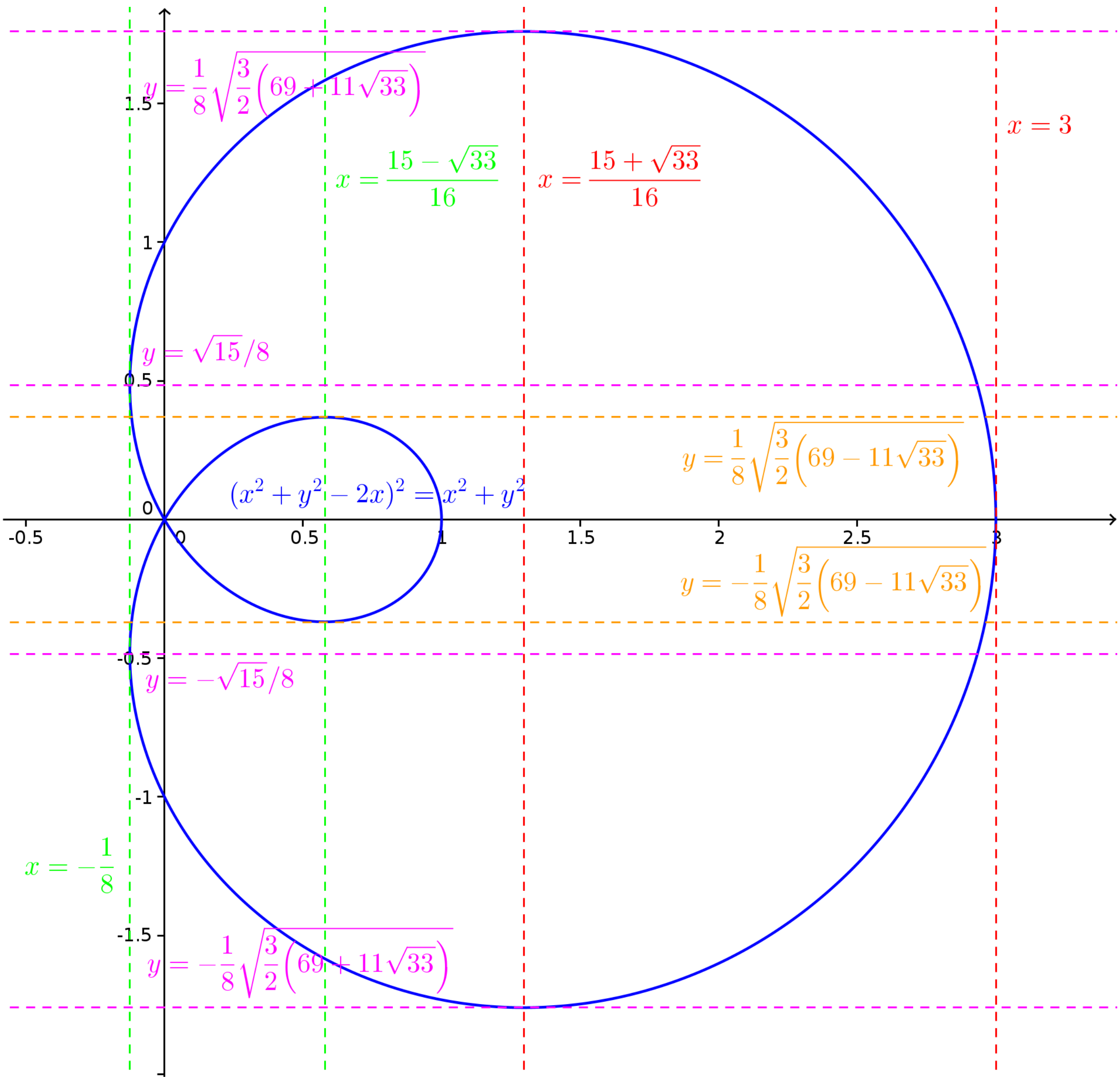


FIGURA 1. La *Chiocciola di Pascal* e alcune rette significative

(d) la retta $x = \frac{15+\sqrt{33}}{16}$ che interseca Γ in due punti, esso sono i punti di ordinata massima e minima appartenenti a Γ, e sono $\left(\frac{15+\sqrt{33}}{16}, \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right)$.

(e) la retta $x = 3$, tangente a Γ nell'unico punto $(3, 0)$. Non vi sono punti di Γ con ascissa strettamente maggiore di 3.

La *Chiocciola di Pascal* è quindi inscritta nel rettangolo

$$R = [-1/8, 3] \times \left[-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}, \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right].$$

OSSERVAZIONE 1. Nella seconda versione del compito, l'insieme era dato da

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 + 2x)^2 = x^2 + y^2\}.$$

Pertanto tale insieme è il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate di quello studiato nell'esercizio precedente, quindi tutti i risultati dell'esercizio precedente valgono in questo caso qualora si mandi x in $-x$, y rimanga invariato, e in coordinate polari si mandi θ in $\pi-\theta$ (quindi $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ e $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$).

Svolgimento (Esercizio 17). La retta $y=x$ e l'iperbole $xy=1$ si incontrano nel primo quadrante solo nel punto $(1,1)$, inoltre per $x\in]0,1[$ si ha $1/x>x$. Il dominio D è normale rispetto all'asse x, decomponiamolo nelle due parti $D\cap\{(x,y):\,0<x<1\}$ e $D\cap\{(x,y):\,x>1\}$. Si ha:

$$I(\alpha)=\iint_D \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^x \frac{1}{x^\alpha}\,dy\right)dx+\int_1^{+\infty}\left(\int_0^{1/x}\frac{1}{x^\alpha}\,dy\right)dx$$
$$=\int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Se $\alpha\le 0$ il secondo integrale vale $+\infty$, mentre il primo è sempre maggiorato da 1 perché l'integranda è minore o uguale a 1 e l'intervallo di integrazione ha lunghezza 1, quindi $I(\alpha)=+\infty$ se $\alpha\le 0$.

Se $\alpha\ge 2$ il primo integrale vale $+\infty$, mentre il secondo è finito quindi $I(\alpha)=+\infty$ se $\alpha\ge 2$.

Per $0<\alpha<2$ entrambi gli integrali sono convergenti, inoltre se $0<\alpha<2$ non si ha mai $1-\alpha=-1$ oppure $1+\alpha=1$, e quindi

$$I(\alpha)=\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{\alpha}.$$

Altro modo per procedere, consideriamo il dominio D normale rispetto all'asse delle y. Fissiamo $y\in[0,1]$. Allora x varia tra y e $1/y$, quindi:

$$I(\alpha)=\int_0^1\left(\int_y^{1/y}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\right)dy.$$

Si ha allora

$$I(1)=\int_0^1\left(\int_y^{1/y}\frac{1}{x}\,dx\right)dy=\int_0^1(\log(1/y)-\log(y))\,dy=-2\int_0^1\log(y)\,dy=-2[y\log y-y]_0^1$$
$$=2+2\lim_{y\to 0^+}(y\log y-y)=2<+\infty.$$

Supponiamo ora $\alpha\neq 1$, si ha:

$$I(\alpha)=\int_0^1\left(\int_y^{1/y}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\right)dy=\frac{1}{-\alpha+1}\int_0^1[x^{-\alpha+1}]_{x=y}^{x=1/y}$$
$$=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1(y^{\alpha-1}-y^{-\alpha+1})\,dy=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\left(y^{\alpha-1}-\frac{1}{y^{\alpha-1}}\right)dy$$

Se $\alpha\neq 1$ e $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 2$ si ottiene

$$I(\alpha)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\alpha}y^\alpha-\frac{1}{2-\alpha}y^{-\alpha+2}\right]_\varepsilon^1.$$

Se $\alpha<0$ o $\alpha>2$ il limite risulta $+\infty$. Inoltre:

$$I(0)=\int_0^1\left(\int_y^{1/y}dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{y}-y\right)dy=+\infty,$$
$$I(2)=-\int_0^1(y-y^{-1})\,dy=+\infty$$

Per $0 < \alpha < 2$ si ottiene invece:

$$I(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}\right) = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha},$$

che conferma il risultato precedente.

Osservazione 2. Nella seconda versione del compito, si aveva come D la regione illimitata del primo quadrante compresa tra l'iperbole di equazione $xy = 1$, la retta $y = x$ e l'asse delle y e si calcolava

$$\iint_D \frac{1}{y^\alpha}\, dx\, dy.$$

Rispetto alla versione dell'esercizio precedente si è applicata una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il risultato e il procedimento sono gli stessi: si scambi semplicemente x con y.

Svolgimento (Esercizio 18). Maggioriamo il termine generale della serie in modo appropriato. Si ha:

$$\left|\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}} e^{-4t}\cos(nx)\right| \leq \left|\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right|^n.$$

Poiché $|(\sqrt{5}-3)/2| < 1$, la serie geometrica di ragione $(\sqrt{5}-3)/2$ è convergente[3] e si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-5}{10} < +\infty.$$

Pertanto l'estremo superiore del termine generale è in modulo maggiorato dal termine generale di una serie convergente, quindi la serie converge totalmente e di conseguenza uniformemente e puntualmente su $[0,1] \times [0, 2\pi]$, e la sua somma per $(t, x) = (0, 0)$ è proprio $\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-3}{5-\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Osservazione 3. Nella seconda versione del compito, la serie era data da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}} e^{-12t}\cos(nx).$$

Esattamente come prima si riconosce che $|(\sqrt{7}-3)/2| < 1$, e vale la maggiorazione

$$\left|\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}} e^{-12t}\cos(nx)\right| \leq \left|\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}\right)^n\right|.$$

Ancora come prima si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{7}-3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{7}-4}{9} < +\infty.$$

Si ha ancora convergenza totale, uniforme e puntuale e la somma per $(t, x) = (0, 0)$ vale $\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{7}-4}{9}$.

Svolgimento (Esercizio 19). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$.

---

[3]Ricordiamo che se $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, tuttavia nell'esercizio la somma non parte da 0 ma da 1, quindi $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ da cui $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1$.

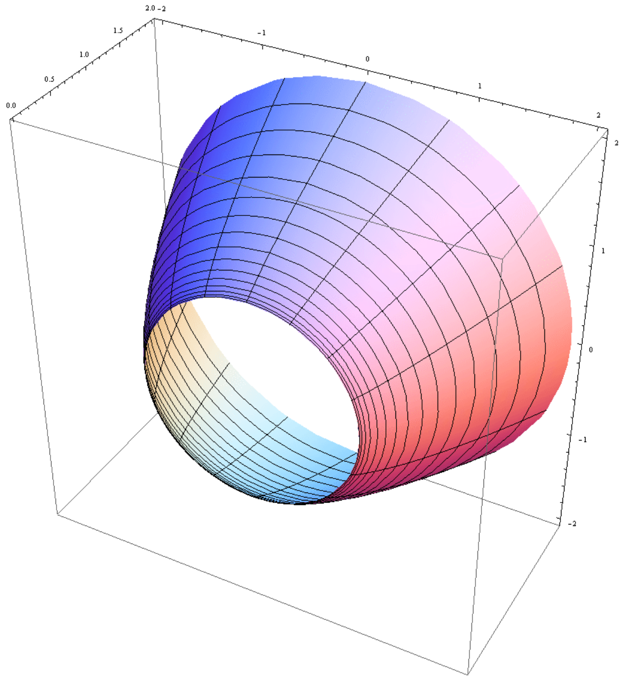


FIGURA 2. La superficie S.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0,\\
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \vec{e}_2(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \vec{e}_3(\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\\
&= (3+2y, -12x+2z, -1+8x).
\end{aligned}$$

Il rotore non è nullo, per cui il campo non è conservativo.

(2) La curva γ è il bordo del cerchio D centrato in $(0,2,0)$ di raggio 5 contenuto nel piano $y=2$. La normale unitaria a D è costante e vale $\hat{n}(D) = (0,\pm 1,0)$. Determiniamo il verso positivo dell'orientamento della normale indotta dalla parametrizzazione: si deve avere per la regola della mano destra $\hat{n}(D) = (0,-1,0)$. Altro modo: un osservatore con i piedi su D vede il bordo $\gamma(t)$ percorso in senso antiorario solo se il vettore che va dai suoi piedi alla testa è parallelo e concorde a $\hat{n}(D)$. Per il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\ell = \int_D \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma,$$

nel nostro caso si ha che tali integrali sono:

$$\int_D \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_D (12x-2z)\,d\sigma = 0,$$

perché D è simmetrico rispetto alla sostituzione $x\mapsto -x$, $y\mapsto y$ e $z\mapsto -z$ e l'integranda è dispari rispetto alla medesima sostituzione.

Verifichiamo il risultato ottenuto per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\,d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}(2+25\sin^2 t, 100\cos^2 t - 15\sin t, 150\cos^2 t+4)\cdot(-5\sin t, 0, 5\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-10\sin t - 125\sin^3 t + 750\cos^3 t + 20\cos t)\,dt = 0,\end{aligned}$$

per le simmetrie di seno e coseno e la periodicità.

(3) Si ha

$$\operatorname{Jac}\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 3r^2+2r & 0\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Posto:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 3r^2+2r & 0\end{pmatrix}, \qquad \det A_1 = r\left(3r^3+2r^2+3r+2\right)\sin(\theta), \tag{1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \det A_2 = 2r(1+r^2), \tag{2}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3r^2+2r & 0\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \det A_3 = r\left(3r^3+2r^2+3r+2\right)\cos(\theta), \tag{3}$$

Per il Teorema di Binet si ha:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 A_1 + \det^2 A_2 + \det^2 A_3}\,dr\,d\theta = r(r^2+1)\sqrt{9r^2+12r+8}.$$

(4) Dobbiamo trovare $(r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[$ tali per cui $\varphi(r,\theta) = (5/4, 3/8, 0)$ ossia:

$$\begin{cases}((r^2+1)\cos\theta = 5/4,\\ r^3+r^2 = 3/8,\\ (r^2+1)\sin\theta = 0.\end{cases}$$

Dall'ultima relazione si ha $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. Sostituendo nella prima, si ha che $\theta = 0$ e $r^2+1 = 5/4$, quindi $r = 1/2$. Dette $\partial_r\varphi$ e $\partial_\theta\varphi$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi$, si ha $\partial_r\varphi(1/2,0) = (1, 7/4, 0)$ e $\partial_\theta\varphi(0,0,5/4)$. Il prodotto vettoriale di questi vettori porge:

$$\partial_r\varphi(1/2,0)\wedge\partial_\theta\varphi(1/2,0) = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & 1 & 0\\ \vec{e}_2 & 7/4 & 0\\ \vec{e}_3 & 0 & 5/4\end{pmatrix} = \left(\frac{35}{16}, -\frac{5}{4}, 0\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{7}{4}, -1, 0\right),$$

per cui

$$\hat{n}(5/4,3/8,0) = \frac{\partial_r\varphi(1/2,0)\wedge\partial_\theta\varphi(1/2,0)}{|\partial_r\varphi(1/2,0)\wedge\partial_\theta\varphi(1/2,0)|} = \frac{4}{\sqrt{65}}\left(\frac{7}{4}, -1, 0\right).$$

(5) Utilizziamo il teorema della divergenza. Poniamo:

$$D_0 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y = 0, x^2+z^2 = 1\}$$
$$D_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y = 2, x^2+z^2 = 4\}.$$

La superficie formata dall'unione di D_0, D_1 e S è una superficie chiusa che racchiude il volume V. Per il teorema della divergenza, se la normale è orientata in modo da essere uscente da V, si ha:

$$\int_{D_0\cup D_1\cup S}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_V \operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Poiché la divergenza è nulla, si ottiene:

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = -\int_{D_0\cup D_1\cup S}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = -\int_{D_0}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma - \int_{D_1}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma.$$

La normale uscente a V in D_0 è costante e vale $(0,-1,0)$, mentre in D_1 vale $(0,1,0)$. Quindi (ricordando che D_0 e D_1 sono simmetrici rispetto alla sostituzione $z\to -z$):

$$\int_{D_0}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = -\int_{D_0}(4x^2-3z)\,d\sigma = -4\int_{D_0}x^2\,d\sigma = -4\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = -\pi.$$

$$\int_{D_1}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{D_1}(4x^2-3z)\,d\sigma = 4\int_{D_1}x^2\,d\sigma = 4\int_0^2\int_0^{2\pi}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = 16\pi.$$

Orientando pertanto $\hat{n}$ in modo da essere uscenti da V, si ottiene:

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = -15\pi.$$

L'orientamento uscente da V è effettivamente quello indotto dalla parametrizzazione: per verificarlo osserviamo che $\hat{n}(5/4,3/8,0) = \frac{4}{\sqrt{65}}\left(\frac{7}{4},-1,0\right)$. Sezionando S con il piano $y=3/8$ si ottiene la circonferenza $(5/4\cos\theta, 3/8, 5/4\sin\theta)$ e se proiettiamo la normale sul piano xz si ottiene $\frac{4}{\sqrt{65}}(7/4,0,0)$. Tale proiezione nel punto $(5/4,3/8,0)$ è uscente dal cerchio racchiuso dal tale circonferenza.

Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\Phi(S,\vec{F}) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ F_2\circ\varphi & 3r^2+2r & 0\\ F_3\circ\varphi & 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}dr\,d\theta\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\det\begin{pmatrix} r^3+r^2+(r^2+1)^2\sin^2\theta & 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 4(r^2+1)^2\cos^2\theta-3(r^2+1)\sin\theta & 3r^2+2r & 0\\ 6(r^2+1)^2\cos^2\theta+(r^3+r^2)^2 & 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}dr\,d\theta\end{aligned}$$

Sviluppiamo il determinante D che compare nell'integranda secondo l'ultima colonna:

$$\begin{aligned}D = {}&\left(r^2+1\right)\cos(\theta)\Big(\left(3r^2+2r\right)\left(r^3+\left(r^2+1\right)^2\sin^2(\theta)+r^2\right)+\\ &-2r\cos(\theta)\left(4\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)-3\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\right)\Big)+\\ &+\left(-r^2-1\right)\sin(\theta)\Big(2r\sin(\theta)\left(4\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)-3\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\right)+\\ &-\left(3r^2+2r\right)\left(6\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)+\left(r^3+r^2\right)^2\right)\Big)\end{aligned}$$

Nell'integrazione, i termini che contengono potenze dispari di seno e coseno si cancellano, quindi resta solo:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2\pi}D\,dr\,d\theta &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(-8r\left(r^2+1\right)^3\cos^4(\theta)-8r\left(r^2+1\right)^3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right)dr\,d\theta\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}-8r\left(r^2+1\right)^3\left(\cos^4(\theta)+\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right)dr\,d\theta\\ &= -8\int_0^1\left(r+3r^3+3r^5+r^7\right)dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta = -15\pi,\end{aligned}$$

che conferma il calcolo precedente.

Svolgimento (Esercizio 20). In forma di equazione totale si ha

$$\omega(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = y(1-xy)\,dx - x\,dy = 0.$$

La forma ω non è esatta, tuttavia si ha:

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 1 - 2xy + 1 = 2 - 2xy = \frac{2}{y}p(x,y),$$

pertanto l'equazione ammette il fattore integrante

$$k(y) = e^{-\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{-2\log|y|} = e^{-\log y^2} = \frac{1}{y^2}.$$

Si ha:

$$k(y)\,\omega(x,y) = \left(\frac{1}{y} - x\right)\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = d\left(\frac{x}{y}\right) - d\left(\frac{x^2}{2}\right) = d\left(\frac{x}{y} - \frac{x^2}{2}\right).$$

Pertanto le soluzioni in forma implicita sono date da:

$$\frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} = c,\ c \in \mathbb{R},$$

ovvero (ridefinendo la costante c)

$$y(x) = \frac{2x}{c + x^2}.$$

Sostituendo le condizioni $y(1) = 1$ si ottiene:

$$y(x) = \frac{2x}{1 + x^2},$$

che è prolungabile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ (inizialmente il problema è posto in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) e per $x \to \pm\infty$ ammette asintoto orizzontale $y = 0$. Essa è simmetrica rispetto all'origine. La sua derivata è nulla per $x = \pm 1$, cui corrispondono $y(1) = 1$ e $y(-1) = -1$. Il punto con ascissa positiva è di massimo assoluto e l'altro è di minimo assoluto.
Altro metodo per trovare la soluzione: riscriviamo l'equazione

$$y' - \frac{y}{x} = y^2.$$

L'equazione data è della forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$ con $n = 2$, $n \neq 0, 1$, pertanto essa è un'equazione di Bernoulli, e poiché $n > 0$ essa ammette la soluzione identicamente nulla. Procediamo con la sostituzione $z = y^{1-n} = 1/y$, si ha allora

$$\dot{z} = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{xy} - 1 = -\frac{z}{x} - 1.$$

L'equazione si riduce quindi all'equazione lineare $z' + z/x = 1$, la cui soluzione generale è data da:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[\int 1 \cdot e^{\int \frac{dx}{x}\,dx}\,dx + c\right] = e^{-\log|x|}\left[\int |x|\,dx + c\right] \\ &= \frac{1}{|x|}\left(\operatorname{sgn}(x)x^2/2 + c\right) = \frac{x^2 + d}{2x} \end{aligned}$$

dove si è posto $d = 2\operatorname{sgn}(x)c$, $c \in \mathbb{R}$ da cui $d \in \mathbb{R}$. Poiché $y = 1/z$, si ottiene ancora

$$y(x) = \frac{2x}{x^2 + d},\ d \in \mathbb{R},$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 21). Cerchiamo una soluzione del problema nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$ con $U(t) \neq 0$, $X(x) \neq 0$. Si ottiene $\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(t) = 0$.
Dividendo per $U(t)X(x)$ e separando le variabili si ha $\dfrac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \dfrac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$.

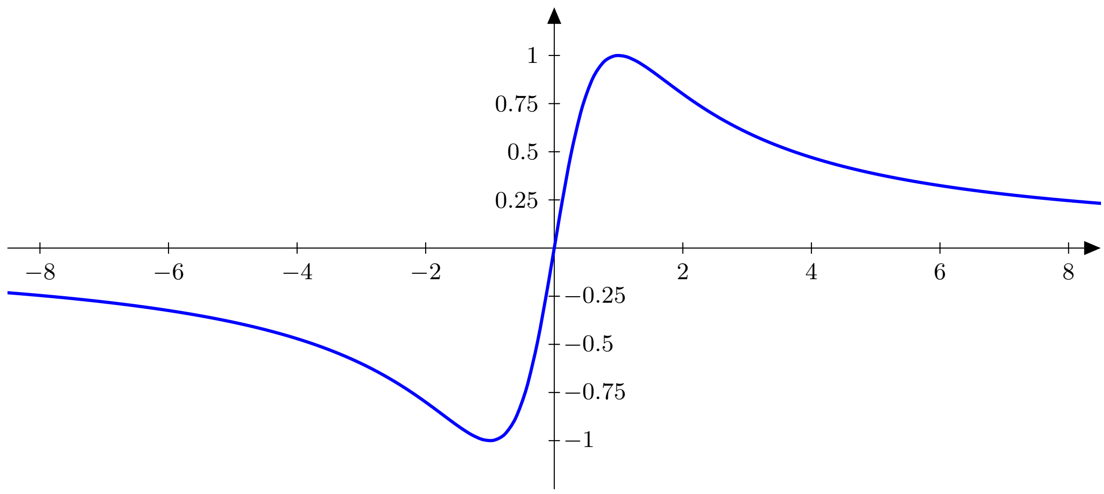


FIGURA 3. La soluzione di $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{xy^2 - y}{x}$ con $y(1) = 1$.

Si ottengono quindi le due equazioni $\dot{U}(t) = \lambda U(t)$, da cui $U(t) = U(0)e^{\lambda t}$ e $\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$, quest'ultima da accoppiarsi con le condizioni iniziali $X(0) = X(\pi) = 0$. Le soluzioni dell'equazione per $X(x)$ sono date da

$$X(x) = \begin{cases} c_0 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ c_0 + c_1 x & \text{se } \lambda = 0 \\ c_0 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Se $\lambda > 0$ si ha $X(0) = 0 = c_0 + c_1$ da cui $c_0 = -c_1$ quindi $X(x) = c_0(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$. Sostituendo $x = \pi$ si ha allora $X(\pi) = 0 = c_0(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$ ed essendo $\lambda \neq 0$ si conclude che deve essere $c_0 = c_1 = 0$, soluzione non accettabile.
Se $\lambda = 0$, si ha $X(0) = 0 = c_0$, quindi $X(x) = c_1 x$ e sostituendo $X(\pi) = 0 = c_1\pi$ si conclude che deve essere $c_0 = c_1 = 0$, soluzione non accettabile.
Se $\lambda < 0$, si ha $X(0) = 0 = c_0$, quindi $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ e sostituendo $X(\pi) = 0 = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$, per avere soluzioni non nulle si deve avere $\lambda = -n^2$. Si ottengono quindi le soluzioni $X_n(x) = c_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}$. Le soluzioni dell'equazione in U corrispondenti a tali valori di λ sono $U_n(t) = d_n e^{-n^2 t}$, pertanto le soluzioni elementari sono

$$u_n(t,x) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx),$$

ove si è posto $b_n = c_n d_n \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo di coprire il dato iniziale mediante una serie di soluzioni elementari:

$$u(0,x) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

pertanto i b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli seni del dato iniziale: ciò vuol dire prolungare per disparità la funzione $x(\pi - x)$ da $[0, \pi]$ a $[-\pi, \pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto

ℝ. Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x(\pi-x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx\\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi -2x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[-2x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx\\
&= -\frac{4}{n^3\pi}[\cos(nx)]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}.\end{aligned}$$

In particolare se $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ si ha $b_{2k} = 0$ e se $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ si ha $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$. Pertanto la soluzione è data da:

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2 t}\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Il termine generale della serie è maggiorato in modulo da $1/(2k+1)^3$, termine generale di una serie numerica convergente. Quindi la serie converge totalmente, uniformemente e puntualmente.

Svolgimento (Esercizio 22). Poniamo $f(x,y) = -x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 4x^2 + 8xy - y^6 + 4y^2$. Osserviamo che $f(x,y) = f(y,x)$ e $f(x,y) = f(-x,-y)$ quindi l'insieme è simmetrico rispetto all'origine e alla bisettrice $y = x$.

(1) In coordinate polari piane si ha:

$$\begin{aligned}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= -\rho^6\sin^6\theta - \rho^6\cos^6\theta - 3\rho^6\sin^2\theta\cos^4\theta - 3\rho^6\sin^4\theta\cos^2\theta +\\
&+ 4\rho^2\sin^2\theta + 4\rho^2\cos^2\theta + 8\rho^2\sin\theta\cos\theta\\
&= -\rho^6(\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^4\theta + 3\sin^4\theta\cos^2\theta) + 4\rho^2 + 8\rho^2\sin\theta\cos\theta\\
&= -\rho^6(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 + 4\rho^2 + 8\rho^2\sin\theta\cos(\theta)\\
&= \rho^2(4 + 8\sin\theta\cos\theta - \rho^4) = \rho^2(4 + 4\sin 2\theta - \rho^4)\end{aligned}$$

pertanto si ha:

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^4 = 4 + 4\sin 2\theta\},$$

e questa scrittura comprende anche l'origine. Si osservi che $4 + 4\sin 2\theta \geq 0$ per ogni θ, pertanto $r(\theta)$ ha dominio $[0, 2\pi[$.

(2) Si ha $f(x,0) = -x^6 + 4x^2$, nullo per $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = 0$. Per simmetria, si ricava che $\Gamma \cap \{xy = 0\} = \{(0,0), (\pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm\sqrt{2})\}$. Calcoliamo:

$$df(x,y) = (-6x^5 - 12x^3y^2 - 6xy^4 + 8x + 8y)\,dx + (-6x^4y - 12x^2y^3 + 8x - 6y^5 + 8y)\,dy,$$

e pertanto $df(\sqrt{2}, 0) = -16\sqrt{2}\,dx + 8\sqrt{2}\,dy$. Quindi la retta tangente in $P_1(\sqrt{2}, 0)$ ha equazione $-16\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}\,y = c$, da cui, sostituendo, si ha $c = -32$ e quindi la tangente in $P_1(\sqrt{2}, 0)$ ha equazione $-2x + y = -2\sqrt{2}$. Ricaviamo per simmetria rispetto all'origine e alla bisettrice le altre tangenti: la tangente in $P_2(-\sqrt{2}, 0)$ ha equazione $2x + y = -2\sqrt{2}$, la tangente in $P_3(0, \sqrt{2})$ ha equazione $2x - y = -2\sqrt{2}$ e la tangente in $P_4(0, -\sqrt{2})$ ha equazione $2y - x = -2\sqrt{2}$. Poiché nessuna di queste tangenti è verticale, il teorema di Dini è applicabile in tutti questi punti, fornendo localmente la funzione implicita richiesta.

(3) In coordinate polari, si ha $\tilde{h}(\rho,\theta) = h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4$, pertanto il problema si riconduce allo studio dei massimi e minimi di $\rho^4(\theta) = 4(1 + \sin 2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Il massimo di ρ^4 è 8, raggiunto nei punti con $2\theta = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi $\theta = \pi/4, 5/4\pi$. Tali punti di massimo corrispondono a $\pm(2^{1/4}, 2^{1/4})$, mentre il minimo è raggiunto nell'origine (ovvero $\theta = 3/4\pi, 7/4\pi$).

(4) L'insieme è limitato perché inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt[4]{8}$, inoltre è chiuso perché f è continua. Pertanto è compatto.

(5) Per tracciare il grafico di Γ, osserviamo che è sufficiente stabilire il grafico per $\theta \in [-\pi/4, 3/4\pi]$ e poi sfruttare le simmetrie. In tale intervallo, ρ cresce strettamente fino a raggiungere il suo massimo per $\theta = \pi/4$ e poi decresce strettamente a zero. Ne segue che Γ ha l'aspetto di un otto ruotato di $\pi/4$ in senso orario. Questo conclude il grafico qualitativo richiesto, possiamo però essere più precisi: Consideriamo la funzione

$$f(x, mx) = -m^6x^6 - 3m^4x^6 - 3m^2x^6 + 4m^2x^2 + 8mx^2 - x^6 + 4x^2,$$

raccogliendo e semplificando x^2, si ottiene $f(x, mx) = 0$ se vale

$$m^6\left(-x^4\right) - 3m^4x^4 - m^2\left(3x^4 - 4\right) + 8m - x^4 + 4 = 0,$$

da cui si ottiene

$$|x|^4 = \frac{4(m^2 + 2m + 1)}{(m^6 + 3m^4 + 3m^2 + 1)} = \frac{4(m + 1)^2}{(1 + m^2)^3}.$$

La derivata di tale espressione è

$$\frac{d}{dm}x^4(m) = -\frac{8\left(2m^3 + 5m^2 + 2m - 1\right)}{(m^2 + 1)^4},$$

che si annulla nei punti $m_0^* = -1$, $m_1^* = (-3 - \sqrt{17})/4$, $m_2^* = (-3 + \sqrt{17})/4$. Ad essi, corrispondono i punti:

$$\begin{aligned}
O &= (x(m_0^*), m_0^*x(m_0^*)) = (0, 0)\\
A = -B &= (x(m_1^*), m_1^*x(m_1^*)) = \left(\frac{4\sqrt[4]{9 - \sqrt{17}}}{\left(3\left(7 + \sqrt{17}\right)\right)^{3/4}}, \frac{(-3 - \sqrt{17})}{4}\frac{4\sqrt[4]{9 - \sqrt{17}}}{\left(3\left(7 + \sqrt{17}\right)\right)^{3/4}}\right)\\
C = -D &= (x(m_2^*), m_2^*x(m_2^*)) = \left(\frac{4\sqrt[4]{9 + \sqrt{17}}}{\left(21 - 3\sqrt{17}\right)^{3/4}}, \frac{(-3 + \sqrt{17})}{4}\frac{4\sqrt[4]{9 + \sqrt{17}}}{\left(21 - 3\sqrt{17}\right)^{3/4}}\right)
\end{aligned}$$

e tali punti sono i massimi e minimi di $|x|$, per simmetria rispetto alla bisettrice si ricavano i punti A', B', C', D' massimi e minimi di $|y|$.

Svolgimento (Esercizio 23). Poniamo $u = xy$ e $v = y^2/x$, da cui $y = \sqrt[3]{uv} = u^{1/3}v^{1/3}$, $x = \sqrt[3]{u^2/v} = u^{2/3}v^{-1/3}$ e quindi

$$\varphi(u, v) = (u^{1/3}v^{1/3}, u^{2/3}v^{-1/3}), \qquad \varphi^{-1}(x, y) = (xy, y^2/x).$$

Si ha $\Omega = \{\varphi(u, v) : u \in [1, 2],\ v \in [1/4, 1]\}$. Calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione φ:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \end{pmatrix},$$

il cui modulo del determinante è $1/|3v|$. Si può anche calcolare la matrice Jacobiana di φ^{-1}

$$\operatorname{Jac}\varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{pmatrix},$$

il cui modulo del determinante vale $|3y^2/x| = |3v|$ e osservare che

$$|\det\operatorname{Jac}\varphi(u, v)| = |\det\operatorname{Jac}\varphi^{-1}(x, y)|^{-1} = 1/|3v|.$$

Pertanto l'integrale vale:

$$\int_\Omega dxdy = \int_1^2\left(\int_{1/4}^1 |\det\operatorname{Jac}\varphi(u, v)|\, dv\right) du = \int_1^2\int_{1/4}^1 \frac{dv}{3v}\, du = \frac{1}{3}\left[\log\frac{1}{v}\right]_{v=1/4}^{v=1} = \frac{2}{3}\log 2.$$

Altro modo: il dominio Ω è contenuto nel primo quadrante, calcoliamo i punti di intersezione delle quattro curve che delimitano il dominio Ω: l'intersezione di $xy = 1$ con $x = y^2$ porge $A = (1, 1)$,

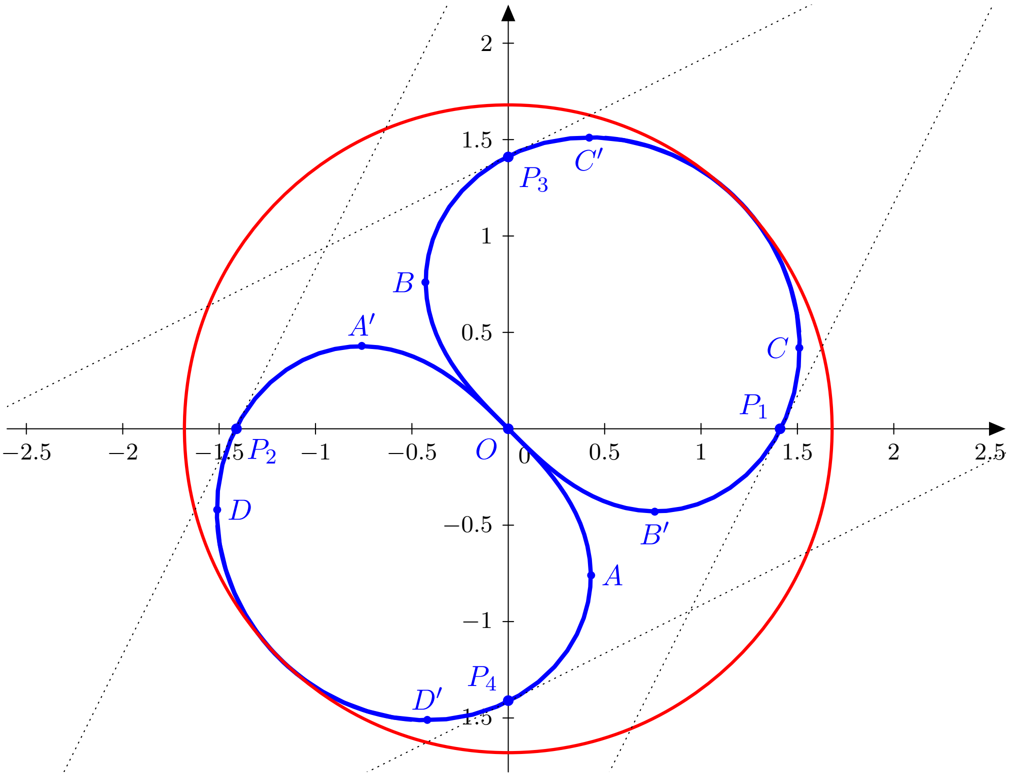


FIGURA 4. L'insieme $-x^6-3x^4y^2-3x^2y^4+4x^2+8xy-y^6+4y^2=0$ e alcune rette significative.

l'intersezione di $xy=1$ con $x/4=y^2$ porge $D=(2^{2/3},2^{-2/3})$, l'intersezione di $xy=2$ con $x=y^2$ porge $B=(2^{2/3},\sqrt[3]{2})$ e l'intersezione di $xy=2$ con $x/4=y^2$ porge $C=(2^{4/3},2^{-1/3})$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega dxdy &= \int_1^{2^{2/3}}\int_{1/x}^{\sqrt{x}} dy\,dx+\int_{2^{2/3}}^{2^{4/3}}\int_{\sqrt{x}/2}^{2/x} dydx\\ &= \int_1^{2^{2/3}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{2^{2/3}}^{2^{4/3}}\left(\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dydx\\ &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\log x\right]_{x=1}^{x=2^{2/3}}+\left[2\log x-\frac{1}{3}x^{3/2}\right]_{x=2^{2/3}}^{x=2^{4/3}}\\ &= \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\log 2-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\log 2-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\log 2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\log 2,\end{aligned}$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 24). Si veda la soluzione dell'Esercizio 19.

Svolgimento (Esercizio 25). Si veda la soluzione dell'Esercizio 20.

Svolgimento (Esercizio 26). Si veda la soluzione dell'Esercizio 19.

Svolgimento (Esercizio 27). Si veda la soluzione dell'Esercizio 21.

Svolgimento (Esercizio 28). Riscrivendo il sistema dato, si ha: $\begin{cases}-2y=\dot{x}-3x-e^{4t}\\ \dot{y}=-6x+y\end{cases}$.

Derivando la prima equazione, si ottiene $-2\dot{y}=\ddot{x}-3\dot{x}-4e^{4t}$.

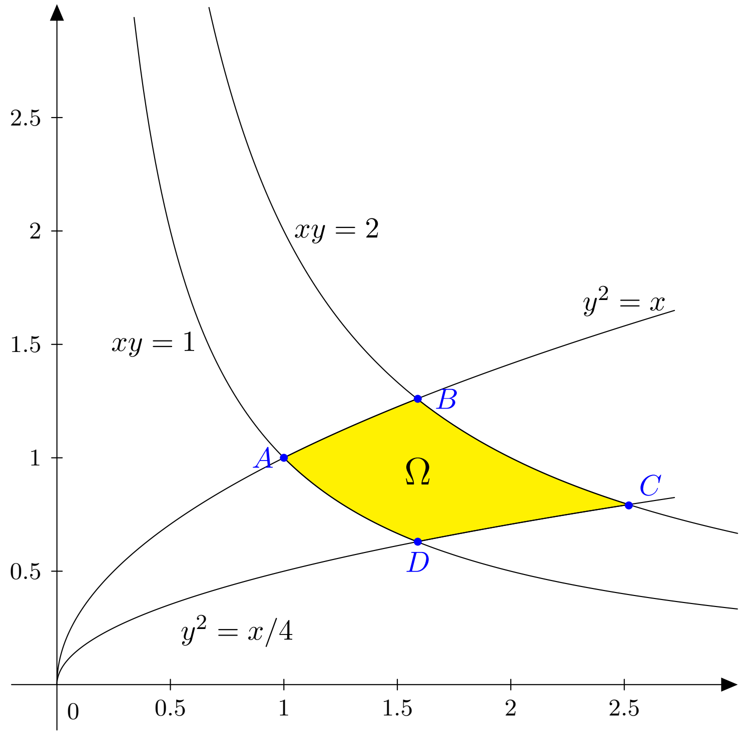


FIGURA 5. L'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2,\, x/4 < y^2 < x\}$.

Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$-2(-6x + y) = \ddot{x} - 3\dot{x} - 4e^{4t}.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} - 3\dot{x} - 12x + 2 - 4e^{4t} = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $-2y$ ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 12x - (\dot{x} - 3x - e^{4t}) - 4e^{4t} = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 12x - \dot{x} + 3x + e^{4t} - 4e^{4t} = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 9x = 3e^{4t}.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 4\lambda - 9 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 2 - \sqrt{13}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{13}$. Tali valori sono gli autovalori della matrice del sistema omogeneo associato: essi sono reali non nulli di segno discorde, quindi si ha una sella e l'unica soluzione stazionaria è l'origine.

La soluzione generale dell'omogenea associata è $\Phi(c_1, c_2, t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per trovare la soluzione $t \mapsto x(t)$, è necessario sommare a $\Phi(c_1, c_2, t)$ una *soluzione particolare* $x_p(t)$ dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} - 9\,x = 3e^{4t}$. Poiché 4 non è radice dell'equazione caratteristica, cerchiamo $x_p(t) = Ae^{4t}$: si ha $16Ae^{4t} - 16Ae^{4t} - 9Ae^{4t} = 3e^{4t}$ da cui $A = -1/3$ e quindi

$$x(t) = c_1 e^{(2-\sqrt{13})t} + c_2 e^{(2+\sqrt{13})t} - \frac{e^{4t}}{3},$$

$$\dot{x}(t) = c_1(2 - \sqrt{13})e^{(2-\sqrt{13})t} + c_2(2 + \sqrt{13})e^{(2+\sqrt{13})t} - \frac{4}{3}\,e^{4t}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\dot{x} - 3x(t) - e^{4t}/3) = \frac{1}{6}e^{-(\sqrt{13}-2)t}\left(-3\left(\sqrt{13} - 1\right)c_2 e^{2\sqrt{13}t} + 3\left(1 + \sqrt{13}\right)c_1 + 4e^{(2+\sqrt{13})t}\right).$$

Svolgimento (Esercizio 29). Poniamo

$$f(x,y) := -\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Poiché $f(x,y) = f(-x,y)$ si ha che l'insieme è simmetrico rispetto all'asse y. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha, ricordando che $\rho \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho^4\sin^4\theta + \rho^4\cos^4\theta + 2\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{\rho^3\sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2(\theta)}} \\
&= \rho^4(\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta) - \rho^2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= \rho^4(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - \rho^2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= \rho^2(\rho^2 - \sin\theta\cos^2\theta).
\end{aligned}$$

Poiché $\rho > 0$ possiamo dividere per ρ^2 ottenendo $\rho^2 = \sin\theta\cos^2\theta$ accoppiato con le condizioni $\rho \geq 0$, $\rho \neq 0$. Si ha quindi che il dominio di θ è $]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}$ ovvero

$$\Gamma = \{(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) : \rho(\theta) = \sqrt{\sin\theta}|\cos\theta| : \theta \in]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}\}.$$

L'insieme Γ non è chiuso: si prenda una successione $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\theta_n \to 0^+$. Se $r_n := \sin\theta_n\cos^2\theta_n$ si ha che $(x_n, y_n) := (\rho_n\cos\theta_n, \rho_n\sin\theta_n)$ è una successione in Γ convergente a $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Poiché Γ non è chiuso, non può essere compatto. D'altra parte, la funzione $\rho(\theta)$ può essere estesa per continuità all'intervallo compatto $[0,\pi]$, e quindi l'insieme

$$\overline{\Gamma} = \{(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) : \rho(\theta) = \sqrt{\sin\theta}|\cos\theta| : \theta \in [0,\pi]\},$$

è immagine continua di un compatto, quindi compatto.
L'insieme $C \cap \Gamma$ è contenuto nel semipiano $y > 0$, per cui da $x^2 = y^2$ si ottiene $|x| = |y|$ e quindi $y = |x|$, da cui $y = \pm x$. Dobbiamo quindi risolvere $F(x, \pm x) = 0$, $x \neq 0$, da cui $x = \pm 2^{-5/4}$ e $y = 2^{-5/4}$. Il differenziale di f è dato da

$$\begin{aligned}
df(x,y) = &\left(4x^3 - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 4xy^2\right) dx + \\
&+ \left(\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x^2y + 4y^3\right) dy.
\end{aligned}$$

Sostituendo, si ottiene $df(2^{-5/4}, 2^{-5/4}) = 2^{-11/4}\,dx + 3\cdot 2^{-11/4}\,dy = 2^{-11/4}\,(dx + 3dy)$, pertanto la retta tangente avrà equazione $x + 3y = c$. Imponendo il passaggio per $(2^{-5/4}, 2^{-5/4})$ si ottiene $x + 3y = 2^{3/4}$. Simmetricamente, la tangente in $(2^{-5/4}, 2^{-5/4})$ è $-x + 3y = 2^{3/4}$. Entrambe le tangenti non sono verticali, il teorema di Dini fornisce le applicazioni implicitamente definite richieste.

Si ha che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\sin\theta$. Se cerchiamo massimi e minimi vincolati a $\overline{\Gamma}$ il problema si riduce a determinare massimi e minimi di $\rho^2(\theta)\sin\theta = \sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$ vincolati a $\theta \in [0,\pi]$. Il minimo è assunto in $\theta = 0, \pi/2, \pi$ e vale 0, il punto corrispondente è l'origine. Il massimo è assunto in $\theta = \pi/4, 3/4\pi$, cui corrisponde il punto $(\pm 2^{-5/4}, 2^{-5/4})$, e il valore massimo di h è $1/4$.

Per quanto riguarda il grafico qualitativo, poniamo $g(\theta) = \rho^2(\theta)$ e studiamo per $\theta \in [0,\pi]$. Si ha $g(0) = g(\pi) = 0$, e

$$g'(\theta) = \cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = \cos\theta(1 - 3\sin^2\theta).$$

Tale derivata per $\theta \in]0,\pi[$ è nulla nel punto $\theta_m = \pi/2$, e $g(\pi/2) = 0$, punto di minimo, oppure nei punti corrispondenti a θ_M per cui vale $\sin^2\theta_M = 1/3$ e quindi $\cos^2\theta_M = 2/3$. Si ha $\rho(\theta_M) = 2\sqrt{3}/9$. I punti corrispondenti in coordinate cartesiane sono $(\pm 2\sqrt{2}/9, 2/9)$ e sono i punti di Γ più lontani dall'origine.

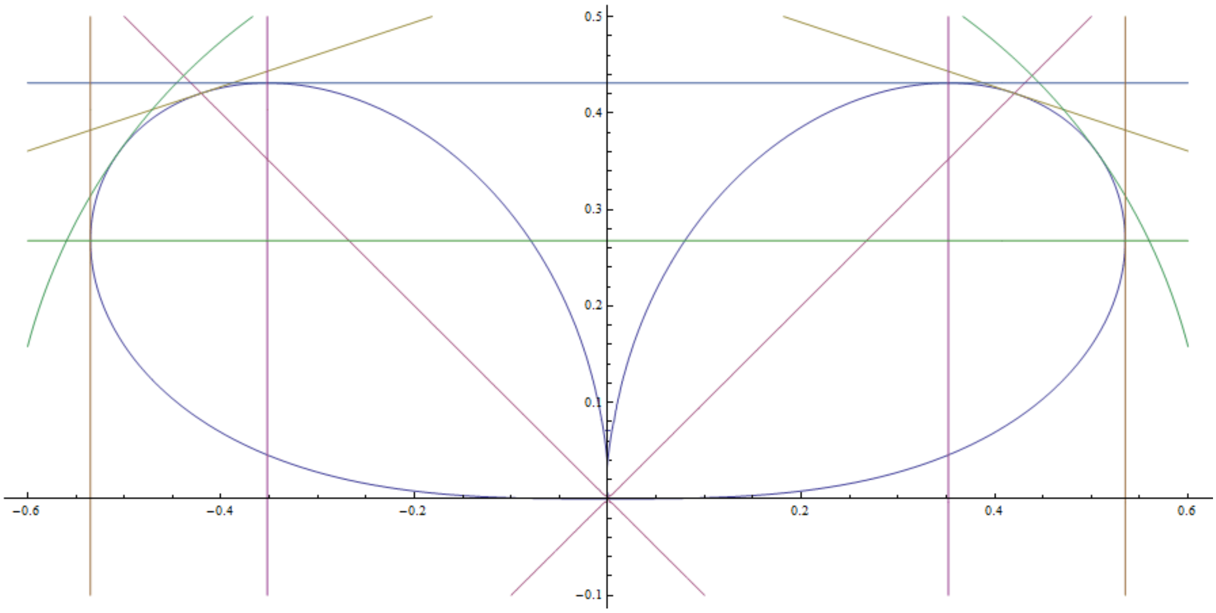


FIGURA 6. L'insieme $-\dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 0$ e alcune rette significative.

Per disegnare l'insieme, quindi, partiamo dall'angolo $\theta = 0$ e dall'origine, la distanza cresce con l'angolo fino al suo valore massimo e poi decresce fino a 0 per $\theta = \pi/2$. Si ricostruisce il grafico per simmetria nel secondo quadrante. L'aspetto è quello di un quadrifoglio tagliato a metà.
Questo conclude lo studio qualitativo richiesto. Per completezza forniamo ulteriori dati. Studiamo il massimo di $y^2(\theta) := \rho^2(\theta)\sin^2\theta = \sin^3\theta\cos^2\theta$. Si ha

$$\frac{d}{d\theta}(y^2(\theta)) = -2\cos\theta\sin^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2\theta(3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = \sin^2\theta(5\cos^2\theta - 2).$$

Tale derivata per $\theta \in]0,\pi[$ è nulla se $\cos^2\theta = 2/5$, cui corrisponde $\sin^2\theta = 3/5$ e $\rho^2(\theta) = \sqrt{60}/25$. I punti di ordinata massima sono quindi $(\pm\sqrt{2/5}\sqrt[4]{60}/5, \sqrt{3/5}\sqrt[4]{60}/5)$.

Studiamo il massimo di $x^2(\theta) := \rho^2(\theta)\cos^2\theta = \sin\theta\cos^4\theta$

$$\frac{d}{d\theta}(x^2(\theta)) = \cos^5\theta - 4\cos^3\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta(\cos^2\theta - 4\sin^2\theta) = \cos^3\theta(1 - 5\sin^2\theta).$$

Tale derivata se $\theta \in]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}$ si annulla per $\sin^2\theta = 1/5$ cui corrisponde $\cos^2\theta = 4/5$ e $\rho^2(\theta) = 4 \cdot 5^{-3/2}$ I punti di ascissa di modulo massimo sono quindi $(\pm 4 \cdot 5^{-5/4}, 2 \cdot 5^{-5/4}$. L'insieme è inscritto nel rettangolo con lati paralleli agli assi

$$Q := [-4 \cdot 5^{-5/4}, 4 \cdot 5^{-5/4}] \times [0, \sqrt{3/5}\sqrt[4]{60}/5].$$

Svolgimento (Esercizio 30). Si ha (ponendo $t = y/x$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_1^2 \int_{x^2}^{2x^2} \int_0^{\frac{x}{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx = \int_1^2 \int_{x^2}^{2x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\,dx \\
&= \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{x^2}{x^2+x^2t^2}\,dt\,dx \\
&= \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^2}\,dt\,dx = \int_1^2 (\arctan(2x) - \arctan x)\,dx \\
\text{(per parti)} &= [x(\arctan(2x) - \arctan x)]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\
&= 2(\arctan 4 - \arctan 2) - \arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{8x}{1+4x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\log(1+4x^2)]_{x=1}^{x=2} + \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_{x=1}^{x=2} \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\log(1+4x^2)]_{x=1}^{x=2} + \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_{x=1}^{x=2} \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log(17/5) - \frac{1}{2}\log(2/5) \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log(17/5) - \frac{1}{4}\log(4/25) \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\log(125/68).
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 31). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) &= \partial_x \vec{F}(x,y,z) + \partial_y \vec{F}(x,y,z) + \partial_z \vec{F}(x,y,z) = -4y^2 + 10y - 4z^2, \\
\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & 6y \\ \vec{e}_2 & \partial_y & 6x - 4yz^2 + 5z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & 10yz - 4y^2 z \end{pmatrix} \\
&= ((10z - 8yz) - (-8yz + 10z), 0, 6 - 6) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Poiché il rotore è nullo, il campo è conservativo.

(2) Poiché il campo è conservativo, l'integrale di linea non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi: $\gamma(0) = (1,0,0)$ e $\gamma(2\pi) = (1,1,0)$. Possiamo quindi integrare sul segmento $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\gamma}(t) = (1,t,0)$. Si ottiene quindi:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\ell = \int_0^1 \vec{F} \circ \tilde{\gamma}(t)\,\tilde{\gamma}'(t)\,dt = \int_0^1 (6t, 6, 0)(0,1,0)\,dt = 6.$$

(3) Si ha:

$$\operatorname{Jac} \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u - 3v & -3u \\ v^3 + 1 & 3uv^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Determiniamo l'elemento d'area con la regola di Binet: formiamo le tre sottomatrici quadrate:

$$
\begin{aligned}
B_1 &:= \begin{pmatrix} 2u-3v & -3u \\ v^3+1 & 3uv^2 \end{pmatrix}, & \det B_1 &= 6u^2v^2 - 6uv^3 + 3u; \\
B_2 &:= \begin{pmatrix} 2u-3v & -3u \\ 2u & 2v \end{pmatrix}, & \det B_2 &= 6u^2 + 4uv - 6v^2; \\
B_3 &:= \begin{pmatrix} v^3+1 & 3uv^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}, & \det B_3 &= -6u^2v^2 + 2v^4 + 2v.
\end{aligned}
$$

Per Binet:

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\, du\, dv \\
&= \sqrt{(6u^2+4uv-6v^2)^2 + (-6u^2v^2+2v^4+2v)^2 + (6u^2v^2-6uv^3+3u)^2}\, du\, dv.
\end{aligned}
$$

(4) È necessario trovare $(u_P, v_P) \in [-1,1]\times[-1,1]$ tali per cui $P = \varphi(u_P, v_P)$, ovvero risolvere il sistema:

$$
\begin{cases}
u^2 - 3uv + 1 = 1, \\
uv^3 + u = 3/1600 + 3/(2\sqrt{10}), \\
u^2 + v^2 = 1/4.
\end{cases}
$$

Dalla prima equazione si ottiene $u^2 - 3uv = 0$, quindi $u(u-3v) = 0$ per cui $u = 0$ o $u = 3v$. Se $u = 0$ la seconda non può essere risolta. Quindi $u = 3v$. Dalla terza si ottiene $v = \pm 1/(2\sqrt{10})$, per cui $u = \pm 3/(2\sqrt{10})$. La seconda equazione è soddisfatta prendendo i segni positivi $u_P = 3/(2\sqrt{10})$, $v_P = 1/(2\sqrt{10})$. Si ha quindi:

$$
\operatorname{Jac}\varphi(u_P, v_P) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{10}} & -\frac{9}{2\sqrt{10}} \\ 1 + \frac{1}{80\sqrt{10}} & \frac{9}{80\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.
$$

La normale indotta è quindi:

$$
\det\left(\begin{array}{c|c} \vec{e}_1 & \\ \vec{e}_2 & \operatorname{Jac}\varphi(u_P,v_P) \\ \vec{e}_3 & \end{array}\right) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{3}{2\sqrt{10}} & -\frac{9}{2\sqrt{10}} \\ \vec{e}_2 & 1 + \frac{1}{80\sqrt{10}} & \frac{9}{80\sqrt{10}} \\ \vec{e}_3 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{13}{400}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{400} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)
$$

Il versore normale è

$$
\hat{n}(P) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{13}{400}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{400} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{13}{400}\right)^2 + \frac{9}{4} + \left(\frac{9}{400} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2}}.
$$

(5) Posto $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$, il flusso richiesto è:

$$\Phi(\vec{G}, S) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1 \circ \varphi(u,v) & \\ G_2 \circ \varphi(u,v) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u_P, v_P) \\ G_3 \circ \varphi(u,v) & \end{array} \right) du\,dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} 6\left(uv^3+u\right) & 2u-3v & -3u \\ 1 & v^3+1 & 3uv^2 \\ 1 & 2u & 2v \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 6\left(uv^3+u\right)\left(2v(v^3+1)-6u^2v^2\right) dv\,du + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -(2v(2u-3v)+6u^2)\,du\,dv +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ((2u-3v)3uv^2 + 3u(v^3+1))\,du\,dv$$

Tutti i termini nello sviluppo che contengono potenze dispari di u o v sono nulli perché tali termini sono funzioni dispari di u o di v integrate su un intervallo simmetrico. Si ha quindi che il primo integrale è nullo e:

$$\Phi(\vec{F}, S) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (6v^2 - 6u^2 + 6u^2v^2)\,du\,dv = 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v^2 - 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2 + 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2v^2\,du\,dv$$

$$= 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2v^2\,du\,dv = 8/3.$$

Svolgimento (Esercizio 32). Applichiamo il metodo di separazione delle variabili, cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Si ottiene: $\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) + 4U(t)X(x) = 0$. Dividendo per $u(t,x) = U(t)X(x)$ si ottiene allora:

$$\frac{\dot{U}(t)+4}{U(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = (\lambda - 4)U(t) \\ \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione per $X(x)$ accoppiata con le condizioni $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica è $\mu^2 - \lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4\lambda$. Se $\lambda > 0$ allora $\Delta > 0$ e l'equazione ammette due radici reali distinte non nulle μ_1, μ_2, la soluzione generale diviene $X(x) = c_1e^{\mu_1 x} + c_2e^{\mu_2 x}$. Derivando, si ha $\dot{X}(x) = c_1\mu_1e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2e^{\mu_2 x}$ da cui il sistema nelle incognite c_1 e c_2.

$$\begin{cases} \dot{X}(0) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0 \\ \dot{X}(\pi) = c_1e^{\mu_1\pi}\mu_1 + c_2e^{\mu_2\pi}\mu_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché $\mu_1 \neq \mu_2$, le due equazioni sono indipendenti e quindi l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile. Se $\lambda = 0$, si ha $\mu_1 = \mu_2 = 0$, quindi la soluzione generale dell'equazione è $X(x) = c_0 + c_1x$. Derivando, e sostituendo le condizioni al contorno si ottiene $c_1 = 0$. Quindi si ha la soluzione accettabile $X_0(x) = c_0$, $c_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\lambda < 0$, si ottengono due radici complesse coniugate $\mu_1 = i\sqrt{-\lambda}$, $\mu_2 = -i\sqrt{-\lambda}$, quindi la soluzione generale è $X(x) = c_1\cos\sqrt{-\lambda}x + c_2\sin\sqrt{-\lambda}x$, la cui derivata risulta

$$\dot{X}(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_1\sin\sqrt{-\lambda}x + c_2\cos\sqrt{-\lambda}x).$$

Sostituendo la condizioni al contorno $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_2 = 0$, da cui $\dot{X}(x) = -c_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}x$, e dato che $\dot{X}(\pi) = 0$ e $c_1 \neq 0$, si deve avere $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$ e perciò $\lambda_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$. La soluzione corrispondente risulta quindi $X_n(x) = c_n \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, che include anche il caso precedente. L'equazione per $U(t)$ con i valori λ_n ha soluzione $U_n(t) = d_n e^{-(n^2+4)t}$, pertanto le soluzioni elementari sono del tipo

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{-(n^2+4)t}\cos(nx).$$

Cerchiamo soluzioni in forma di serie, quindi:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x),$$

in particolare:

$$u(0,x) = \left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Per confronto, si ricava che i coefficienti a_n, $n > 0$ sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione $u(0,x)$ prolungata per parità in $[-\pi,\pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, mentre a_0 è metà del coefficiente corrispondente di tale sviluppo.

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\pi}{2} - x\right| dx = \frac{\pi}{4} \text{ (è l'area di un triangolo moltiplicata per un coefficiente.)}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\pi}{2} - x\right| \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\sin nx\,dx + \\
&\qquad + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin nx\,dx \\
&= \frac{2(1 + (-1)^n - 2\cos(n\pi/2))}{n^2\pi},
\end{aligned}$$

dove si è integrato per parti e osservato che i termini tra quadre sono nulli. La soluzione è quindi:

$$u(t,x) = e^{-4t}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\frac{1 + (-1)^n - 2\cos(n\pi/2)}{n^2\pi}\cos(nx)\right).$$

Il termine generale delle serie è maggiorato in modulo da $4/n^2$, termine generale di serie convergente. La serie converge totalmente, quindi uniformemente e puntualmente. Si può anche fare la seguente osservazione: per n dispari si ha $a_n = 0$. Per $n > 0$ pari e multiplo di 4, ovvero $n = 4k$, $k > 0$ si ha ancora $a_{4k} = 0$. Per $n > 0$ pari ma non multiplo di 4, ovvero $n = 4k-2$, $k > 0$, si ha $a_{4k-2} = \frac{2}{\pi(2k-1)^2}$, quindi la soluzione diviene:

$$u(t,x) = e^{-4t}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-4(2k-1)^2 t}}{(2k-1)^2}\cos(2(2k-1)x)\right).$$

Svolgimento (Esercizio 33). Osserviamo che $F(x,y) = F(-x,y)$, $F(x,-y) = F(x,y)$ quindi l'insieme Γ è simmetrico rispetto agli assi.

(1) In coordinate polari piane si ha

$$F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 - \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}, \qquad \rho \neq 0,$$

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta : \rho^4 = \cos^2\theta, \rho \neq 0\}$$

Γ non è chiuso perché data $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[$, $\rho_n \to 0^+$, per n sufficientemente grande è possibile determinare $\theta_n := \arccos\rho^2$ in modo da avere $(\rho_n\cos\theta_n, \rho_n\sin\theta_n) \in \Gamma$. Tuttavia tale successione di punti di Γ converge a $(0,0) \notin \Gamma$. La chiusura di Γ è $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{(0,0)\}$.

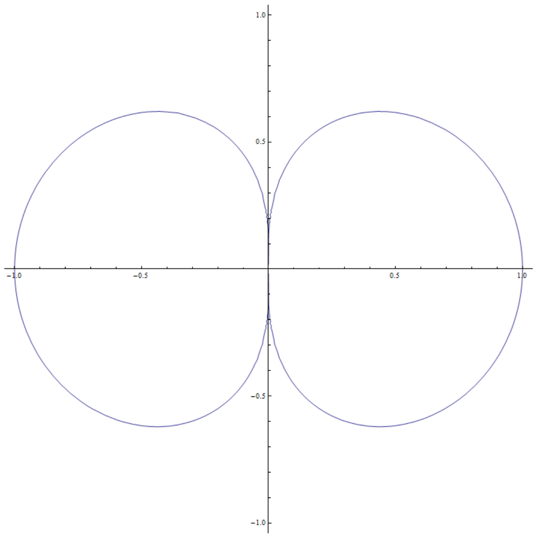


FIGURA 7. L'insieme $-\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+x^2+y^2=0.$

(2) Si ha $F(x,0)=x^2-1/x^2$ che si annulla per $x=\pm 1$, da cui i punti $(\pm 1,0)$, invece $F(0,y)=y^2$ che si annulla in $y=0$, però il punto $(0,0)\notin\Gamma$. Pertanto Γ interseca gli assi in $(\pm 1,0)$.
Si ha:
$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) &= -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^3}{(x^2+y^2)^3}+2x, \\ \partial_y F(x,y) &= \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^3}+2y \end{cases}$$
Nella fattispecie $\partial_y F(\pm 1,0)=0$ e $\partial_x F(\pm 1,0)=\pm 4$, pertanto è possibile applicare il teorema di Dini e concludere l'esistenza di funzioni $x=\phi^+(y)$ e $x=\phi^-(y)$ definite in un intorno di 0 tali per cui $\phi^\pm(0)=\pm 1$. Poiché $F\in C^1$ tali funzioni sono C^1. Si ha
$$\frac{d\phi^\pm}{dy}(0)=-\frac{\partial_y F(\pm 1,0)}{\partial_x F(\pm 1,0)}=0.$$
Le tangenti a Γ in tali punti sono verticali e quindi sono $x=\pm 1$.

(3) Osserviamo che h è una funzione strettamente monotona di ρ^2, pertanto massimi e minimi di h sono raggiunti nei massimi e minimi di ρ^2. In particolare vi è un minimo in $(0,0)$ che vale $h(0,0)=0$. ρ raggiunge il suo massimo per $\cos^2\theta=1$, pertanto i massimi sono in $(\pm 1,0)$ e $h(\pm 1,0)=\arctan\log 2$.

(4) Γ non è compatto perché non è chiuso. Dall'espressione in coordinate polari sua chiusura $\bar\Gamma$ si ricava che ρ è limitato, quindi $\bar\Gamma$ è compatto.

(5) Oltre alle già citate simmetrie rispetto agli assi, osserviamo che la funzione $\theta\mapsto\cos^2\theta$ è π-periodica, pertanto l'insieme è invariante per rotazioni di angolo π. I massimi di $|x|$ coincidono con i massimi di ρ in quanto questi ultimi sono assunti su punti dell'asse x. La funzione $\theta\mapsto\cos^2\theta$ è strettamente monotona decrescente da 0 a $\pi/2$, e in $\pi/2$ vale 0. Per simmetria è possibile ricostruire da questo il grafico di Γ.

Svolgimento (Esercizio 34). Definiamo la seguente mappa $\varphi:\Omega\to[0,2]\times[0,2\pi]$, $\varphi(x,y)=(x+y,x-y)$. Tale mappa è invertibile:
$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-2 \neq 0$. La sua funzione inversa $\psi : [0,2] \times [0,2] \to \Omega$ ha determinante Jacobiano pari a

$$\mathrm{Jac}(\psi)(u,v) = \frac{1}{\mathrm{Jac}(\varphi)(\psi(u,v))} = -\frac{1}{2}.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \cos^2(x+y)\sin(3(x-y))\,dx\,dy &= \int_{\varphi(\Omega)} \cos^2 u \sin 3v |\det(\mathrm{Jac}(\psi)(u,v))|\,du\,dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \cos^2 u \sin 3v\,du\,dv \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sin 3v\,dv\right)\cdot\left(\int_0^2 \cos^2 u\,du\right) = 0.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 35). Poniamo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

(1) Si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix} = (-16z, 3-12x, 1-18y).\end{aligned}$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Posto $C = \{(x,0,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$, si ha $\gamma = \partial C$. Il bordo di C è γ, e la normale indotta positivamente è $(0,-1,0)$. Per il teorema di Stokes, la circuitazione su γ è il flusso del rotore attraverso C, quindi:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{\ell} = \iint_C \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\,d\sigma = \iint_C (-16z, 3-12x, 1-18y)(0,-1,0)\,d\sigma = \iint_C (12x-3)\,dx\,dy = -3\pi.$$

dove si è sfruttata nell'ultimo passaggio la simmetria del dominio C. Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ\gamma(t)\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(3\sin t, \cos t, 6\cos^2 t)(-\sin t, 0, \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(-3\sin^2 t + 6\cos^3 t)\,dt = -3\int_0^{2\pi}\sin^2 t = -3\pi.\end{aligned}$$

(3) Si ha:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2u & -4v^3\end{pmatrix}.$$

Dalla regola di Binet si ricava $d\sigma = \sqrt{1+16v^6+4u^2}\,du\,dv$.

(4) Il punto $P = \varphi(1/\sqrt{2}, 0)$, pertanto la normale è data dal prodotto vettoriale delle colonne dello Jacobiano della parametrizzazione. Dividendo per il modulo di tale vettore (ossia per $d\sigma(P)$) si ottiene il versore normale richiesto:

$$\hat{n}(P) = \frac{(\sqrt{2},0,1)}{\sqrt{3}}.$$

(5) Consideriamo la superficie $\Sigma := \{(u,v,0) : u^2+v^4 \leq 1\}$. Si ha che $\Sigma \cup S$ è superficie chiusa, inoltre la normale uscente da S indotta dalla parametrizzazione è la normale esterna

al volume V racchiuso da $\Sigma \cup S$. Se orientiamo Σ con la normale verso il basso, dal Teorema della divergenza si ha:

$$\int_{S\cup\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_V \mathrm{div}\vec{F}\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma &= -\int_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma \\ &= -\int_\Sigma (9y^2+3z, 8z^2+x, 6x^2)(0,0,-1) = 6\int_\Sigma x^2\, dx\, dy = 6\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^4}}^{\sqrt{1-y^4}} x^2\, dx\right) dy \\ &= 4\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-y^4})^3\, dy = 8\int_0^1 (1-y^4)^{3/2}\, dy.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 36). In forma di equazione totale si ha

$$\omega(x,y) = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = -y\, dx + x(1-xy)\, dy = 0.$$

La forma ω non è esatta, tuttavia si ha:

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = -1 - 1 - 2xy = -\frac{2}{x} q(x,y),$$

pertanto l'equazione ammette il fattore integrante

$$k(x) = \exp\left(\int f(x)\, dx\right) = e^{-\int 2/x\, dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Si ha:

$$k(x,y)\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2}\, dx + \frac{1}{x}(1-xy)\, dy.$$

Moltiplicando l'equazione data per $\frac{1}{x^2}$, si ottiene:

$$0 = -\frac{y}{x^2}\, dx + \frac{1}{x}\, dy - y\, dy = d\left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2}\right).$$

Pertanto in forma implicita le soluzioni sono descritte da

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Si ricavano le due soluzioni al variare di $c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-2cx^2}}{x}.$$

Se $y(1) = 3$, si ha

$$y(x) = \frac{1 + \sqrt{1+3x^2}}{x}.$$

Tale soluzione è definita in $]0, +\infty[$ e ammette un asintoto orizzontale $y = \sqrt{3}$ e verticale per $x = 0$, il limite a 0^+ è $+\infty$ ed è strettamente decrescente.

Svolgimento (Esercizio 37). Poniamo $F(x,y) = x^2 + y^2 - \cos(6xy) - 1$. Si ha che l'insieme è simmetrico rispetto agli assi e alle bisettrici perché $F(x,y) = F(y,x) = F(x,-y) = F(-x,y)$.

(1) In coordinate polari, si ha
$$F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2-\cos(6\rho^2\cos\theta\sin\theta)-1=\rho^2-\cos(3\rho^2\sin 2\theta)-1.$$
Quindi:
$$\Gamma=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ \rho^2-\cos(3\rho^2\sin 2\theta)-1=0,\rho>0,\ \theta\in[0,2\pi]\}.$$
(2) Si ha $F(x,0)=x^2-2$ da cui, sfruttando anche le simmetrie, le quattro intersezioni con gli assi sono $(\pm\sqrt{2},0)$, $(0,\pm\sqrt{2})$. Il differenziale di F è
$$dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy=(2x+6y\sin(6xy))\,dx+(2y+6x\sin(6xy))\,dy.$$
Nei punti $(\pm\sqrt{2},0)$ si ha $\partial F_x(\pm\sqrt{2},0)=0$, quindi le tangenti sono verticali e sono $x=\pm\sqrt{2}$. Per simmetria, nei punti $(0,\sqrt{2})$ le tangenti sono orizzontali e sono $y=\pm\sqrt{2}$. Nei punti $(0,\sqrt{2})$ il teorema di Dini è applicabile per ottenere una funzione implicita $y=\varphi(x)$ che esplicita Γ. Nei punti $(\pm\sqrt{2},0)$ invece no.
(3) Dall'espressione in coordinate polari si ha
$$\rho^2=\cos(3\rho^2\sin 2\theta)+1\le 2,$$
e l'uguaglianza vale per $3\rho^2\sin 2\theta=0$ o in generale per $3\rho^2\sin 2\theta=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Si ha che $F(0,0)\neq 0$, quindi $\rho\neq 0$. Allora dalla prima deve essere $\sin 2\theta=0$ da cui $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$. D'altra parte se $3\rho^2\sin 2\theta=2k\pi$, si ottiene $\rho^2=2$ quindi $6\sin 2\theta=2k\pi$ quindi $\sin 2\theta=k\pi/3$. Ma se $k\neq 0$, si ha $|k\pi/3|>1$ quindi non ci sono soluzioni. Allora ρ^2 raggiunge il suo massimo nei punti di intersezione con gli assi e tale massimo vale 2. Essendo h composizione di funzioni strettamente monotone, il massimo di h è raggiunto nelle intersezioni con gli assi e vale $e^{\sqrt{2}}+1$. Sebbene non richiesto, osserviamo che d'altra parte la derivata rispetto a θ di
$$g(\rho,\theta)=\rho^2-\cos(3\rho^2\sin 2\theta)-1$$
è
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}=6\rho^2\cos(2\theta)\sin(3\rho^2\sin(2\theta)),$$
che si annulla per $\rho=0$ (non accettabile), $\sin(2\theta)=0$ (già discusso), $\cos 2\theta=0$ il che implica $\theta=\pi/4,3\pi/4,5\pi/4,7\pi/4$. In tali punti, si ha $\rho^2=\cos(3\rho^2)+1$ e tali punti sono punti di minimo per ρ^2.
(4) Si ha $\rho^2\le 2$ quindi l'insieme è limitato, poiché F è continua, l'insieme è chiuso quindi è compatto.
(5) l'insieme è invariante per rotazioni di periodo $\pi/2$ (dall'equazione in coordinate polari) e inoltre è simmetrico rispetto alle bisettrici del primo quadrante.

Svolgimento (Esercizio 38). Consideriamo la mappa $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x,y)=(x+y,x-y)=:(u,v)$. Si ha:
$$\operatorname{Jac}\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$
Il determinante di tale matrice è $-2\neq 0$, Quindi la trasformazione è globalmente invertibile. Sia $\psi=\varphi^{-1}$. Si ha $\Omega=\psi(D)$ con $D:=\{(u,v):\ |u|<2,\ |v|<\pi\}$. L'elemento d'area è dato dal modulo del determinante dello Jacobiano di ψ, ovvero l'inverso del medesimo di φ, quindi $1/2$. Pertanto l'integrale richiesto vale:
$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u^3}{27}\sin^2 v\,du\,dv=0.$$
in quanto funzione dispari di u estesa ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

Svolgimento (Esercizio 39). Poniamo $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$.

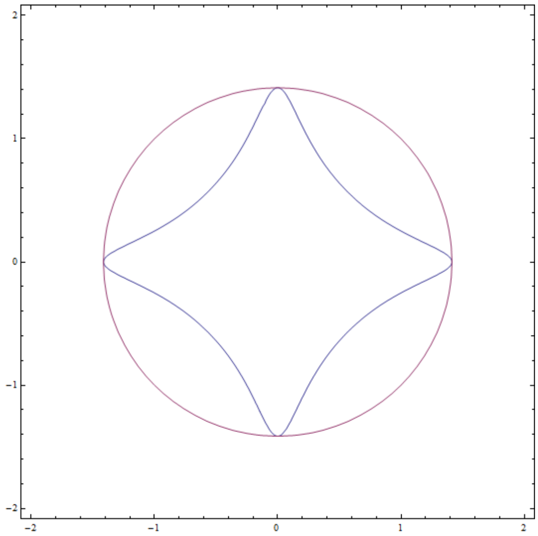


FIGURA 8. L'insieme $x^2 + y^2 - \cos(6xy) - 1 = 0$.

(1) Si ha:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0.$$
$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x, y, z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x, y, z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = (-10z, 6 - 4x, 4 - 4y).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) La curva γ è bordo del cerchio C centrato nell'origine, di raggio 1 e appartenente al piano $z = 0$. Per ottenere l'orientamento dato, è necessario orientare il cerchio con la normale verso l'alto, ovvero $(0, 0, 1)$. A questo punto per il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_C \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \int_C (4 - 4y) \, d\sigma = 4\pi.$$

Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma \cdot \dot{\gamma} d\theta = \int_0^{2\pi} (2\sin^2, 4\cos\theta, 2\cos^2) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin^3\theta + 4\cos^2\theta) \, d\theta = 4\pi.$$

(3) Si ha:

$$\operatorname{Jac} \varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \big(3r^2 - 2r\big) \cos\theta & -\big(r^3 - r^2 + 1\big) \sin(\theta) \\ \big(3r^2 - 2r\big) \sin\theta & \big(r^3 - r^2 + 1\big) \cos(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento d'area $d\sigma$, per la formula di Binet, è dato dalla radice della somma dei quadrati dei determinanti delle sottomatrici di ordine 2:

$$B_1 := \begin{pmatrix} \left(3r^2-2r\right)\cos\theta & -\left(r^3-r^2+1\right)\sin(\theta) \\ \left(3r^2-2r\right)\sin\theta & \left(r^3-r^2+1\right)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$B_2 := \begin{pmatrix} \left(3r^2-2r\right)\cos\theta & -\left(r^3-r^2+1\right)\sin(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 := \begin{pmatrix} \left(3r^2-2r\right)\sin\theta & \left(r^3-r^2+1\right)\cos(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3} = \left|r^3-r^2+1\right| \sqrt{9r^4-12r^3+4r^2+1}.$$

(4) si ha $(1,0,1) = \varphi(1,0)$. La normale è quindi il prodotto vettoriale delle colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(1,0)$, ovvero il prodotto vettoriale di $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ quindi $(-1,0,1)$. La normale unitaria si ottiene dividendo tale prodotto per il modulo:

$$\hat{n}(1,0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1).$$

(5) Il campo assegnato ha divergenza nulla. La superficie S non è una superficie chiusa, e il suo bordo è dato dalle circonferenze ($\theta \in [0,2\pi]$):

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ \gamma_2(t) = (5\cos\theta, 5\sin\theta, 2).$$

Consideriamo quindi i due cerchi ausiliari C_1 e C_2, di cui γ_1 e γ_2 sono i bordi. Orientiamo C_1 con la normale $(0,0,-1)$, C_2 con la normale $(0,0,1)$ e S con la normale uscente a $C_1 \cup C_2 \cup S$. Per il teorema della divergenza si ha:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma &= -\left(\iint_{C_1} \vec{F}\cdot\ \hat{n}\,d\sigma + \iint_{C_2} \vec{F}\cdot\ \hat{n}\,d\sigma\right) \\
&= -\left(\int_{C_1} (2y^2,4x,2x^2)(0,0,-1)\,dx\,dy + \int_{C_2} (2y^2+12,20+4x,2x^2)(0,0,1)\,dx\,dy\right) \\
&= 2\int_{C_1} x^2\,dx\,dy - 2\int_{C_2} x^2\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^5 \rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^1\rho^3\,d\rho - 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^5\rho^3\,d\rho \\
&= -312\pi.
\end{aligned}$$

Se sezioniamo S con il piano $z=1$, otteniamo il cerchio di raggio 1. La normale esterna a tale cerchio nel punto $(1,0)$ è $(1,0)$, mentre la proiezione della normale indotta dalla parametrizzazione è $(-1,0)$. Pertanto il flusso richiesto è l'opposto di quello calcolato, ossia 312π. Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_0^2\int_0^{2\pi} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1\circ\varphi & \\ F_2\circ\varphi & \operatorname{Jac}\varphi \\ F_3\circ\varphi & \end{array}\right) d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} \det\begin{pmatrix} 2\left(r^3-r^2+1\right)^2\sin^2(t)+6r & \left(3r^2-2r\right)\cos(t) & \left(-r^3+r^2-1\right)\sin(t) \\ 5r^2+4\left(r^3-r^2+1\right)\cos(t) & \left(3r^2-2r\right)\sin(t) & \left(r^3-r^2+1\right)\cos(t) \\ 2\left(r^3-r^2+1\right)^2\cos^2(t) & 1 & 0 \end{pmatrix} dr\,dt$$

$$= 312\pi,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 40). Per applicare il metodo di separazione delle variabili cerchiamo soluzioni non nulle $u(x,t) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = 3\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

le equazioni divengono allora:

$$\dot{U}(t) = \lambda U(t), \qquad 3\ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0,$$

e dalle condizioni al contorno si ricava $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica per $X(x)$ è $3\mu^2 - \lambda = 0$. Se $\lambda > 0$ si ottiene la soluzione

$$X(x) = c_0 e^{\sqrt{\lambda/3}x} + c_1 e^{-\sqrt{\lambda/3}x}.$$

Derivando:

$$\dot{X}(x) = c_0\sqrt{\lambda/3}e^{\sqrt{\lambda/3}x} - c_1\sqrt{\lambda/3}e^{-\sqrt{\lambda/3}x}.$$

Valutando in 0 e ricordando le condizioni al contorno si ha $c_0 = c_1$ perché $\lambda \neq 0$, da cui:

$$\dot{X}(x) = c_0\sqrt{\lambda/3}(e^{\sqrt{\lambda/3}x} - e^{-\sqrt{\lambda/3}x}),$$

che valutata in π si annulla solo per $c_0 = c_1 = 0$, quindi non è accettabile. Se $\lambda = 0$ si ottiene la soluzione $X_0(x) = c_0 + c_1 x$, derivando e sostituendo le condizioni in $0, \pi$ si ottiene $c_1 = 0$, quindi la soluzione $X_0 = c_0 \in \mathbb{R}$ è accettabile. Se $\lambda < 0$ si ottiene

$$X(x) = c_0 \cos(\sqrt{|\lambda|/3}x) + c_1 \sin(\sqrt{|\lambda|/3}x).$$

Derivando:

$$\dot{X}(x) = -c_0\sqrt{|\lambda|/3}\sin(\sqrt{|\lambda|/3}x) + c_1\sqrt{|\lambda|/3}\cos(\sqrt{|\lambda|/3}x).$$

Sostituendo la condizione in 0 si ottiene $c_1 = 0$ da cui:

$$\dot{X}(x) = -c_0\sqrt{|\lambda|/3}\sin(\sqrt{|\lambda|/3}x).$$

e sostituendo la condizione in π (e richiedendo $c_0 \neq 0$) si ha $\sqrt{|\lambda|/3} = n$ da cui $\lambda = -3n^2$ (si ricordi che $\lambda < 0$). Si ottiene quindi la soluzione accettabile $X_n(x) = c_n \cos(nx)$ relativa a $\lambda = -3n^2$, e questa scrittura comprende anche il caso $n = 0$. La soluzione per $U(t)$ relativa a questo dato è $U_n(t) = d_n e^{-3n^2 t}$. Pertanto rimangono definite le soluzioni elementari:

$$u_n(x,t) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{-3n^2 t}\cos(nx).$$

Cerchiamo di realizzare il dato iniziale con una sovrapposizione di soluzioni elementari. A tal proposito, consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni di $x(\pi - x)$. Prolunghiamo tale funzione per parità in $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\pi - |x|)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\,dx = -\frac{2}{n^2}(1 + (-1)^n)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\pi - |x|)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

I coefficienti dispari sono nulli. Si ricava ponendo $n = 2k$:

$$x(1 - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

La soluzione risulta allora:

$$u(x,t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-12k^2 t}\cos(2kx)}{k^2}.$$

Il termine generale della serie è maggiorato in modulo da $1/k^2$, quindi la serie converge totalmente e quindi assolutamente e uniformemente. Derivando due volte in x o una volta in t (per $t > 0$) si ottiene che il termine generale è maggiorato da una costante moltiplicata per $k^2e^{-12k^2t}$ termine generale di serie geometrica convergente, quindi la serie delle derivata prima in t e seconda in x convergono per $t>0$, fornendo quindi una soluzione del problema.

Svolgimento (Esercizio 41). Poniamo $F(x,y)=x^2+y^2-4+x^3y^3$. L'insieme è simmetrico rispetto all'origine perché $F(x,y)=F(-x,-y)$ e alla bisettrice del primo e terzo quadrante perché $F(x,y)=F(y,x)$.

(1) In coordinate polari si ha:
$$\Gamma=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in\mathbb{R}^2:\,\rho^2-4=\rho^6\sin^3(2\theta)/8\}.$$
(2) Si ha $F(x,0)=x^2-4$ nullo in $x=\pm2$. Pertanto i punti cercati sono $(\pm2,0)$ e i simmetrici rispetto alla bisettrice $(0,\pm2)$. Calcoliamo il differenziale di F ricordando che $\partial_xF(x,y)=\partial_yF(y,x)$ per le simmetrie:
$$dF(x,y)=\partial_xF(x,y)\,dx+\partial_yF(x,y)\,dy=(3x^2y^3+2x)\,dx+(3y^2x^3+2y)\,dy.$$
In particolare $dF(2,0)=4\,dx$, quindi la retta tangente in $(2,0)$ è verticale ed ha equazione $x=2$. Per simmetria, la tangente in $(-2,0)$ ha equazione $x=-2$ e le tangenti in $(0,\pm2)$ hanno equazione $y=\pm2$. Per il teorema di Dini, si ha la definizione di una funzione implicita $y=\varphi(x)$ in un intorno dei punti $(0,\pm2)$, in quanto ivi $\partial_yF(0,\pm2)\neq0$, mentre $\partial_yF(\pm2,0)=0$.
(3) Γ è chiuso perché F è continua. Osserviamo che
$$8\,\frac{\rho^2-4}{\rho^6}=\sin^3(2\theta).$$
Per $\rho>0$ sufficientemente grande, il membro di sinistra è più piccolo di 1, ed è positivo, quindi la sua radice cubica è più piccola di 1 e quindi si ha
$$\sin(2\theta)=\sqrt[3]{8\,\frac{\rho^2-4}{\rho^6}}.$$
che è risolubile in θ. Pertanto per ogni valore di $\rho>0$ sufficientemente grande si ha che esiste un valore di θ tale per cui il punto $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in\Gamma$, quindi Γ non è limitato, perciò non è compatto.
(4) In Γ si ha $\rho^2-4=-\rho^6\sin^3(2\theta)/8$, da cui $h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)_{|\Gamma}=\frac{\rho^2}{4}e^{-\rho^2/4}$. Studiamo la funzione $h(r)=\frac{r^2}{4}e^{-r^2/4}$ per $r>0$: essa ammette un unico punto di minimo assoluto in $r=0$ e si ha $h(0)=0$, inoltre per $r\to+\infty$ si ha $h(r)\to0^+$. La derivata è
$$h'(r)=-\frac{1}{8}e^{-\frac{r^2}{4}}r\left(r^2-4\right),$$
che si annulla in $r=2$. Ivi la funzione raggiunge il suo massimo e vale $1/e$. Si ha che $(0,0)\neq\Gamma$, quindi $\rho=0$ non è accettabile. Osserviamo che poiché Γ non è limitato, esiste una successione di punti in Γ lungo cui h tende a zero, pertanto non esistono punti di minimo. L'estremo inferiore di h è 0 che non è assunto. Invece esistono punti in Γ tali per cui $\rho=2$. Infatti tali punti soddisfano
$$0=-4\sin^3(2\theta)/8$$
da cui $\sin2\theta=0$ quindi $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$. I punti di massimo vincolato sono quindi $(\pm2,0)$ e $(0,\pm2)$.
(5) Studiamo i segni di ∂_xF e ∂_yF. Si ha $\partial_xF(x,y)>0$ per $3x^2y^3+2x>0$ da cui $x(3xy^3+2)>0$. Consideriamo le curve $x=0$, $3xy^3+2=0$ da cui $x=-2/(3y^3)$ e le simmetriche $y=0$, $y=-2/(3x^3)$ dividono il piano in varie regioni. Le curve $x=-2/(3y^3)$ e $y=-2/(3x^3)$ si incontrano nel punto della bisettrice $y=-x$ dato da $x^4=2/3$ ossia $x=\pm\sqrt[4]{2/3}$. Il piano risulta quindi diviso in varie regioni a seconda del segno delle derivate parziali di F. In particolare, sappiamo che attorno al punto $(2,0)$ è possibile esplicitare Γ come funzione

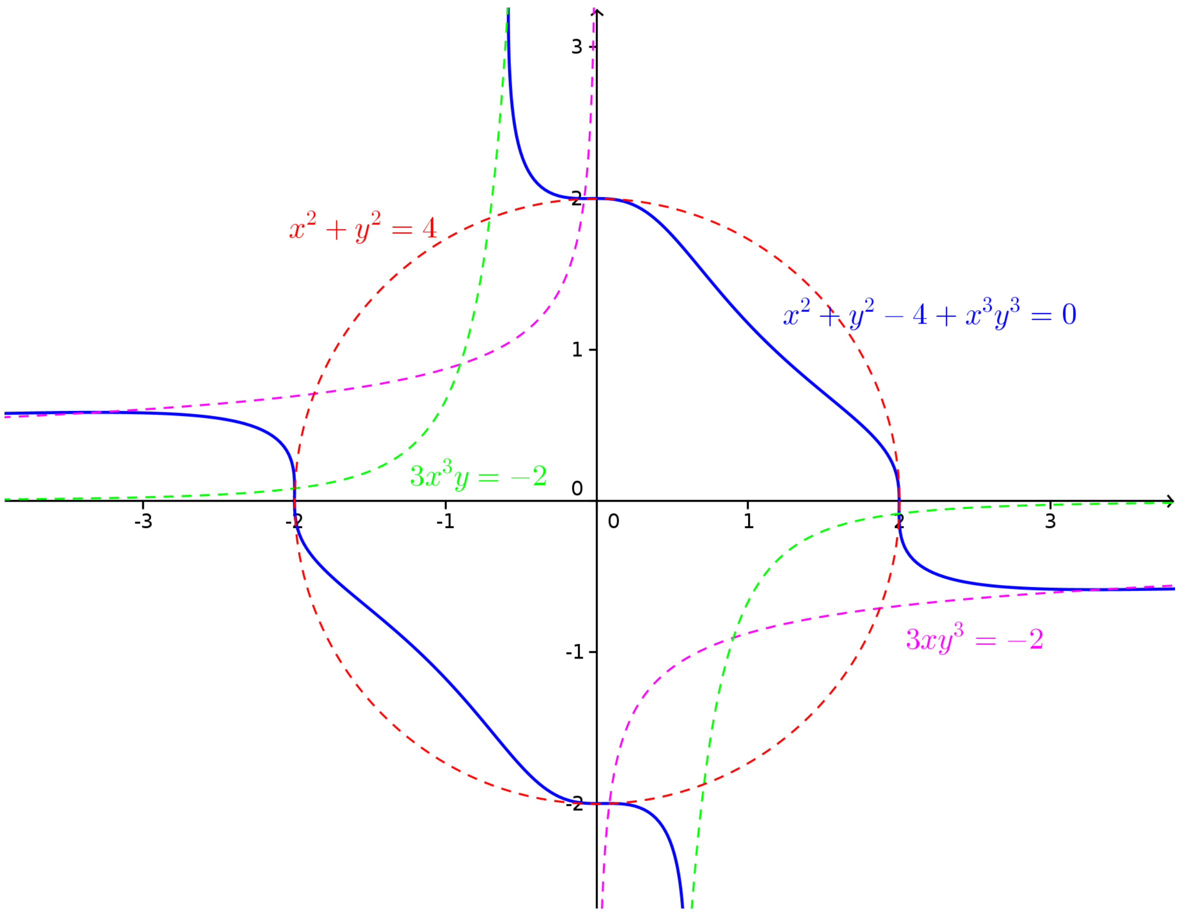


FIGURA 9. L'insieme $x^2 + y^2 - 4 + x^3y^3 = 0$ e alcune curve significative.

$y = \varphi(x)$, il che vuol dire che attorno a $(0, 2)$ vi sono punti di Γ del primo quadrante ossia con $x > 0$, $y > 0$. In tutto il primo quadrante si ha $\partial_x F(x, y) > 0$ e $\partial_y F(x, y) > 0$ quindi $-\dfrac{\partial_y F(x, y)}{\partial_x F(x, y)} < 0$, quindi se $(x_0, y_0) \in \Gamma$ appartiene a questa regione, localmente Γ attorno a tale punto è grafico di una funzione strettamente decrescente. Pertanto da $(0, 2)$ parte una curva $y = \psi(x)$ nel primo quadrante strettamente decrescente e simmetrica rispetto a $y = x$ che raggiunge l'unica intersezione con l'asse delle x ovvero $(2, 0)$. Poiché $\nabla F(x, y) \neq 0$ in tutto il quadrante, non si hanno altri rami di Γ nel primo quadrante.
Per $x < 0$ sufficientemente piccolo, e y vicino a 2, si ha che $\partial_y F(x, y) > 0$ (in quanto $\partial_y F(0, 2) = 4 > 0$), mentre $\partial_x F(x, y) < 0$ in quanto per x piccolo tale derivata è $2x + (2 - \varepsilon)x^2 < 2x + x^2y^3 < 2x + (2 + \varepsilon)x^2 < 0$ se $x < 0$ è sufficientemente piccolo. Pertanto il punto $x = 0$ è un massimo locale per la curva $y = \varphi(x)$ che esplicita localmente Γ. Osserviamo ora i seguenti fatti: nel punto $x = -1/3$, sostituendo nella curva $3y^3x + 2 = 0$ si ottiene $y = \sqrt[3]{2}$ e si ha $F(-1/3, \sqrt[3]{2}) < 0$, mentre per $x \to 0^-$ si ha $y \to +\infty$ e $F(x, y) \to +\infty$ per (x, y) vincolato a $3y^3x + 2 = 0$. Quindi la curva che esplicita Γ incontra la curva $3y^3x + 2 = 0$ in un punto compreso tra $x = -1/3$ e 0, entrando così in una regione di crescita, da cui non esce più. Per simmetria, si ricostruisce il grafico completo.

Svolgimento (Esercizio 42). Consideriamo la mappa $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x, y) = (x - y, x + y)$.

Lo Jacobiano di tale mappa è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è 2. Poiché esso è diverso da zero, la trasformazione è invertibile, sia $\psi = \varphi^{-1}$. Poniamo $D = \varphi(\Omega)$. Si ha $D = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ dalla definizione di Ω e di φ, inoltre $\Omega = \psi(D)$ e

$$\mathrm{Jac}\,\psi(u,v) = [\mathrm{Jac}\,\varphi]^{-1}(\varphi(u,v)),$$

da cui $\det\mathrm{Jac}\,\psi(u,v) = 1/2$, pertanto

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f \circ \psi(u,v)|\mathrm{Jac}\,\psi(u,v)|\,du\,dv.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\iint_\Omega \frac{\sin(x-y)}{1+(x+y)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sin u}{1+v^2}\,du\,dv = 0.$$

Svolgimento (Esercizio 43). Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = -3,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = (1, 2x+8z, -1).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\,d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(3\cos(t), -6\sin(t) - \cos(t) + 2, \sin(t) - \cos^2(t)\Big)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos t(-2+\cos t + 9\sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} -\cos^2 t\,dt = -\pi\end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\theta,y) = \begin{pmatrix} \left(v^2+1\right)^2\cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ 0 & 4v^3 \\ -\left(v^2+1\right)^2\sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix}$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det{}^2 B_1 + \det{}^2 B_2 + \det{}^2 B_3},$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4v^3 \\ -\left(v^2+1\right)^2\sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \left(v^2+1\right)^2\cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ -\left(v^2+1\right)^2\sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \left(v^2+1\right)^2\cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ 0 & 4v^3 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\omega_2 = 4\sqrt{v^2\left(v^2+1\right)^4\left(2v^4+2v^2+1\right)} = 4v\left(v^2+1\right)^2\sqrt{2v^4+2v^2+1},$$

ove si può omettere il modulo su v perché $0 \le v \le 1$.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $\left(\frac{25}{16}, \frac{1}{16}, 0\right) = \varphi(\pi/2, 1/2)$ si ha $(0, 0, -25/16)$ e $(5/2, 1/2, 0)$. La normale (non unitaria) è data dal prodotto vettoriale di tali vettori ed è pari a

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 5/2 \\ \vec{e}_2 & 0 & 1/2 \\ \vec{e}_3 & -25/16 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{25}{32}, -\frac{125}{32}, 0\right).$$

Pertanto

$$\hat{n}(P) = \frac{16\sqrt{\frac{2}{13}}}{25}\left(\frac{25}{32}, -\frac{125}{32}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}, 0\right).$$

(5) Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore è pari alla circuitazione del campo sul bordo della superficie con l'orientamento indotto. L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{cases} \gamma_1(u) = \varphi(u, 0) = (\sin(u), 0, \cos(u)),\ u \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(v) = \varphi(2\pi, v) = \left(0, v^4, \left(v^2+1\right)^2\right),\ v \in [0, 1] \\ \gamma_3(u) = \varphi(2\pi - u, 1) = (-4\sin(u), 1, 4\cos(u)),\ u \in [0, 2\pi] \\ \gamma_4(v) = \varphi(0, 1-v) = \left(0, (1-v)^4, \left((1-v)^2+1\right)^2\right),\ v \in [0, 1], \end{cases}$$

le cui derivate sono:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(u) = (\cos(u), 0, -\sin(u)),\ u \in [0, 2\pi] \\ \dot{\gamma}_2(v) = \left(0, 4v^3, 4v\left(v^2+1\right)\right),\ v \in [0, 1] \\ \dot{\gamma}_3(u) = (-4\cos(u), 0, -4\sin(u)),\ u \in [0, 2\pi] \\ \dot{\gamma}_4(v) = \left(0, -4(1-v)^3, -4\left((1-v)^2+1\right)(1-v)\right),\ v \in [0, 1], \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_0^{2\pi} \left(3\sin(u) + 4\cos^2(u), 2 - \sin(u), -\sin^2(u)\right) \cdot (\cos(u), 0, -\sin(u))\, du \\ =& \int_0^{2\pi} \left(\sin^3(u) + \cos(u)\left(3\sin(u) + 4\cos^2(u)\right)\right) du \\ =& 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_0^1 \left(4\left(v^2+1\right)^4, 2 - 6v^4, v^4\right) \cdot \left(0, 4v^3, 4v\left(v^2+1\right)\right) dv \\ =& \int_0^1 \left(4\left(v^2+1\right)v^5 + 4\left(2 - 6v^4\right)v^3\right) dv \\ =& \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_0^{2\pi} \left(64\cos^2(u) - 12\sin(u), 4\sin(u) - 4, 1 - 16\sin^2(u)\right) \cdot (-4\cos(u), 0, -4\sin(u))\, du \\
=& \int_0^{2\pi} \left(-4\sin(u)\left(1 - 16\sin^2(u)\right) - 4\cos(u)\left(64\cos^2(u) - 12\sin(u)\right)\right) du \\
=& 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_0^1 \left(4\left((1-v)^2+1\right)^4, 2 - 6(1-v)^4, (1-v)^4\right) \cdot \left(0, -4(1-v)^3, -4\left((1-v)^2+1\right)(1-v)\right) dv \\
=& \int_0^1 \left(-4\left((1-v)^2+1\right)(1-v)^5 - 4\left(2 - 6(1-v)^4\right)(1-v)^3\right) dv \\
=& -\frac{1}{6},
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente. Si osserva che il contributo dato da γ_1 e γ_3 deve essere complessivamente nullo, in quanto si tratta della stessa curva percorsa nei due sensi opposti.

Svolgimento (Esercizio 44). In forma di equazione totale si ha

$$\omega(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^2+y^2)\,dy = 0.$$

Si ha

$$\partial_y p - \partial_x q = x^2 + y^2 = 1 \cdot q(x,y),$$

quindi si ha un fattore integrante della forma $h(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x$. Pertanto l'equazione totale

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + e^x(x^2+y^2)\,dy = 0$$

è esatta. Per trovare una primitiva, integriamo la forma lungo una spezzata con i lati paralleli agli assi congiungente $(0,0)$ al generico punto (x_0, y_0):

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{y_0} e^{x_0}(x_0^2 + y^2)\,dy = e^{x_0} y_0 (x_0^2 + y_0^2/3).$$

Pertanto $V(x,y) = ye^x(x^2+y^2/3)$ e la soluzione in forma implicita è $V(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. La soluzione corrispondente alle condizioni iniziali si ottiene ponenedo $C = V(0, \sqrt[3]{2}) = 1$, ossia: $ye^x(x^2 + y^2/3) = 1$.

Svolgimento (Esercizio 45). Poniamo $F(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(3x^2+y^2\right)^2$. L'insieme è simmetrico rispetto agli assi e origine: $F(\pm x, \pm y) = F(x,y)$ per ogni scelta possibile dei segni.

(1) In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho^4 \left(-\left(2\cos^2(\theta)+1\right)^2 + \rho - 1\right) = 0\} \\ &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho = 1 + \left(2\cos^2(\theta)+1\right)^2\} \cup \{(0,0)\}\end{aligned}$$

(2) Per $\theta = 0, \pi$, si ottiene $\rho = 10$ e per $\rho = \pi/2, 3\pi/2$ si ha $\rho = 2$. Quindi i punti cercati sono $(\pm 10, 0)$, $(0, \pm 2)$, $(0,0)$. Calcoliamo il differenziale di F:

$$\begin{aligned}dF(x,y) &= \partial_x F(x,y)\, dx + \partial_y F(x,y)\, dy \\ &= x\left(5\left(x^2+y^2\right)^{3/2} - 40x^2 - 16y^2\right) dx + \\ &\quad + y\left(5\left(x^2+y^2\right)^{3/2} - 16x^2 - 8y^2\right) dy.\end{aligned}$$

In particolare $\partial_y F(\pm 10, 0) = 0$, quindi le retta tangenti in $(\pm 10, 0)$ sono verticali ed hanno equazione $x = \pm 10$. Analogamente, $\partial_x F(0, \pm 2) = 0$ e le tangenti in $(0, \pm 2)$ hanno equazione $y = \pm 2$ (rette orizzontali). Per il teorema di Dini, si ha la definizione di una funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno dei punti $(0, \pm 2)$, in quanto ivi $\partial_y F(0, \pm 2) \neq 0$, mentre $\partial_y F(\pm 10, 0) = 0$.

(3) Γ è chiuso perché F è continua. Dall'equazione in coordinate polari, abbiamo che ρ è limitato, quindi Γ è compatto. Sempre dall'equazione in coordinate polari, osserviamo che se $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \Gamma)$ allora o $\rho = 0$ oppure $\rho \geq 1$, quindi l'origine è un punto isolato. Pertanto $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ e chiuso e limitato (perché Γ lo è) quindi compatto.

(4) Osserviamo che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \log\arctan\rho^2$ è una funzione strettamente crescente di ρ, quindi i suoi massimi e minimi sono raggiunti in corrispondenza dei massimi e minimi di ρ vincolati a $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$. Tali massimi sono raggiunti per $\rho = 10$, $\theta \in \{0, \pi\}$, quindi nei punti $(\pm 10, 0)$ e il valore massimo è $\log\arctan(100)$, mentre i minimi sono raggiunti per $\rho = 2$ quindi nei punti con $\cos\theta = 0$, ovvero $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, ossia $(0, \pm 2)$, e il valore minimo è $\log\arctan 4$.

(5) Osserviamo che per $0 < \theta < \pi/2$ si ha che ρ è strettamente decrescente dal suo massimo 10 al suo minimo 2. Si ricostruisce grazie alle simmetrie il grafico completo.

Svolgimento (Esercizio 46). Consideriamo la mappa $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x,y) = (x-y, x+y)$. Lo Jacobiano di tale mappa è

$$\operatorname{Jac}\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è 2. Poiché esso è diverso da zero, la trasformazione è invertibile, sia $\psi = \varphi^{-1}$. Poniamo $D = \varphi(\Omega)$. Si ha $D = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ dalla definizione di Ω e di φ, inoltre $\Omega = \psi(D)$ e

$$\operatorname{Jac}\psi(u,v) = [\operatorname{Jac}\varphi]^{-1}(\varphi(u,v)),$$

da cui $\det\operatorname{Jac}\psi(u,v) = 1/2$, pertanto

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \iint_D f \circ \psi(u,v) |\operatorname{Jac}\psi(u,v)|\, du\, dv.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\iint_\Omega \frac{(x-y)e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{ue^{-u^2}}{1+v^2}\, du\, dv = 0.$$

Svolgimento (Esercizio 47). Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

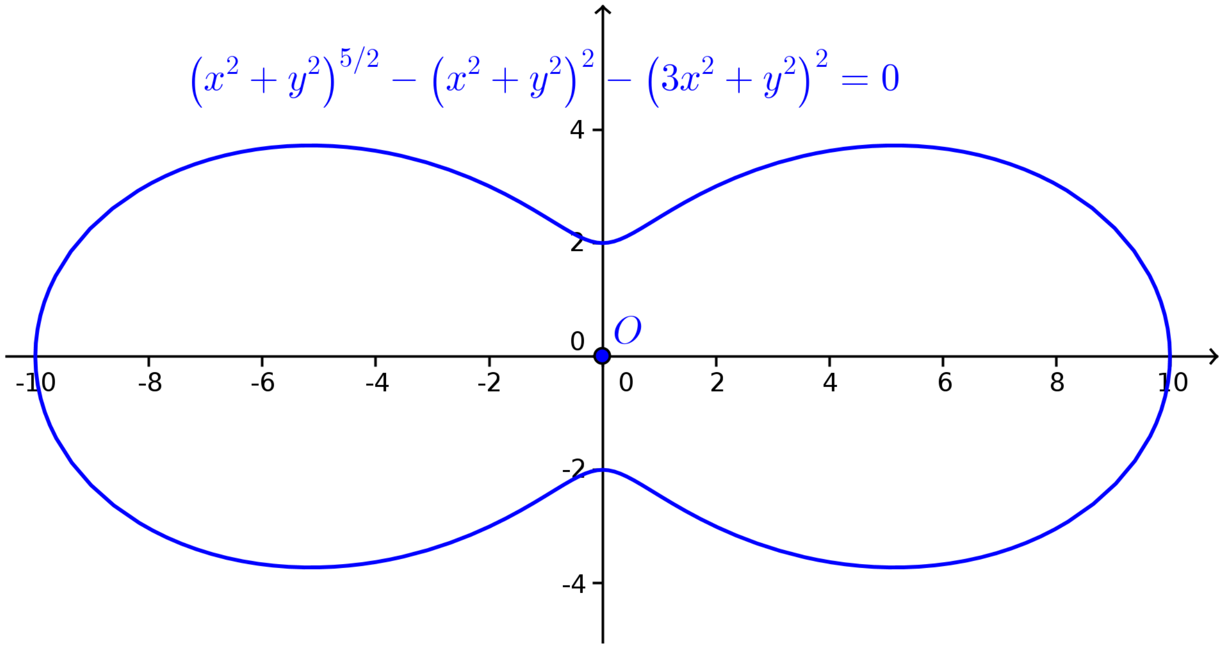


FIGURA 10. L'insieme $\left(x^2+y^2\right)^{5/2}-\left(x^2+y^2\right)^2-\left(3x^2+y^2\right)^2=0$.

(1) Si ha

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=\partial_x F_1+\partial_y F_2+\partial_z F_3=4,$$
$$\operatorname{rot}\vec{F}=\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & F_1\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3\end{pmatrix}=(3,2x+8z,-4).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\,d\gamma &= \int_0^{2\pi}\vec{F}(\cos t,\sin t,0)\cdot(-\sin t,3\cos t,0)\,dt\\ &=\int_0^{2\pi}\left(6\sin(t)+5\cos(t),-3\sin(t)-2\cos(t),12\sin(t)-\cos^2(t)\right)\cdot(-\sin t,\cos t,0)\,d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}-6-7\sin 2t\,dt=-12\pi.\end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.

Più brevemente: la curva γ è il bordo di un'ellisse $\mathcal{E}$ nel piano $z=0$ centrata nell'origine e di semiassi 1 e 3. Dalla regola della mano destra, per indurre l'orientamento richiesto sul bordo, è necessario che la normale a tale ellisse sia rivolta verso l'alto, ossia $\hat{n}=(0,0,1)$. Per il teorema di Stokes, la circuitazione è il flusso del rotore, quindi

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\gamma=\int_{\mathcal{E}}\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=-4\int_{\mathcal{E}}d\sigma=-4\operatorname{Area}(\mathcal{E})=-12\pi,$$

essendo l'area di un'ellisse pari a π moltiplicato per il prodotto dei semiassi.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\operatorname{Jac}\varphi(\theta,y)=\begin{pmatrix}0 & 2v\\ v^2\cos(u) & 2v\sin(u)\\ -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u)\end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3},$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \\ -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix},$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix},$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \end{pmatrix},$$

da cui

$$\omega_2 = \sqrt{4v^6\cos^2(u) + \left(-v\cos(2u) + 2v^3 + v\right)^2 + 4\left(v^2+1\right)^2 v^2\sin^2(u)}.$$

Allo stesso risultato si ottiene calcolando il prodotto esterno delle colonne della matrice Jacobiana della parametrizzazione.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $P(2,1,0) = \varphi(\pi/2,1)$ si ha $(0,0,-2)$ e $(2,2,0)$. La normale (non unitaria) è data dal prodotto vettoriale di tali vettori ed è pari a

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 2 \\ \vec{e}_2 & 0 & 2 \\ \vec{e}_3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (4,-4,0)\,.$$

Pertanto

$$\hat{n}(P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0)\,.$$

(5) Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore è pari alla circuitazione del campo sul bordo della superficie con l'orientamento indotto. Tale bordo è contenuto nell'insieme parametrizzato dalle curve $\gamma_1,\gamma_3 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2,\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ che descrivono l'immagine tramite φ della frontiera dello spazio dei parametri percorsa in senso antiorario, ossia

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \varphi(t,0) = (1,0,\cos(t)),\\
\gamma_2(t) &= \varphi(2\pi,t) = \left(t^2+1,0,t^2+1\right),\\
\gamma_3(t) &= \varphi(2\pi - t,1) = (2,-\sin(t),2\cos(t)),\\
\gamma_4(t) &= \varphi(0,1-t) = ((1-t)^2+1,0,(1-t)^2+1).
\end{aligned}$$

Il contributo dato da γ_2 e γ_4 deve essere complessivamente nullo, in quanto si tratta della stessa curva percorsa nei due sensi opposti. Per il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned}
\Phi(S,\operatorname{rot}\vec{F}) &= \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_4} \vec{F}\cdot d\ell \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2(t)+5, \cos(t)-2,-1)(0,0,-\sin(t))\,dt + \\
&\quad + \int_0^1 \left(4\left(t^2+1\right)^2 + 5\left(t^2+1\right), t^2 - 2\left(t^2+1\right)+1, -\left(t^2+1\right)^2\right)(2t,0,2t)\,dt + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left(-2\sin(t) + 16\cos^2(t) + 10, \sin(t) + 2\cos(t) - 4, -4\sin(t) - 4\right)(0,-\cos(t),-2\sin(t))\,dt + \\
&\quad + \int_0^1 (4\left((1-t)^2+1\right)^2 + 5\left((1-t)^2+1\right), (1-t)^2 - 2\left((1-t)^2+1\right)+1, -\left((1-t)^2+1\right)^2)\cdot \\
&\quad \cdot (-2(1-t),0,-2(1-t))\,dt.
\end{aligned}$$

Gli integrali estesi da 0 a 1 sono l'uno opposto dell'altro (si usi il cambio di variabile $y = 1-t$) Risulta quindi:

$$\begin{aligned}\Phi(S, \operatorname{rot} \vec{F}) &= \int_0^{2\pi} \sin t\, dt + \int_0^{2\pi} (-2(-4\sin(t) - 4)\sin(t) - \cos(t)(\sin(t) + 2\cos(t) - 4))\; dt \\ &= \int_0^{2\pi} (8\sin^2(t) + 8\sin(t) - 2\cos^2(t) + 4\cos(t) - \sin(t)\cos(t))\, dt = 6\pi\end{aligned}$$

Per calcolo diretto si ha:

$$\Phi(S, \operatorname{rot} \vec{F}) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2v \\ 8\cos(u)\left(v^2+1\right) + 2\left(v^2+1\right) & v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \\ -4 & -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix} du\, dv$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(v^2\cos(u)(6v\cos(u) + 8v) + \\ &\qquad + \left(v^2+1\right)\sin(u)\left(-16v^3\cos(u) + 6v\sin(u) - 16v\cos(u) - 4v^3 - 4v\right)\big)\, du\, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(-4v^5\sin(u) - 16v^5\sin(u)\cos(u) + 6v^3\sin^2(u) - 8v^3\sin(u) + 6v^3\cos^2(u) + \\ &\qquad + 8v^3\cos(u) - 32v^3\sin(u)\cos(u) + 6v\sin^2(u) - 4v\sin(u) - 16v\sin(u)\cos(u)\big)\, du\, dv = 6\pi,\end{aligned}$$

(ricordando che i termini in cui compaiono potenze dispari di seno e coseno si annullano nell'integrazione) che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 48). Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non identicamente nulle della forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Sostituendo e dividendo per $U(t)X(x)$, si ottiene:

$$\frac{\dot{U}(t)X(t)}{U(t)X(x)} - \frac{2U(t)\ddot{X}(x)}{U(t)X(x)} + 1 = 0,$$

da cui:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \frac{2\ddot{X}(x)}{X(x)} - 1 = \lambda \in \mathbb{R},$$

pertanto si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) &= \lambda U(t), \\ 2\ddot{X}(x) &= (\lambda+1)X(x). \end{cases}$$

L'equazione per U ha soluzione $U(t) = de^{-\lambda t}$. Le condizioni al contorno $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ porgono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica per $X(x)$ è $2\mu^2 - (\lambda+1) = 0$. Se $\lambda > 1$ si ottengono due soluzioni reali distinte μ_1, μ_2, di cui almeno una diversa da zero e di segno opposto. e la soluzione è $X(x) = c_1e^{\mu_1 x} + c_2e^{\mu_2 x}$. Derivando, $\dot{X}(x) = c_1\mu_1e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2e^{\mu_2 x}$ Imponendo le condizioni al contorno in 0 si ha $c_1 + c_2 = 0$, quindi $\dot{X}(x) = c_1(\mu_1e^{\mu_1 x} - \mu_2e^{\mu_2 x})$ Le condizioni in π impongono o $c_1 = 0$ oppure $\mu_1e^{\mu_1\pi} = \mu_2e^{\mu_2\pi}$. La seconda eventualità va esclusa, perché le soluzioni hanno segno opposto e non nulle. Quindi $c_1 = c_2 = 0$, ma questo non è accettabile.

Se $\lambda = -1$ si ha la soluzione doppia $\mu = 0$, la soluzione generale è $X(x) = c_1 + c_2x$, la cui derivata è identicamente c_2, che quindi deve essere nulla. Allora si ha la soluzione costante $X(x) = c_1$, $c_1 \neq 0$. Se $\lambda < -1$ si hanno due soluzioni puramente immaginarie di segno opposto: $\mu_1 = i\sqrt{|\lambda+1|/2}$, $\mu_2 = -i\sqrt{|\lambda+1|/2}$. La soluzione generale ha forma $X(x) = c_1\cos(\sqrt{|\lambda-1|/2}\,x) + c_2\sin(\sqrt{|\lambda+1|/2}\,x)$, la cui derivata è $\dot{X}(x) = \sqrt{|\lambda+1|/2}(-c_1\sin(\sqrt{|\lambda+1|/2}\,x) + c_2\cos(\sqrt{|\lambda+1|/2}\,x))$. La condizione in $x = 0$ porge $c_2 = 0$, e la condizione in π porge $c_1 = 0$ (non accettabile) oppure $\sqrt{|\lambda+1|/2} = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Quindi $\lambda = -2n^2 - 1$ tenendo conto del fatto che $\lambda + 1 < 0$. Si ottiene quindi la soluzione $X_n(x) = c_n\cos nx$ relativa a $\lambda = -2n^2 - 1$. Questa scrittura comprende anche il caso $\lambda = -1$.

Sostituendo i valori di λ accettabili, si ottiene $U_n(t) = d_n e^{(-2n^2-1)t}$. Quindi si hanno le soluzioni elementari, posto $a_n = c_n d_n$:

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{(-2n^2-1)t}\cos nx.$$

Per determinare i coefficienti a_n, sviluppiamo in serie di Fourier di soli coseni il dato iniziale, ovvero prolunghiamo il dato iniziale ad una funzione pari definita in $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[0,\pi/2]}(|x|)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx = 1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[0,\pi/2]}(|x|)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}[\sin nx]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}.$$

Quindi:

$$\chi_{[0,\pi/2]}(|x|) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos(nx).$$

La soluzione è pertanto:

$$u(t,x) = \frac{e^{-t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx).$$

Si ha per $t>0$, $x\in]0,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{N}|u_n(t,x)| = \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}e^{(-2n^2-1)t},$$

$$\sum_{n=1}^{N}|\partial_t u_n(t,x)| = \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}(-2n^2-1)e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{2n^2+1}{n}e^{(-2n^2-1)t},$$

$$\sum_{n=1}^{N}|\partial_{xx} u_n(t,x)| = \sum_{n=1}^{N}n^2\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}ne^{(-2n^2-1)t}.$$

Se $t_0>0$ è fissato, per n sufficientemente grande e $t>t_0$, si ha che $\frac{2n^2+1}{n}e^{(-2n^2-1)t} < \frac{2n^2+1}{n}e^{(-2n^2-1)t_0}$, $ne^{(-2n^2-1)t} < ne^{(-2n^2-1)t_0}$ e $e^{(-2n^2-1)t}/n < e^{(-2n^2-1)t_0}/n$, e tutti e tre sono minori di $1/n^2$, quindi le serie convergono puntualmente e uniformemente su ogni sottinsieme $[\varepsilon,+\infty[\times]0,\pi[$ con $\varepsilon>0$, e pertanto $u(t,x)$ è soluzione del problema.

Svolgimento (Esercizio 49).

a. Osserviamo che raccogliendo n al numeratore e n^3 al denominatore si ha per n sufficientemente grande

$$\frac{n+5n^{1/2}}{n^{7/2}-6} = \frac{1}{n^2}\frac{1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}}{n^{1/2}-\dfrac{6}{n^3}} \sim \frac{1}{n^{5/2}},$$

$$\frac{3^{n+9}}{2^{3n-4}} = \frac{3^9\cdot 3^n}{2^{-4}8^n} = 3^9\cdot 16\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

Quindi

$$\left|\frac{n+5n^{1/2}}{n^{7/2}-6}\cos nx + (-1)^n\frac{3^{n+9}}{2^{3n-4}}\sin nx\right| \le \frac{1}{n^2} + 3^9\cdot 16\left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

I termini di destra sono il termine generale rispettivamente della serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$ e della serie geometrica di ragione $3/8 < 1$. Entrambe tali serie sono a termini positivi e convergono, quindi la serie costituita dalla somma dei termini generali converge e pertanto la serie in S converge totalmente, quindi uniformemente. Se deriviamo il termine generale della serie, compare un fattore n a numeratore, tuttavia

$$n\,\frac{n+5n^{1/2}}{n^{7/2}-6} =\sim \frac{1}{n^{3/2}},$$
$$n\frac{3^{n+9}}{2^{3n-4}} = \frac{3^9\cdot 3^n}{2^{-4}8^n} = 3^9\cdot 16n\left(\frac{3}{8}\right)^n \leq 16\cdot 2^n\left(\frac{3}{8}\right)^n \leq 16\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Per quanto riguarda il primo termine, a destra abbiamo il termine generale della serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$ e nel secondo abbiamo la serie geometrica di ragione $3/4 < 1$, quindi anche la serie derivata converge totalmente. Per il teorema di derivazione per serie, S è derivabile. Poiché l'intervallo di integrazione è compatto e la serie converge uniformemente, è possibile integrare termine a termine. I termini contenenti coseni e seni hanno integrale nullo per periodicità, quindi

$$\int_0^{2\pi} S(x)\,dx = \int_0^{2\pi} 3\,dx = 6\pi.$$

b. Procediamo in modo analogo al precedente:

$$\frac{n^{1/2}-4}{8n^3-3n^2} \sim \frac{1}{8n^{5/2}},$$
$$\frac{2^{4n+9}}{3^{3n-4}} = \frac{2^9\cdot 16^n}{3^{-4}27^n} = 2^9\cdot 81\left(\frac{16}{27}\right)^n$$

La conclusione su convergenza e derivabilità è analoga al punto precedente per gli stessi motivi. Poiché l'intervallo di integrazione è compatto e la serie converge uniformemente, è possibile integrare termine a termine. I termini contenenti coseni e seni hanno integrale nullo per periodicità, quindi

$$\int_0^{2\pi} S(x)\,dx = \int_0^{2\pi} 7\,dx = 14\pi.$$

Svolgimento (Esercizio 50).

a. Se $f(x,y) = x^3+y^3-3xy-3$, si ha $\operatorname{grad} f(x,y) = 3(x^2-y, y^2-x)$. I punti critici sono quelli ove tale gradiente è nullo. Sostituendo, si ottiene $y^4-y=0$ che ammette come radici reali $y=0$, $y=1$. Pertanto i punti critici sono $(0,0)$ e $(1,1)$. La matrice Hessiana è

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori si possono calcolare come radici di $\lambda^2 - \lambda \operatorname{Traccia} \operatorname{Hess} f + \det \operatorname{Hess} f = 0$. Nel caso del punto $(0,0)$, la traccia è nulla e il determinante è -9, quindi gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2-9=0$ ovvero ± 9. Essendo di segno discorde, questo è un punto di sella. Nel caso del punto $(1,1)$, la traccia è 12 e il determinante è 27, quindi gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2-12\lambda+27=0$, quindi $\lambda = 6\pm\sqrt{36-27} = 6\pm 3 > 0$, pertanto questo è un punto di minimo.

b. Se $f(x,y) = x^3-y^3-3xy+3$, si ha $\operatorname{grad} f(x,y) = 3(x^2-y, -y^2-x)$. I punti critici sono quelli ove tale gradiente è nullo. Sostituendo, si ottiene $y^4-y=1$ che ammette come radici reali $y = 0$, $y = 1$. Pertanto i punti critici sono $(0, 0)$ e $(-1, 1)$. La matrice Hessiana è

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & -6y \end{pmatrix} \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori si possono calcolare come radici di $\lambda^2 - \lambda \operatorname{Traccia} \operatorname{Hess} f + \det \operatorname{Hess} f = 0$. Nel caso del punto $(0, 0)$, la traccia è nulla e il determinante è -9, quindi gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2 - 9 = 0$ ovvero ± 9. Essendo di segno discorde, questo è un punto di sella. Nel caso del punto $(-1, 1)$, la traccia è -12 e il determinante è 27, quindi gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2 + 12\lambda - 27 = 0$, quindi $\lambda = -6 \pm \sqrt{36 - 27} = -6 \pm 3 < 0$. Essendo negativi, questo è un punto di massimo.

Svolgimento (Esercizio 51).

a. Sia $f(x, y, z) = x^2 - y^2 z$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z^2 + y^2 - x^2 = 4\}$. Riscriviamo le equazioni del vincolo: $y^2 + z^2 = 9 - x^2$, $z^2 + y^2 = 4 + x^2$, da cui si ricava $9 - x^2 = 4 + x^2$ quindi $x = \pm\sqrt{5/2}$. Pertanto il vincolo si riduce a

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \pm\sqrt{5/2},\ y^2 + z^2 = 13/2\} \\ &= \{(x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 : x = \pm\sqrt{5/2},\ \rho = \sqrt{13/2}, \theta \in [-\pi, \pi[\}, \end{aligned}$$

quindi il vincolo è parametrizzato da $\gamma^\pm(\theta) = (\pm\sqrt{5/2}, \sqrt{13/2}\,\cos\theta, \sqrt{13/2}\,\sin\theta)$ perciò

$$g(\theta) := f \circ \gamma^\pm(\theta) = \frac{5}{2} - \frac{13\sqrt{26}}{2}\cos^2\theta\sin\theta = \frac{5}{2} - \frac{13\sqrt{26}}{2}(\sin\theta - \sin^3\theta).$$

La funzione è continua sul compatto V, quindi ammette massimo e minimo assoluto. Derivando, si ha

$$\frac{d}{d\theta} f \circ \gamma^\pm(\theta) = -\frac{13\sqrt{26}\cos\theta}{2}(\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) = -\frac{13\sqrt{26}\cos\theta}{4}(-2\cos\theta + 3\cos^3\theta).$$

Tale derivata si annulla nell'intervallo della parametrizzazione per $\cos\theta = 0$, ovvero $\theta = \pm\pi/2$, e $\cos^2\theta = 2/3$, quindi $\theta = \pm\arccos(\pm\sqrt{2/3})$. Derivando ancora, si ottiene

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f \circ \gamma^\pm(\theta) = -\frac{13\sqrt{26}}{2}(2\sin\theta - 9\cos^2\theta\sin\theta).$$

Valutando nei punti in questione, si ottiene che il punto corrispondente a $\theta = \pi/2$ è di massimo relativo, quello corrispondente a $\theta = -\pi/2$ è di minimo relativo. Nei punti $\bar\theta$ corrispondenti a $\cos^2\theta = 2/3$ si ha

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f \circ \gamma^\pm(\bar\theta) = 13\sqrt{26}\sin\bar\theta.$$

Pertanto i minimi relativi sono per $\theta = \arccos(\sqrt{2/3})$ e $-\arccos(-\sqrt{2/3})$ e i massimi relativi sono per $-\arccos(\pm\sqrt{2/3})$ e $\arccos(-\sqrt{2/3})$. Per quanto riguarda il valore di massimi e minimi, si ottiene:

$$\begin{aligned} g(\pm\pi/2) &= 5/2, \\ g(\arccos(\pm\sqrt{2/3})) &= 5/2 - \frac{13\sqrt{26}}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{45-\sqrt{13}\sqrt{78}}{18} < 5/2, \\ g(-\arccos(\pm\sqrt{2/3})) &= 5/2 + \frac{13\sqrt{26}}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{45+\sqrt{13}\sqrt{78}}{18} > 5/2, \end{aligned}$$

quindi i punti

$$\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{13}{3}}, \sqrt{\frac{13}{6}}\right)$$

sono di massimo assoluto e i punti

$$\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{13}{3}}, -\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$$

sono di minimo assoluto.

b. Se $f(x,y,z) = z^2 + x^2 y$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 16, x^2+y^2-z^2 = 4\}$, con passaggi analoghi al punto precedente si ottiene

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \pm\sqrt{6}\, x^2+y^2 = 10\} \\ &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \pm\sqrt{6}\, \rho = \sqrt{10}, \theta \in [-\pi,\pi[\}, \end{aligned}$$

quindi il vincolo è parametrizzato da $\gamma^{\pm}(\theta) = (\sqrt{10}\,\cos\theta, \sqrt{10}\,\pm\sqrt{6})$ perciò

$$g(\theta) := f \circ \gamma^{\pm}(\theta) = 6 + 10\sqrt{10}\cos^2\theta\sin\theta.$$

La funzione è continua sul compatto V, quindi ammette massimo e minimo assoluto. Trascurando le costanti inessenziali, la funzione è la stessa del punto precedente. Tenendo conto della differenza di segno del secondo addendo rispetto al punto precedente, si ha quindi che i punti corrispondenti a $\theta = \pi/2$, $-\arccos(\pm\sqrt{2/3})$ e $\arccos(-\sqrt{2/3})$ sono di minimo relativo, quelli corrispondenti a $\theta = -\pi/2$, $\theta = \arccos(\sqrt{2/3})$ e $-\arccos(-\sqrt{2/3})$ sono di massimo relativo, Per quanto riguarda il valore di massimi e minimi, si ottiene:

$$\begin{aligned} g(\pm\pi/2) &= 6, \\ g(\arccos(\pm\sqrt{2/3})) &= 6 + \frac{20\sqrt{\frac{10}{3}}}{3} > 6, \\ g(-\arccos(\pm\sqrt{2/3})) &= 6 - \frac{20\sqrt{\frac{10}{3}}}{3} < 6, \end{aligned}$$

In definitiva, i punti

$$\left(\pm 2\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{10}{3}}, \pm\sqrt{6}\right)$$

sono di massimo assoluto, e i punti

$$\left(\pm 2\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{10}{3}}, \pm\sqrt{6}\right)$$

sono di minimo assoluto

Svolgimento (Esercizio 52). Poniamo $F(x,y,z) = (x^2+z^2+y^2)^2 - (x^2-y^2-z^2)$.

a. Si ha

$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(4x\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2x, 4y\left(x^2+y^2+z^2\right) + 2y, 4z\left(x^2+y^2+z^2\right) + 2z\right).$$

Effettivamente, $F(p_0) = 0$, inoltre $\operatorname{grad} F(p_0) = (0, \sqrt{2}, 0)$, pertanto $\partial_y F(p_0) \neq 0$ e per il teorema di Dini F definisce implicitamente una funzione $y = g(x,z)$ intorno al punto $p_0 = (\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$. Si ha

$$\operatorname{grad} g(x,z) = -\left.\frac{(\partial_x F(x,y,z), \partial_z F(x,y,z))}{\partial_y F(x,y,z)}\right|_{y=g(x,z)}.$$

Sostituendo, si ha che in p_0 tali derivate sono entrambe nulle. I punti intorno cui non si può esplicitare y in funzione di x, z sono quelli dove $\partial_y F(x,y,z) = 0$, ovvero il piano $y = 0$. I punti intorno cui non è possibile esplicitare nessuna delle variabili in funzione delle rimanenti due sono quelli dove $\operatorname{grad} F(x,y,z) = 0$. Da $\partial_y F(x,y,z) = \partial_z F(x,y,z) = 0$ ricaviamo $z = y = 0$. Sostituendo nell'espressione di $\partial_x F$ otteniamo $x = 0$ oppure $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, pertanto i punti in questione sono $(0,0,0)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$.

b. Poniamo $F(x,y,z) = y^2 - x^2 - z^2 - (x^2+z^2+y^2)^2$. Si ha

$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(-4x\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2x, 2y - 4y\left(x^2+y^2+z^2\right), -4z\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2z\right).$$

Effettivamente, $F(p_0) = 0$, inoltre $\operatorname{grad} F(p_0) = (-\sqrt{2}, 0, 0)$, pertanto $\partial_x F(p_0) \neq 0$ e per il teorema di Dini F definisce implicitamente una funzione $x = f(y,z)$ intorno al punto $p_0 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 0)$. Si ha

$$\operatorname{grad} f(y,z) = -\left.\frac{(\partial_y F(x,y,z), \partial_z F(x,y,z))}{\partial_y F(x,y,z)}\right|_{y=f(y,z)}.$$

Sostituendo, si ha che in p_0 tali derivate sono entrambe nulle. I punti intorno cui non si può esplicitare x in funzione di y, z sono quelli dove $\partial_x F(x,y,z) = 0$, ovvero il piano $x = 0$. I punti intorno cui non è possibile esplicitare nessuna delle variabili in funzione delle rimanenti due sono quelli dove $\operatorname{grad} F(x,y,z) = 0$. Da $\partial_x F(x,y,z) = \partial_z F(x,y,z) = 0$ ricaviamo $z = x = 0$. Sostituendo nell'espressione di $\partial_y F$ otteniamo $y = 0$ oppure $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, pertanto i punti in questione sono $(0,0,0)$ e $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Svolgimento (Esercizio 53).

a. Il dominio D è l'intersezione del cerchio centrato nell'origine e di raggio 2 con il semipiano $y \geq 1$, in particolare esso è simmetrico rispetto all'asse x. Poiché si ha $f(x,y) = -f(-x,y)$, si ottiene che l'integrale è nullo.

b. L'integrale richiesto è

$$I := \int_0^1 \left(\int_0^{2x} x^2\,dy\right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{3-x} x^2\,dy\right) dx + \int_0^2 \left(\int_{-x}^{0} x^2\,dy\right) dx + \int_2^3 \left(\int_{2(x-3)}^{0} x^2\,dy\right) dx$$

$$:= \int_0^1 2x^3\,dx + \int_1^3 (3-x)x^2\,dx + \int_0^2 x^3\,dx + \int_2^3 2(3-x)x^2\,dx = 16.$$

Svolgimento (Esercizio 54). Poniamo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 2z,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = (-y, x, 0).$$

Anche se non richiesto, osserviamo che poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) La curva Γ è una circonferenza giacente nel piano $z = 3$, centrata in $(0,0,3)$ di raggio 4. parametrizziamo la circonferenza in modo opportuno definendo $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3)$, e osserviamo che l'orientamento richiesto è rispettato. La circuitazione è quindi:

$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{\ell} = \int_0^2 \pi \vec{F}(\gamma(t))\dot{\gamma}\, dt = \int_0^{2\pi} (12\cos t, 12\sin t, 1)\cdot(-4\sin t, 4\cos t, 0)\, dt = 0,$$

ricordando che l'integrale esteso da 0 a 2π di $\sin x \cos x$ è nullo.

Si poteva anche procedere nel modo seguente: la curva Γ è bordo della superficie S_2. Se orientiamo S_2 con la normale (costante) verso l'alto $\hat{n} = (0,0,1)$, abbiamo che il bordo ha l'orientamento antiorario richiesto dall'esercizio. A questo punto possiamo applicare il Teorema di Stokes:

$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{\ell} = \int_{S_2} \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\, d\sigma_2 = \int_{S_2} (-y, z, 0)\cdot(0,0,1)\, d\sigma_2 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

(3) Parametrizziamo S_1 in coordinate cilindriche

$$\varphi_1(\theta, z) = (\sqrt{25 - z^2}\cos\theta, \sqrt{25 - z^2}\sin\theta, z), \qquad \theta \in [0, 2\pi[,\ 3 \le z \le 5.$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi_1(\theta, z) = \begin{pmatrix} -\sqrt{25 - z^2}\sin\theta & -\dfrac{z\cos\theta}{\sqrt{25 - z^2}} \\ \sqrt{25 - z^2}\cos\theta & -\dfrac{z\sin\theta}{\sqrt{25 - z^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La normale è data dal prodotto vettoriale delle colonne della matrice $\mathrm{Jac}\,\varphi_1(\theta, z)$, diviso per la sua norma, quindi:

$$\hat{n}(\theta, z) = \frac{\partial_\theta\varphi_1 \wedge \partial_z\varphi_1}{|\partial_\theta\varphi_1 \wedge \partial_z\varphi_1|} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{25 - z^2}\cos\theta, \sqrt{25 - z^2}\sin\theta, z\right).$$

L'elemento d'area è dato dalla norma del prodotto vettoriale delle colonne della matrice $\mathrm{Jac}\,\varphi_1(\theta, z)$, pertanto esso è

$$d\sigma_1 = |\partial_\theta\varphi_1 \wedge \partial_z\varphi_1|\, d\theta\, dz = 5\, d\theta\, dz.$$

Osserviamo che poiché $z > 0$ si ha che la normale è rivolta verso l'alto, quindi la parametrizzazione è concorde con quella richiesta dall'esercizio.

Il flusso è

$$\Phi(S_1,\vec{F}) := \det\left(\begin{array}{c|c} F_1\circ\varphi_1 & \\ F_2\circ\varphi_1 & \mathrm{Jac}\,\varphi_1 \\ F_3\circ\varphi_1 & \end{array}\right) dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_3^5 \det\begin{pmatrix} z\sqrt{25-z^2}\cos(\theta) & -\sqrt{25-z^2}\sin(\theta) & -\dfrac{z\cos(\theta)}{\sqrt{25-z^2}} \\ z\sqrt{25-z^2}\sin(\theta) & \sqrt{25-z^2}\cos(\theta) & -\dfrac{z\sin(\theta)}{\sqrt{25-z^2}} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_3^5 -z(-26+z^2)\,dz\,d\theta = 144\pi.$$

Per quanto riguarda la superficie S_2, essa è parametrizzata da

$$\varphi_2(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 3), \qquad 0\le\rho\le 4.$$

L'elemento d'area è semplicemente $d\sigma = \rho\,d\rho\,d\theta$, la normale unitaria è costante e vale $\hat{n}(\rho,\theta) = (0,0,1)$, quindi il flusso è

$$\Phi(S_2,\vec{F}) = \int_{S_2}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (3\rho\cos\theta, 3\rho\sin\theta, 1)\cdot(0,0,1)\rho\,d\rho\,d\theta = 16\pi.$$

Si poteva procedere anche nel modo seguente: le superfici S_1 e S_2 costituiscono rispettivamente la superficie curva e la base di una calotta sferica C di raggio 4 e altezza 2 con base costituita dal circolo giacente nel piano $z=3$ e centrato in $(0,0,3)$. Per il teorema della divergenza, si ha:

$$\int_C \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV = \Phi(S_1,\vec{F}) - \Phi(S_2,\vec{F}),$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che, nell'applicazione del teorema della divergenza, la normale deve essere esterna a C, quindi la normale a S_2 deve essere rivolta verso il basso. Quindi, parametrizzando in coordinate cilindriche

$$\int_C \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV = \int_3^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{25-z^2}} 2z\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = 128\pi.$$

Il valore di $\Phi(S_2,\vec{F})$ è facile da calcolare, e quindi si ha $\Phi(S_2,\vec{F}) = 128\pi + 16\pi = 144\pi$, che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 55). Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non identicamente nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo e dividendo per $T(t)X(x)$, si ottiene

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono così:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = \lambda T(t) \\ \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Le condizioni al contorno si scrivono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica per $X(x)$ è data da $\mu^2 = \lambda$. Distinguiamo tre casi:

(1) Se $\lambda > 0$ le radici sono $\pm\sqrt{\lambda}$ si ottiene $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ da cui $\dot{X}(x) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})$ Dovendo soddisfare $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_1 = c_2$, da cui $\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$ e poiché $\dot{X}(\pi) = 0$ si ottiene $c_1 = c_2 = 0$, quindi il caso $\lambda > 0$ non è accettabile.
(2) Se $\lambda = 0$, la soluzione è $X(x) = c_0 + c_1 x$, sostituendo le condizioni al contorno si ha $X(x) = c_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(3) Se $\lambda < 0$ le radici sono complesse coniugate e si ha $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \sin(-\sqrt{|\lambda|}x)$ da cui $\dot{X}(x) = -\sqrt{|\lambda|}(c_1 \sin(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \cos(-\sqrt{|\lambda|}x))$ Sostituendo $\dot{X}(0) = 0$, si ottiene $c_2 = 0$, da cui $\dot{X}(x) = -c_1\sqrt{|\lambda|}\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$ e sostituendo $\dot{X}(\pi) = 0$ si ha $\sqrt{|\lambda|} = n \in \mathbb{Z}$ da cui $\lambda = -n^2 < 0$.

Pertanto si ottengono le soluzioni $X_n(x) = c_n \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che comprende anche il caso $n = 0$. Le soluzioni T_n relative ai valori accettabili di λ sono quindi $T_n(t) = d_n e^{-n^2 t}$. Posto $a_n = c_n d_n$, si ottengono le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = a_n e^{-n^2 t}\cos(nx).$$

Cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\cos(nx),$$

da cui

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Per determinare i coefficienti a_n, prolunghiamo per parità il dato iniziale ad una funzione definita in $[-\pi,\pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. I coefficienti sono dati da:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2},$$

in particolare per $n = 2(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, cioè n pari non nullo, si ha $a_n = 0$, e per $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ si ha $a_{2k+1} = \dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}$. Si ha poi:

$$2a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \pi.$$

Quindi:

$$u(t,x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2 t}}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).$$

Poniamo

$$g_k(t,x) = \frac{e^{-(2k+1)^2 t}}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x),$$

e osserviamo che la serie che definisce u converge totalmente, infatti:

$$\sup_{\substack{t\ge 0\\ x\in[0,\pi]}} |g_k(t,x)| \le \frac{1}{(2k+1)^2},$$

dove a sinistra abbiamo il termine generale di una serie geometrica convergente, pertanto la serie converge uniformemente. Inoltre si ha

$$\sup_{\substack{t\ge 0\\ x\in[0,\pi]}} |\partial_x g_k(t,x)| = \left|\frac{e^{-(2k+1)^2 t}}{2k+1}\sin((2k+1)x)\right|.$$

Sia $m \in \mathbb{N}$. Se $t > 0$, per k sufficientemente grande si ha $(2k+1)^m e^{-(2k+1)^2 t} < 1/(2k+1)$, da cui si ottiene $|\partial_x g_k(t,x)| < 1/(2k+1)^2$, $|\partial_{xx} g_k(t,x)| < 1/(2k+1)^2$, $|\partial_t g_k(t,x)| < 1/(2k+1)^2$. Quindi le derivate prima e seconda di u rispetto alla x e la derivata prima rispetto a u convergono totalmente e uniformemente se $t > 0$, $x \in]0,\pi[$. In tale insieme, la serie è derivabile termine a termine. La funzione u pertanto risolve l'equazione. Le derivate rispetto alla x non convergono in $t = 0$ Per $t = 0$, il dato è assunto in quanto la serie converge uniformemente in $t \geq 0$, $x \in [-\pi,\pi]$ Per $t > 0$, la derivata rispetto a x converge uniformemente per $x \in [-\pi,\pi]$, quindi anche i dati di tipo Neumann sono assunti.

Svolgimento (Esercizio 56). Osserviamo preliminarmente la simmetria $f(x,y) = -f(-x,-y)$. Si ha $\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 3y^2 - 27, -6xy - 120)$.

(1) Il gradiente si annulla se

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = -20. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha $y = -20/x$ da cui $x^2 - 400/x^2 = 9$ quindi $x^4 - 9x^2 - 400 = 0$. Le soluzioni reali sono $x = \pm 5$. Si ottengono quindi i punti critici $P_+ = (5,-4)$ e $P_=(-5,4)$. La matrice Hessiana di f è

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

da cui

$$\operatorname{Hess} f(-5,4) = \begin{pmatrix} -30 & -24 \\ -24 & 30 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - \lambda \text{TracciaHess} f(-5,4) + \det\text{Hess} f(-5,4) = 0.$$

ossia $\lambda^2 = 1476$ e perciò $\lambda = \pm 6\sqrt{41}$. Sono di segno discorde, quindi il punto è di sella. Per simmetria, anche l'altro punto sarà di sella.

(2) Si ha $\partial_y f(1,-1) = -144 \neq 0$, quindi localmente è possibile esprimere la curva di livello di f passante per questo punto come funzione $y = \varphi(x)$.

(3) Parametrizziamo il vincolo: $|x| = 1 - |y|$ da cui $-1 \leq y \leq 1$ e $x = \pm(1 - |y|)$ (quindi $-1 < x < 1$). Studiamo separatamente i vari casi. Si ha che $x = 0$ solo se $y = \pm 1$ e $y = 0$ solo se $x = \pm 1$ Se $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ si ha

$$f(1-y,y) = -3y^2(1-y) + (1-y)^3 - 27(1-y) - 120y.$$

La derivata di tale espressione è $3y^2 - 3(1-y)^2 - 6y(1-y) - 93 = 2(-13 - 48y + y^3) < 0$. Se $0 < x < 1$, $-1 < y < 0$ si ha

$$f(1+y,y) = -3y^2(y+1) + (y+1)^3 - 27(y+1) - 120y.$$

La derivata di tale espressione è $-3y^2 - 6(y+1)y + 3(y+1)^2 - 147 = -6\left(y^2 + 24\right) < 0$. Quindi in $D \cap \{(x,y) :\ 0 < x < 1\}$ non vi sono estremali. Per simmetria di f e D, non ve ne sono nemmeno in $D \cap \{(x,y) :\ -1 < x < 0\}$. Studiamo i punti $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$. Si ha $f(\pm 1, 0) = \mp 26$ e $f(0,\pm 1) = - \mp 120$. Quindi $(0,1)$ è di minimo assoluto vincolato e $(0,-1)$ è di massimo assoluto vincolato. Osserviamo che in un intorno di $(1,0)$ escluso il vincolo è parametrizzato rispettivamente da $(1+y,y)$ se $y < 0$ e $(1-y,y)$ se $y > 0$ Sia per $y < 0$ che per $y > 0$ in tale intorno la funzione composta con la parametrizzazione è strettamente decrescente, perché ha derivata negativa, quindi $(1,0)$ non è di massimo o minimo relativo. Ragionamento analogo per $(-1,0)$.

Svolgimento (Esercizio 57). Parametrizziamo il volume dato K in coordinate cilindriche:

$$\varphi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z), \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \theta \in [0,2\pi], 0 \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}.$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\operatorname{Jac}\varphi(\rho,\theta,z)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

L'elemento di volume è $dV=|\det\operatorname{Jac}\varphi(\rho,\theta,z)|\,d\rho\,d\theta\,dz=\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. Quindi:

$$\int_K dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^{1/2}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=\pi\int_0^{1/4}\sqrt{1-t}\,dt=\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\pi.$$

Svolgimento (Esercizio 58). Poniamo

$$f_n(x)=\frac{1}{n\sqrt{1+n}}e^{-nx}\sin(\sin nx).$$

Si ha $|f_n(x)|\le n^{-3/2}$ per $x\ge 0$, e poichè la serie $\sum n^{-3/2}$ è convergente, si ha che la serie converge totalmente e uniformemente in $[0,+\infty[$. Osservando poi che

$$|f_n'(x)|=n^{-3/2}ne^{-nx}|\sin(\sin nx)+\cos\sin nx\cdot\cos nx|\le 2n^{-3/2}ne^{-nx},$$

si ha che in ogni compatto di $]0,+\infty[$ le derivate convergono totalmente, quindi uniformemente infatti sia K compatto di $]0,+\infty[$ e $x_0=\inf K>0$. Si ha per $x\in K$ $|f_n'(x)|\le n^{-3/2}2ne^{-nx_0}$ e per n sufficientemente grande si ha $2ne^{-nx_0}<1$. Quindi la serie è derivabile termine a termine. Per le derivate successive, osserviamo che in modulo la derivata d-esima di f_n è limitata da $n^{-3/2}dn^de^{-nx}$ e quindi, ragionando come prima sia K compatto di $]0,+\infty[$ e $x_0=\inf K>0$. Per $x\in K$, n sufficientemente grande si ha $dne^{-nx_0}<1$ e perciò $|\partial_x^d f_n|\le n^{-3/2}$. Quindi la somma è C^∞.

Svolgimento (Esercizio 59). Si veda la soluzione dell'Esercizio 54.

Svolgimento (Esercizio 60). Si veda la soluzione dell'Esercizio 55.

Svolgimento (Esercizio 61). Osserviamo preliminarmente la simmetria $f(x,y)=f(y,x)$.

(1) Calcoliamo $\operatorname{grad} f(x,y)=(3x^2+3y,3y^2+3x)$. Il gradiente è nullo se si ha $x^2+y=0$ e $y^2+x=0$. Si ricava quindi $y^4+y=0$ da cui $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(-1,-1)$. La matrice Hessiana di f è

$$\operatorname{Hess} f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 3\\ 3 & 6y\end{pmatrix},\quad \operatorname{Hess} f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad \operatorname{Hess} f(-1,-1)=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le radici dell'equazione $\lambda^2-\lambda\operatorname{Traccia}(\operatorname{Hess} f)+\operatorname{Det}(\operatorname{Hess} f)=0$. Nel punto $(0,0)$ si ha $\lambda^2=9$ da cui $\lambda=\pm3$. Gli autovalori sono di segno discorde, quindi $(0,0)$ è punto di sella. Nel punto $(-1,-1)$ si ha $\lambda^2-12\lambda+27=0$ da cui $\lambda=-3$ e $\lambda=-9$. Gli autovalori sono negativi, quindi $(-1,-1)$ è punto di massimo locale.

(2) Poniamo $F(x,y)=x^3+y^3-1$. La funzione $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e inoltre $\nabla F(x,y)=3(x^2,y^2)$. Nei punti di Γ si ha sempre $\nabla F\neq 0$, quindi per il teorema di Dini Γ è localmente grafico di una funzione $y=\varphi(x)$ di classe C^1 oppure $x=\psi(y)$ di classe C^1, pertanto è una curva regolare. In $(0,1)$ si ha $\partial_y F(0,1)=3$, quindi il Teorema di Dini è applicabile e quindi in un intorno di $(0,1)$ l'insieme Γ può essere espresso come grafico di una funzione regolare di x. In generale, si ha $\partial_y F(x,y)=0$ se $y=0$, cui corrisponde il punto $(1,0)$ di Γ. Attorno a tali punti il Teorema di Dini non è applicabile per ottenere Γ come grafico di una funzione di x. Ciò non basta a concludere che sia impossibile farlo, perché il Teorema di Dini porge condizioni sufficienti. Tuttavia è sufficiente notare come per ogni x_0 fissato, l'equazione $y^3=1-x_0^3$ ammetta una sola soluzione reale, quindi Γ si può esprimere come grafico di una funzione della sola x, tuttavia tale funzione non è regolare: infatti la tangente al grafico in $(1,0)$ è $\operatorname{grad} f(1,0)\cdot(x-1,y)=0$ ossia $x=1$, verticale. Tale funzione è $y=\operatorname{sign}(1-x^3)\cdot\sqrt[3]{|1-x^3|}$

(3) Per ogni $(x,y) \in \Gamma$ si ha $f(x,y) = g(x) = 1 + 3x\,\mathrm{sign}(1-x^3)\sqrt[3]{|1-x^3|}$. Osserviamo che

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = -\infty$$

e questo esclude la presenza di minimi assoluti. Per $x > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 3x\sqrt[3]{x^3-1} \\ g'(x) &= -3\sqrt[3]{x^3-1} - 3x\frac{1}{3}(x^3-1)^{-2/3}\cdot 3x^2 < 0 \end{aligned}$$

pertanto per $x > 1$ si ha che g è strettamente decrescente. Per $x < 1$ si ha:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + 3x\sqrt[3]{1-x^3} \\ g'(x) &= 3\sqrt[3]{1-x^3} - 3x\cdot\frac{1}{3}(1-x^3)^{-2/3}\cdot 3x^2 \\ &= 3(1-x^3)^{-2/3}(1-x^3-x^3) = 3(1-x^3)^{-2/3}(1-2x^3) \end{aligned}$$

Tale derivata è nulla per $x = 2^{-1/3}$, negativa per $2^{-1/3} < x < 1$ e positiva per $x < 2^{-1/3}$. Quindi esiste un unico estremale relativo e assoluto, esso è un massimo assoluto e viene raggiunto nel punto $(2^{-1/3}, 2^{-1/3})$ e vale $1 + 3\cdot 2^{-2/3}$.

Svolgimento (Esercizio 62). Parametrizziamo D in coordinate cilindriche:

$$\varphi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \qquad 0 \le r \le 1,\ \theta\in[0,2\pi[,\ z\in[-1,1].$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'elemento di volume è il modulo del determinante Jacobiano di tale matrice, cioé $|\det \mathrm{Jac}\,\varphi(r,\theta,z)| = r$. L'integrale è:

$$\begin{aligned} \int_D (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^1 (r^2\sin^2\theta + z^2)\,r\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 (r^2\sin^2\theta+z^2)\,r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right) r\,dr\,d\theta = 2\int_0^1 \left(\pi r^3 + \frac{2\pi r}{3}\right) dr = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 63). Poniamo $\vec F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

(1) La divergenza è:

$$\mathrm{div}\,\vec F(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 1.$$

Il rotore è:

$$\mathrm{rot}\,\vec F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \vec e_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec e_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec e_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = 0$$

Il campo è definito su $\mathbb{R}^3$ che è convesso, quindi semplicemente connesso, e pertanto, essendo irrotazionale, è conservativo. Il potenziale scalare V deve soddisfare $\mathrm{grad}\,V = \vec F$. Si può procedere o osservando direttamente la struttura del campo (è un campo molto semplice), in tal caso posto

$$V(x,y,z) = e^x\cos y + \frac{z^2}{2},$$

si ha la funzione V è un potenziale scalare per $\vec{F}$, oppure integrando $\vec{F}$ lungo la curva congiungente $(0,0,0)$ a (x,y,z) formata dalle spezzate $\gamma_1(t)=(t,0,0)$ da $(0,0,0)$ a $(x,0,0)$, $\gamma_2(t)=(x,t,0)$ da $(x,0,0)$ a $(x,y,0)$ e infine $\gamma_3(t)=(x,y,t)$ da $(x,y,0)$ a (x,y,z).

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x,y,z)&=\int_0^x \vec{F}(\gamma_1(t))\cdot\dot{\gamma}_1(t)\,dt+\int_0^y \vec{F}(\gamma_2(t))\cdot\dot{\gamma}_2(t)\,dt+\int_0^z \vec{F}(\gamma_3(t))\cdot\dot{\gamma}_3(t)\,dt\\&=\int_0^x (e^t,0,0)\,(1,0,0)\,dt+\int_0^y (e^x\cos t,-e^x\sin t,0)\,(0,1,0)\,dt+\\&+\int_0^z (e^x\cos y,-e^x\sin y,z)\,(0,0,1)\,dt\\&=e^x-1+e^x\cos y-e^x+z^2/2=V(x,y,z)-1,\end{aligned}$$

che conferma il risultato precedente (due potenziali differiscono per una costante).

(2) Dato che il campo è conservativo, si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell=V(\gamma(1))-V(\gamma(0))=V(1,1,1)-V(0,0,0)=e\cos 1-\frac{1}{2}.$$

(3) Le superfici S_1 e S_2 sono rispettivamente la base e la superficie laterale di un paraboloide retto a sezione circolare la cui base è il cerchio centrato in $(0,0,1)$ di raggio 1 e giacente nel piano $z=1$ e il vertice è nell'origine. La normale alla superficie S_1 è costante e, dovendo essere orientata verso l'alto, è semplicemente $(0,0,1)$. La superficie S_1 è parametrizzata in coordinate polari da $\varphi(r,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,1)$, da cui $d\sigma=\rho\,d\rho\,d\theta$. Si ha quindi

$$\Phi(\vec{F},S_1)=\int_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^1 F_3(r\cos\theta,r\sin\theta,1)\,r\,dr\,d\theta=\pi.$$

La superficie $S_1\cup S_2$ è una superficie chiusa che racchiude il volume C. Se dotiamo S_2 della normale verso il basso (ovvero uscente da C) il Teorema della Divergenza porge:

$$\int_C \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\Phi(\vec{F},S_1)+\Phi(\vec{F},S_2^-).$$

Il termine di destra è il volume del paraboloide. In coordinate cilindriche si ha $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$ con $0<z<1$, $\theta\in[0,2\pi]$ e $0<\rho<\sqrt{z}$. L'elemento di volume il determinante dello Jacobiano della parametrizzazione, ovvero ρ. Quindi il volume è:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}\rho\,d\rho\,d\theta\,dz=2\pi\int_0^1\frac{z}{2}\,dz=\frac{\pi}{2}.$$

Esso è $\pi/2$, da cui $\Phi(\vec{F},S_2^-)=-\pi/2$, e quindi il flusso richiesto (dove la normale S_2 è verso il basso) è $\Phi(\vec{F},S_2)=\pi/2$.

Svolgimento (Esercizio 64). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x)=T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ha $\ddot{T}(t)X(x)=T(t)\ddot{X}(x)$. Dividendo per $T(t)X(x)$ e separando le variabili si ottiene

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)}=\lambda\in\mathbb{R}.$$

Imponendo a $T(t)X(0)=T(t)X(\pi)=0$ si ottiene $X(0)=X(\pi)=0$, e inoltre imponendo $T(0)X(x)=0$ si ha $T(0)=0$ da cui:

$$\begin{cases}\ddot{T}(t)=\lambda T(t), & t>0,\\ T(0)=0;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\ddot{X}(x)=\lambda X(x), & x\in]-\pi,\pi[,\\ X(0)=X(\pi)=0.\end{cases}$$

Studiamo l'equazione per la funzione $X(\cdot)$. Il polinomio caratteristico è $\mu^2=\lambda$.

i. Se $\lambda > 0$ si ottiene $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ e la soluzione generale è $X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$. Sostituendo le condizioni al contorno, si ha $X(0) = c_1 + c_2 = 0$ da cui $c_1 = -c_2$ e $X(x) = c_1(e^{-\sqrt{\lambda}x} - e^{\sqrt{\lambda}x})$. Sostituendo $X(\pi) = c_1(e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi}) = 0$ il che implica $c_1 = c_2 = 0$ perché $\lambda \neq 0$, ma la soluzione identicamente nulla non è accettabile.
ii. Se $\lambda = 0$ si ottiene come soluzione generale $X(x) = c_1 + c_2 x$. Dovendo essere $X(0) = 0$ si ha $c_1 = 0$ e dovendo essere $X(\pi) = 0$ si ottiene che anche $c_2 = 0$, quindi anche questo caso non è accettabile.
iii. Se $\lambda < 0$ si ottiene come soluzione generale $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$. Si ha $X(0) = 0$ se $c_1 = 0$ e $X(\pi) = 0$ se $\sqrt{|\lambda|} = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quindi, poiché $\lambda < 0$, si ha $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Si ottiene quindi $X_n(x) = c_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consideriamo ora l'equazione per $T(t)$ subordinata ai valori accettabili di $\lambda = -n^2 < 0$. Si ottiene $T_n(t) = d_n \cos(nt) + e_n \sin(nt)$ e sostituendo la condizione $T(0) = 0$ si ha $d_n = 0$. Posto $b_n = e_n c_n$, si costruiscono così le soluzioni elementari $u_n(t, x) = b_n \sin(nx) \sin(nt)$. Cercheremo una soluzione in forma di serie

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\sin(nt).$$

Per determinare i coefficienti b_n, calcoliamo $\partial_t u_n(t, x) = nb_n \sin(nx) \cos(nt)$ e quindi $\partial_t u_n(0, x) = nb_n \sin(nx)$. Cerchiamo di raggiungere il dato $\partial_t u(0, x)) = \sin^3 x$ con una sovrapposizione di tali funzioni:

$$\partial_t u(0,x)) = \sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin(nx)$$

D'altra parte, dall'identità trigonometrica suggerita si ha:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin(nx),$$

pertanto si ha $b_n = 0$ se $n \neq 1, 3$, e quindi:

$$\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = b_1 \sin(x) + 3b_3 \sin(3x),$$

da cui $b_1 = 3/4$ e $b_3 = -1/12$. Quindi la soluzione è data da

$$u(t,x) = \frac{3}{4}\sin x \sin t - \frac{1}{12}\sin 3x \sin 3t.$$

La serie è in realtà una somma finita, quindi converge in tutti i sensi, la soluzione è C^∞, assume il dato al bordo e soddisfa l'equazione.

Pur non essendo richiesto dall'esercizio, dimostriamo l'identità trigonometrica data grazie alle formule di Eulero:

$$\begin{aligned}\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^3 &= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - 3e^{2ix}e^{-ix}}{8} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3e^{-ix} - 3e^{ix}}{2}\right) = \frac{\sin 3x}{4} - \frac{3\sin x}{4}.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 65). Poniamo $f(x, y) = 4x^4 - 3x^3 y + y^2 - 1$. Poiché $f(x, y) = -f(-x, -y)$ si ha che l'insieme è simmetrico rispetto all'origine.

(1) Si ha $f(r\cos t, r\sin t) = 4r^4\cos^4 t - 3r^4 \sin t \cos^3 t + r^2 \sin^2 t - 1$, da cui

$$\Gamma = \{(r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2 : 4r^4\cos^4 t - 3r^4 \sin t\cos^3 t + r^2\sin^2 t - 1,\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

(2) Studiamo $f(x, mx) = m^2x^2 + (4-3m)x^4 - 1$. Escludendo il caso $x = 0$, per soddisfare l'equazione si deve avere

$$x^2 = \frac{m^2 - \sqrt{m^4 - 12m + 16}}{6m - 8}, \text{ oppure } x^2 = \frac{m^2 + \sqrt{m^4 - 12m + 16}}{6m - 8}$$

Per $m \to 4/3^+$ si ha nella seconda espressione $x^2 \to +\infty$, quindi Γ non è compatto.

(3) Si ha $f(x, 0) = 4x^4 - 1$, che si annulla per $x = \pm\sqrt{2}/2$. Pertanto le intersezioni con l'asse x sono $P_1 = (\sqrt{2}/2, 0)$ e $P_2 = -P_1$. e $f(0, y) = y^2 - 1$ che si annulla per $y = \pm 1$. Pertanto si hanno le intersezioni con l'asse y sono $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = -P_3$. Il differenziale di f è

$$df(x, y) = \partial_x f(x, y)\, dx + \partial_y f(x, y)\, dy = (16x^3 - 9x^2y)\, dx + (2y - 3x^3)\, dy.$$

Le rette tangenti in $(x_0, y_0) \in \Gamma$ sono date da

$$\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Nel nostro caso, la tangente in P_1 è $4\sqrt{2}(x - \sqrt{2}/2) - 3\sqrt{2}y/4 = 0$, la tangente in P_2 è $-4\sqrt{2}(x + \sqrt{2}/2) + 3\sqrt{2}y/4 = 0$, la tangente in P_3 è $y = 1$, la tangente in P_4 è $y = -1$. In tutti i punti considerati si ha $\partial_y f \neq 0$, quindi per il teorema di Dini Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.

(4) Dall'equazione $f(x, y) = 0$, si ottiene che massimizzare $h(x, y)$ vuol dire trovare il massimo di $1 - y^2$ vincolato a Γ, ovvero il minimo di y^2 vincolato a Γ. Tale minimo è 0 ed è raggiunto nei punti P_1 e P_2. Non esistono invece minimi assoluti vincolati di h: per il punto (2) per ogni $K > 0$ esistono punti di $(x, mx) \in \Gamma$ tali per cui $m > 4/3$, $x > K$, $y > 4K/3$, pertanto y^2 è illimitato superiormente in Γ e quindi h è illimitata inferiormente.

(5) Si ha $(z, \dot{z}) \in \Gamma$ se e solo se $f(z, \dot{z}) = 0$. In particolare, se $z(0) = 1/2$ si ha $f(1/2, \dot{z}(0)) = 0$ se e solo se $\dot{z}(0)^2 - \frac{3\dot{z}(0)}{8} - \frac{3}{4} = 0$. Tale equazione ha due soluzioni distinte $\frac{1}{16}\left(3 \pm \sqrt{201}\right)$. Osserviamo che $\partial_y f(1/2, t) \neq 0$ se $t \neq 3/16$, quindi l'equazione differenziale $f(z, \dot{z}) = 0$ in un intorno delle condizioni iniziali si scrive come $\dot{z} = \varphi(z)$ con φ di classe C^1. Pertanto, per Cauchy-Lipschitz, l'equazione ammette esattamente due soluzioni di classe C^1 attorno a $z(0) = 1/2$, corrispondenti a $\dot{z}(0) = \frac{1}{16}\left(3 \pm \sqrt{201}\right)$.

Svolgimento (Esercizio 66). Osserviamo che $-1 \leq z \leq 1$. Posto $D(r) := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r\}$, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D(\sqrt{1-z^2})} e^z\, dx\, dy \right) dz = \int_{-1}^{1} e^z \operatorname{Area}(D(\sqrt{1-z^2}))\, dz = \int_{-1}^{1} e^z \pi (1 - z^2)\, dz \\
&= \pi[e^z]_{-1}^{1} - \pi \int_{-1}^{1} e^z z^2\, dz = \pi(e - 1/e) - \pi[e^z z^2]_{-1}^{1} + 2\pi \int_{-1}^{1} e^z z\, dz = 2\pi[e^z z]_{1}^{-1} - 2\pi \int_{-1}^{1} e^z\, dz \\
&= 2\pi(e + 1/e) - 2\pi(e - 1/e) = 4\pi/e.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 67). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0, \\
\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) &= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \vec{e}_2(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \vec{e}_3(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \\
&= (3 + 2y, -12x + 2z, -1 + 8x).
\end{aligned}$$

Il rotore non è nullo, per cui il campo non è conservativo.

(2) La curva γ è il bordo del cerchio D centrato in $(0,2,0)$ di raggio 5 contenuto nel piano $y=2$. La normale unitaria a D è costante e vale $\hat{n}(D)=(0,\pm1,0)$. Determiniamo il verso positivo dell'orientamento della normale indotta dalla parametrizzazione: si deve avere per la regola della mano destra $\hat{n}(D)=(0,-1,0)$. Altro modo: un osservatore con i piedi su D vede il bordo $\gamma(t)$ percorso in senso antiorario solo se il vettore che va dai suoi piedi alla testa è parallelo e concorde a $\hat{n}(D)$. Per il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\ell = \int_D \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma,$$

nel nostro caso si ha che tali integrali sono:

$$\int_D \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_D (12x-2z)\,d\sigma = 0$$

perché D è simmetrico rispetto alla sostituzione $x\mapsto -x$, $y\mapsto y$ e $z\mapsto -z$ e l'integranda è dispari rispetto alla medesima sostituzione.
Verifichiamo il risultato ottenuto per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\,d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (2+25\sin^2 t, 100\cos^2 t-15\sin t, 150\cos^2 t+4)\cdot(-5\sin t, 0, 5\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (-10\sin t-125\sin^3 t+750\cos^3 t+20\cos t)\,dt = 0,\end{aligned}$$

per le simmetrie di seno e coseno e la periodicità.

(3) Si ha

$$\operatorname{Jac}\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 3r^2+2r & 0\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Posto:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 3r^2+2r & 0\end{pmatrix}, \qquad \det A_1 = r\left(3r^3+2r^2+3r+2\right)\sin(\theta), \tag{4}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \det A_2 = 2r(1+r^2), \tag{5}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3r^2+2r & 0\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \det A_3 = r\left(3r^3+2r^2+3r+2\right)\cos(\theta), \tag{6}$$

Per il Teorema di Binet si ha:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 A_1+\det^2 A_2+\det^2 A_3}\,dr\,d\theta = r(r^2+1)\sqrt{9r^2+12r+8}.$$

(4) Dobbiamo trovare $(r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[$ tali per cui $\varphi(r,\theta)=(5/4,3/8,0)$ ossia:

$$\begin{cases}((r^2+1)\cos\theta = 5/4,\\ r^3+r^2 = 3/8,\\ (r^2+1)\sin\theta = 0\end{cases}$$

Dall'ultima relazione si ha $\theta=0$ oppure $\theta=\pi$. Sostituendo nella prima, si ha che $\theta=0$ e $r^2+1=5/4$, quindi $r=1/2$. Dette $\partial_r\varphi$ e $\partial_\theta\varphi$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi$, si ha $\partial_r\varphi(1/2,0)=$

$(1,7/4,0)$ e $\partial_\theta\varphi(0,0,5/4)$. Il prodotto vettoriale di questi vettori porge:

$$\partial_r\varphi(1/2,0)\wedge\partial_\theta\varphi(1/2,0)=\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & 1 & 0\\ \vec{e}_2 & 7/4 & 0\\ \vec{e}_3 & 0 & 5/4\end{pmatrix}=\left(\frac{35}{16},-\frac{5}{4},0\right)=\frac{5}{4}\left(\frac{7}{4},-1,0\right),$$

per cui

$$\hat{n}(5/4,3/8,0)=\frac{\partial_r\varphi(1/2,0)\wedge\partial_\theta\varphi(1/2,0)}{|\partial_r\varphi(1/2,0)\wedge\partial_\theta\varphi(1/2,0)|}=\frac{4}{\sqrt{65}}\left(\frac{7}{4},-1,0\right).$$

(5) Utilizziamo il teorema della divergenza. Poniamo:

$$D_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y=0,x^2+y^2=1\}$$
$$D_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y=2,x^2+y^2=4\}.$$

La superficie formata dall'unione di D_0, D_1 e S è una superficie chiusa che racchiude il volume V. Per il teorema della divergenza, se la normale è orientata in modo da essere uscente da V, si ha:

$$\int_{D_0\cup D_1\cup S}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=\int_V \operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Poiché la divergenza è nulla, si ottiene:

$$\int_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=-\int_{D_0\cup D_1\cup S}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=-\int_{D_0}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma-\int_{D_1}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma$$

La normale uscente a V in D_0 è costante e vale $(0,-1,0)$, mentre in D_1 vale $(0,1,0)$. Quindi (ricordando che D_0 e D_1 sono simmetrici rispetto alla sostituzione $z\to -z$):

$$\int_{D_0}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=-\int_{D_0}(4x^2-3z)\,d\sigma=-4\int_{D_0}x^2\,d\sigma=-4\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta=-\pi.$$
$$\int_{D_1}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=-\int_{D_0}(4x^2-3z)\,d\sigma=4\int_{D_1}x^2\,d\sigma=4\int_0^2\int_0^{2\pi}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta=16\pi.$$

Orientando pertanto $\hat{n}$ in modo da essere uscenti da V, si ottiene:

$$\int_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=-15\pi.$$

L'orientamento uscente da V è effettivamente quello indotto dalla parametrizzazione: per verificarlo osserviamo che $\hat{n}(5/4,3/8,0)=\frac{4}{\sqrt{65}}\left(\frac{7}{4},-1,0\right)$. Sezionando S con il piano $y=3/8$ si ottiene la circonferenza $(5/4\cos\theta,3/8,5/4\sin\theta)$ e se proiettiamo la normale sul piano xz si ottiene $\frac{4}{\sqrt{65}}(7/4,0,0)$. Tale proiezione nel punto $(5/4,3/8,0)$ è uscente dal cerchio racchiuso dal tale circonferenza.

Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\Phi(S,\vec{F})=\int_0^1\int_0^{2\pi}\det\begin{pmatrix}F_1\circ\varphi & 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ F_2\circ\varphi & 3r^2+2r & 0\\ F_3\circ\varphi & 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}dr\,d\theta$$
$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\det\begin{pmatrix}r^3+r^2+(r^2+1)^2\sin^2\theta & 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 4(r^2+1)^2\cos^2\theta-3(r^2+1)\sin\theta & 3r^2+2r & 0\\ 6(r^2+1)^2\cos^2\theta+(r^3+r^2)^2 & 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}dr\,d\theta$$

Sviluppiamo il determinante D che compare nell'integranda secondo l'ultima colonna:

$$\begin{aligned}D = &\left(r^2+1\right)\cos(\theta)\Big(\left(3r^2+2r\right)\left(r^3+\left(r^2+1\right)^2\sin^2(\theta)+r^2\right)+\\ &-2r\cos(\theta)\left(4\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)-3\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\right)\Big)+\\ &+\left(-r^2-1\right)\sin(\theta)\Big(2r\sin(\theta)\left(4\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)-3\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\right)+\\ &-\left(3r^2+2r\right)\left(6\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)+\left(r^3+r^2\right)^2\right)\Big)\end{aligned}$$

Nell'integrazione, i termini che contengono potenze dispari di seno e coseno si cancellano, quindi resta solo:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2\pi} D\,dr\,d\theta &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(-8r\left(r^2+1\right)^3\cos^4(\theta)-8r\left(r^2+1\right)^3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right)\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} -8r\left(r^2+1\right)^3\left(\cos^4(\theta)+\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right)\,dr\,d\theta\\ &= -8\int_0^1\left(r+3r^3+3r^5+r^7\right)\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta = -15\pi,\end{aligned}$$

che conferma il calcolo precedente.

Svolgimento (Esercizio 68). Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non identicamente nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo e dividendo per $T(t)X(x)$, si ottiene

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{2\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono così:

$$\begin{cases}\dot{T}(t) = \lambda T(t)\\ 2\ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0.\end{cases}$$

Le condizioni al contorno si scrivono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica per $X(x)$ è data da $\mu^2 = \lambda/2$. Distinguiamo tre casi:

(1) Se $\lambda > 0$ le radici sono $\pm\sqrt{\lambda/2}$ si ottiene $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda/2}x}$ da cui $\dot{X}(x) = \sqrt{\lambda/2}(c_1 e^{\sqrt{\lambda/2}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda/2}x})$ Dovendo soddisfare $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_1 = c_2$, da cui $\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda/2}(e^{\sqrt{\lambda/2}x} - e^{-\sqrt{\lambda/2}x})$ e poiché $\dot{X}(\pi) = 0$ si ottiene $c_1 = c_2 = 0$, quindi il caso $\lambda > 0$ non è accettabile.

(2) Se $\lambda = 0$, la soluzione è $X(x) = c_0 + c_1 x$, sostituendo le condizioni al contorno si ha $X(x) = c_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(3) Se $\lambda < 0$ le radici sono complesse coniugate e si ha $X(x) = c_1\cos(\sqrt{|\lambda/2|}x)+c_2\sin(-\sqrt{|\lambda/2|}x)$ da cui $\dot{X}(x) = -\sqrt{|\lambda/2|}(c_1\sin(\sqrt{|\lambda/2|}x)+c_2\cos(-\sqrt{|\lambda/2|}x))$ Sostituendo $\dot{X}(0) = 0$, si ottiene $c_2 = 0$, da cui $\dot{X}(x) = -c_1\sqrt{|\lambda/2|}\sin(\sqrt{|\lambda/2|}x)$ e sostituendo $\dot{X}(\pi) = 0$ si ha $\sqrt{|\lambda/2|} = n \in \mathbb{Z}$ da cui $\lambda = -2n^2 < 0$.

Pertanto si ottengono le soluzioni $X_n(x) = c_n\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, che comprende anche il caso $n = 0$. Le soluzioni T_n relative ai valori accettabili di λ sono quindi $T_n(t) = d_n e^{-n^2 t}$. Posto $a_n = c_n d_n$, si ottengono le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = a_n e^{-2n^2 t}\cos(nx).$$

Cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-2n^2 t}\cos(nx),$$

da cui

$$u(0,x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

Per determinare i coefficienti a_n, prolunghiamo per parità il dato iniziale ad una funzione definita in $[-\pi,\pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. I coefficienti sono dati da:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{x+inx}\,dx+\int_0^{\pi} e^{x-inx}\,dx\right)\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{x+inx}}{1+in}+\frac{e^{x-inx}}{1-in}\right]_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[(1-in)e^{x+inx}+(1+in)e^{x-inx}\right]_{x=0}^{x=\pi}\\
&=\frac{2}{\pi(1+n^2)}\left[e^x\cos nx+ne^x\sin nx\right]_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^ne^{\pi}-1}{1+n^2}
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$2a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{|x|}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\,dx=\frac{2(e^{\pi}-1)}{\pi}$$

Quindi:

$$u(t,x)=\frac{e^{\pi}-1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^ne^{\pi}-1}{1+n^2}e^{-2n^2t}\cos(nx).$$

Discutiamo ora la convergenza della serie. La serie converge uniformemente per $t\geq 0$, $x\in[0,\pi]$ in quanto il termine generale è maggiorato in modulo da $e^4/(1+n^2)$. Derivando una volta in t oppure due volte in x, il termine generale è maggiorato in modulo per $t>0$ da $\frac{e^4n^2e^{-2n^2t}}{n^2+1}<e^4e^{-2n^2t}$. Quindi la serie delle derivate in t e in x converge uniformemente in $]\bar{t},+\infty[$ per ogni $\bar{t}>0$. Perciò u è una soluzione del problema.

Svolgimento (Esercizio 69). Poniamo $f_1(x,y,z):=x^3+6zy-3y^2-1$ e $f_2(x,y,z):=5y^4+6xy+2z^2-4$.

(1) In coordinate cilindriche si ha $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$, quindi

$$\begin{aligned}
f_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)&=\rho^3\cos^3(\theta)-3\rho^2\sin^2(\theta)+6\rho z\sin(\theta)-1,\\
f_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)&=5\rho^4\sin^4(\theta)+6\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)+2z^2-4.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_1&=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z):\ \rho^3\cos^3(\theta)-3\rho^2\sin^2(\theta)+6\rho z\sin(\theta)=1\},\\
\Gamma_2&=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z):\ 5\rho^4\sin^4(\theta)+6\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)+2z^2=4\}.
\end{aligned}$$

(2) I due insiemi sono chiusi perché f_1 e f_2 sono funzioni continue. Consideriamo la curva $\sigma_1(y)=(\sqrt[3]{1+3y^2},y,0)$ Si ha $f_1(\sigma_1(y))=0$ per ogni $y\in\mathbb{R}$, quindi $\sigma_1(y)\subseteq\Gamma_1$, però $\|\sigma_1(y)\|\to+\infty$ per $y\to+\infty$ quindi la curva σ_1 non è limitata, e pertanto nemmeno Γ_1 che la contiene può esserlo. Perciò Γ_1 non è compatto.

In modo del tutto analogo, per $y>0$ consideriamo la curva $\sigma_2(y)=((4-5y^4)/6y,y,0)$. Si ha $f_2(\sigma_2(y))=0$ per ogni $y>0$, quindi $\sigma_2(y)\subseteq\Gamma_2$, però $\|\sigma_2(y)\|\to+\infty$ per $y\to+\infty$ quindi la curva σ_2 non è limitata, e pertanto nemmeno Γ_2 lo è. Perciò Γ_2 non è compatto.

(3) È necessario risolvere il sistema:

$$\begin{cases}x^3+6zy-3y^2=1\\5y^4+6xy+2z^2=4\\y=0.\end{cases}$$

Sostituendo la terza nelle altre due si ha $x^3=1$ e $2z^2=4$, ovvero $x=1$ e $z=\pm\sqrt{2}$. Quindi $P_1=(1,0,\sqrt{2})$ e $P_2=(1,0,-\sqrt{2})$.

(4) Posto $F(x,y,z) := (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$, l'intersezione $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ è data da $F(x,y,z) = (0,0)$. Il problema richiede di descrivere il luogo degli zeri di F attorno ai punti P_1 e P_2, esplicitando le prime due variabili in funzione della terza in $F(x,y,z) = (0,0)$. Calcoliamo quindi la matrice Jacobiana di F:

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y,z) \\ \nabla f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = (\partial_{x,y}F(x,y,z)|\partial_z F(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 6z-6y & 6y \\ 6y & 20y^3+6x & 4z \end{pmatrix}$$

Si ha pertanto:

$$DF(P_1) = DF(1,0,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 3 & 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix},$$
$$DF(P_2) = DF(1,0,-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per poter applicare il Teorema di Dini è necessario che il minore $\partial_{x,y}F$ formato dalle prime due colonne di DF abbia rango massimo in P_1 e P_2. Il suo determinante è non nullo in entrambi i casi, per cui è possibile esplicitare in un intorno di P_1 e P_2 il luogo $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ come grafico di una funzione della variabile z. Per quanto riguarda la derivata, dal Teorema di Dini si ha

$$\dot{\gamma}(z) = -[\partial_{x,y}F(x,y,z)]^{-1}\partial_z F(x,y),$$

da valutarsi nei punti P_1 e P_2. Si ha quindi:

$$\dot{\gamma}_1(\sqrt{2}) = -\begin{pmatrix} 3 & 6\sqrt{2} \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$\dot{\gamma}_1(-\sqrt{2}) = -\begin{pmatrix} 3 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -4\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & 6\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(5) Il problema richiede di determinare i minimi di $x^2+y^2+z^2$ vincolati a $f_1(x,y,z) = 0$. Poniamo $L(x,y,z,\lambda) := x^2+y^2+z^2+\lambda f_1(x,y,z)$ e studiamo il sistema $\nabla L(x,y,z) = 0$.

$$\begin{cases} 3\lambda x^2 + 2x = 0 \\ \lambda(6z-6y) + 2y = 0 \\ 6\lambda y + 2z = 0 \\ x^3 - 3y^2 + 6yz - 1 = 0. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ si ottiene $x = y = z = 0$ dalle prime tre, ma la quarta non è soddisfatta, quindi $\lambda \neq 0$. Studiamo la seconda e la terza equazione. Dato che $\lambda \neq 0$, dalla terza si ricava $y = -z/(3\lambda)$ e sostituendo nella seconda, si ottiene $-2z+6\lambda z-2z/(3\lambda) = 0$, da cui $(-1+3\lambda-1/(3\lambda))z = 0$. A questo punto, se $z = 0$, poiché $\lambda \neq 0$, si ha $y = 0$ dalla terza e pertanto si ricava dalla quarta $x = 1$ e dalla prima $\lambda = -2/3$. Si ottiene quindi il punto $Q_1(1,0,0)$. Se invece $z \neq 0$, si deve avere $-1+3\lambda-1/(3\lambda) = 0$, da cui $\lambda = \frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{5})$. Sostituendo dalla terza $y = -z/(3\lambda)$, si ottiene

$$x^3 - \frac{z^2}{3\lambda^2} - \frac{2z^2}{\lambda} - 1 = 0.$$

dove, dalla prima equazione, si ha $x = 0$ oppure $x = -2/3\lambda$. Pertanto se scegliamo $\lambda = \frac{1}{6}(-1-\sqrt{5}) > 0$, gli addendi sono tutti negativi e uno è strettamente negativo, pertanto l'equazione non può essere soddisfatta. Quindi necessariamente si ha $\lambda = \frac{1}{6}(-1-\sqrt{5})$. Se $x = 0$, $z \neq 0$ e $\lambda = \frac{1}{6}(-1-\sqrt{5})$, si ottiene nella quarta equazione:

$$\frac{z^2}{3\lambda^2} + \frac{2z^2}{\lambda} + 1 = 0.$$

da cui

$$z = \pm\sqrt{-\frac{3\lambda^2}{1+6\lambda}} = \pm\sqrt{\frac{1}{30}(5+3\sqrt{5})},$$

e $y = -z/3\lambda$. Si ottengono quindi i punti:

$$Q_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{\frac{2}{15}\,(5+3\sqrt{5})}}{-1-\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{1}{30}\left(5+3\sqrt{5}\right)}\right)$$

e $Q_3 = -Q_2$. Se invece $x = -2/3\lambda$, $z \neq 0$ e $\lambda = \frac{1}{6}(-1-\sqrt{5})$, si ottiene nella quarta equazione

$$\frac{8}{27\lambda^3} + \frac{z^2}{3\lambda^2} + \frac{2z^2}{\lambda} + 1 = 0,$$

ossia

$$z^2 + 6\lambda z^2 = -\frac{8}{9\lambda} - 3\lambda^2$$

quindi $(1+6\lambda)z^2 = -\frac{8}{9\lambda} - 3\lambda^2$ ovvero

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{8}{9\lambda} + 3\lambda^2\right)$$

Si ha che $-2/3 < \lambda < -1/2$, pertanto $-16/9 < 8/(9\lambda) < -4/3$, mentre $3/4 < 3\lambda^2 < 4/3$. Pertanto il termine di sinistra è negativo e l'equazione non ha soluzioni reali. A questo punto determiniamo la distanza dei punti Q_1, Q_2, Q_3 dall'origine. La distanza di Q_1 dall'origine è 1. La distanza al quadrato di Q_2 e Q_3 dall'origine, ricordando che $1/\lambda^2 < 4$, è

$$\frac{1}{30}(5+3\sqrt{5})\left(1+\frac{1}{9\lambda^2}\right) \leq \frac{1}{30}\cdot 14 \cdot (1+4/9) < 1,$$

quindi Q_2 e Q_3 realizzano la minima distanza dall'origine.

(6) Le normali non unitarie sono date dalle righe della matrice $DF(P_1)$, pertanto si ha

$$\hat{n}_1 = \frac{(3, 6\sqrt{2}, 0)}{|(3, 6\sqrt{2}, 0)|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right),$$

$$\hat{n}_2 = \frac{(0, 6, 4\sqrt{2})}{|(0, 6, 4\sqrt{2})|} = \left(0, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right).$$

Il coseno dell'angolo compreso tra questi vettori unitari è pari al loro prodotto scalare. Quindi si ha $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ e $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Osservando che tali valori non distano molto da $1/\sqrt{2}$, si deduce che θ non è molto lontano da $\pi/4$.

Svolgimento (Esercizio 70). In coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ si ha

$$D = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [0, \pi/4],\ 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}\right\}.$$

L'elemento d'area della trasformazione di coordinate è ρ, pertanto

$$\begin{aligned}
I &:= \iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_1^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{\rho\sin\theta}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_1^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \sin\theta\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta+\sin\theta} - \int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/4}\frac{\tan\theta\,d\theta}{1+\tan\theta} + [\cos\theta]_0^{\pi/4} = 2\int_0^1 \frac{t}{1+t}\frac{dt}{1+t^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1
\end{aligned}$$

ove si è posto $t = \tan x$. Si ha

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{(1+t^2)}$$

da cui

$$t = A + At^2 + (Bt+C)(1+t) = (A+B)t^2 + (B+C)t + (A+C)$$

pertanto $A = -B = -C$ e $B + C = 1$. Perciò $B = C = 1/2 = -A$ e si ha

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{t+1}{1+t^2}\,dt + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \log 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \arctan 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= -\frac{1}{2}\log 2 + \arctan 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{1}{4}\left(-2\log 2 + \pi + 2\sqrt{2} - 4\right). \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 71). Si ha $\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = 0$ e

$$\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z) = \left(\cos y, 0, 2\cos^2 x \cos y - 3\sin^2 x \cos y\right).$$

Il campo è solenoidale, ma non conservativo. Lo Jabiano della parametrizzazione è:

$$\mathrm{Jac}\,\Phi(z,t) = \begin{pmatrix} 3\cos(3z)\cos(t) & -(\sin(3z)+2)\sin(t) \\ 3\cos(3z)\sin(t) & (\sin(3z)+2)\cos(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il modulo del prodotto esterno delle colonne di tale matrice è l'elemento d'area:

$$d\sigma = (\sin(3z)+2)\sqrt{\frac{1}{2}(9\cos(6z)+11)}\,dz\,dt.$$

La normale è il prodotto esterno delle colonne diviso per il suo modulo:

$$\hat{n} = \frac{\sqrt{2}(-\cos(t), -\sin(t), 3\cos(3z))}{\sqrt{9\cos(6z)+11}}$$

La superficie è originata dalla rotazione completa della curva $x = 2 + \sin 3z$ giacente nel piano xz attorno all'asse z. Se consideriamo il solido V formato dalla superficie S e dai due cerchi C_1 e C_2 centrati in $(0,0,0)$ e $(0,0,\pi)$ di raggio 2 giacenti rispettivamente nei piani $z = 0$ e $z = \pi$, si ha che il flusso uscente da V è nullo, pertanto il flusso uscente da S è l'opposto di quello uscente da C_1 e C_2. Tuttavia la normale indotta dalla parametrizzazione è entrante in V (lo si verifica osservando che è rivolta sempre verso l'asse z). Pertanto il flusso richiesto è pari alla somma del flusso uscente da C_1 e C_2. Quindi:

$$\Phi(S,\vec{F}) = \int_{C_1} \vec{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy + \int_{C_2} \vec{F}(x,y,2)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \int_{C_1} -\sin y + \int_{C_2} \sin y = 0.$$

Si poteva anche osservare, senza fare alcun calcolo, che il campo non dipende da z e che C_1 e C_2 hanno la stessa superficie, pertanto $\Phi(C_1,\vec{F}) = -\Phi(C_2,\vec{F})$, e pertanto $\Phi(S,\vec{F}) = 0$.

Svolgimento (Esercizio 72). *Presentiamo un procedimento alternativo di soluzione.* Le condizioni al bordo di tipo Neumann suggeriscono di cercare una soluzione in serie di coseni. Moltiplicando l'equazione data per $\frac{2}{\pi}\cos nx$ e integrando in x tra 0 e π si ottiene:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \partial_t u(t,x)\,\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \partial_{xx}u(t,x)\,\cos(nx)\,dx$$

da cui, integrando il secondo membro per parti utilizzando i dati al bordo, e osservando che la derivata del primo può essere portata fuori dal segno di integrale:

$$\partial_t \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\,\cos(nx)\,dx = -n^2\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\,\cos(nx)\,dx$$

Posto $u_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\cos(nx)\,dx$ si ha che $u_n(t)$ è il coefficiente di Fourier di ordine n (rispetto a x) della soluzione al tempo t, e quindi la sua evoluzione è $\frac{d}{dt}u_n(t) = -n^2u_n(t)$ quindi $u_n(t,x) = e^{-n^2t}u_n(0,x)$. L'evoluzione del termine di grado 0 si ha moltiplicando l'equazione data per $\frac{2}{\pi}\cos nx$ e integrando in x tra 0 l'equazione data. Si ottiene

$$\frac{d}{dt}u_0(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{xx}\,dx = \frac{2}{\pi}(u_x(t,\pi) - u_x(t,\pi)) = 0$$

Pertanto $u_0(t) = u_0(0)$ per ogni x. Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier del dato $x+\cos 5x$ sviluppato in serie di soli coseni. Per linearità possiamo calcolare la serie di Fourier di x e sommare il termine $\cos 5x$ che coincide con la sua serie di Fourier. Si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}[x\sin nx]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} u(t,x) =& \frac{\pi}{2} + e^{-25t}\cos 5x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n^2t}}{n^2}((-1)^n-1)\cos nx \\ =& \frac{\pi}{2} + e^{-25t}\cos 5x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)^2t}}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x). \end{aligned}$$

La serie e tutte le sue derivate di ogni ordine rispetto ad ogni variabile convergono uniformemente sugli insiemi della forma $[t_0,+\infty[\times[0,\pi]$ per ogni $t_0 > 0$ quindi la serie trovata è soluzione del problema. Si ha poi per $t > 1$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^\infty \frac{2e^{-n^2t}}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx\right| &\le \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{2e^{-n^2t}}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx\right| \\ &\le 4\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n^2t}}{\pi n^2} \le 4\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n^2\frac{t}{2}-n^2\frac{t}{2}}}{\pi n^2} \\ &= 4\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\frac{t}{2}}\frac{e^{-n^2\frac{t}{2}}}{\pi n^2} \le 4\sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{t}{2}}\frac{e^{-n^2\frac{t}{2}}}{\pi n^2} \\ &\le 4e^{-\frac{t}{2}}\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n^2\frac{t}{2}}}{\pi n^2} \le 4e^{-\frac{t}{2}}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n^2} \le Ce^{-t}, \end{aligned}$$

con $C > 0$ costante opportuna non dipendente da t. Quindi il limite della serie è 0 per $t \to +\infty$ ed è uniforme in x. Pertanto:

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{\pi}{2},$$

e tale limite è uniforme in x.

Svolgimento (Esercizio 73). Dall'equazione che definisce C si ottiene $2x = x^2 + y^2$. Sostituendo nell'equazione che definisce B_2, si ha $2x + z^2 = 4$ e quindi $x = 2 - z^2/2$. Si ricava quindi dall'equazione che definisce C,

$$\left(2 - \frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 = 1.$$

Perciò:

$$\pi_1(\Gamma) := \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^2 + y^2 = 1\right\}.$$

(1) In coordinate polari piane $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, si ottiene

$$\pi_1(\Gamma) := \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \left(2 - \frac{\rho^2\sin^2\theta}{2}\right)^2 + \rho^2\cos^2\theta = 1 \right\}.$$

(2) C è B_2 sono ambedue chiusi, perché si scrivono come $g_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$ con $g_1(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 1$ e $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ e g_1, g_2 sono continue in $\mathbb{R}^3$. L'intersezione di chiusi è chiusa, quindi Γ è chiuso. $\Gamma \subseteq B_2$ e B_2 è limitato, quindi Γ stesso è limitato. Ma allora essendo chiuso e limitato in $\mathbb{R}^3$ è compatto.

(3) Osserviamo che B_2 interseca gli assi nei punti $(\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$ e $(0, 0, \pm 2)$. Verifichiamo quali di questi punti appartengono anche a C. Se $y = 0$ si ha $x = 0$ o $x = 2$ dall'equazione che definisce C. Quindi il punto $(2, 0, 0)$ appartiene a $B_2 \cap C$. Se $x = 0$, si ha necessariamente $y = 0$ dall'equazione che definisce C. Quindi i punti $(0, 0, \pm 2)$ appartengono a $B_2 \cap C$. In definitiva, le intersezioni di Γ con gli assi sono i tre punti $P_0 = (2, 0, 0)$, $P_1 = -P_2 = (0, 0, 2)$.

Studiamo il sistema

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0, \\ g_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Posto $G(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$, il problema richiede di esplicitare x, y in funzione di z dall'equazione $G(x, y, z) = 0$. Per applicare il teorema di Dini dobbiamo calcolare la matrice Jacobiana di G e verificare che il minore $\partial_{x,z}G$ formato dalle colonne corrispondenti a x, y di tale matrice abbia determinante non nullo.

$$\nabla G(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x, y, z) & \partial_y g_1(x, y, z) & \partial_z g_1(x, y, z) \\ \partial_x g_2(x, y, z) & \partial_y g_2(x, y, z) & \partial_z g_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

$$\det\partial_{x,z}G(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \partial_x g_1(x, y, z) & \partial_z g_1(x, y, z) \\ \partial_x g_2(x, y, z) & \partial_z g_3(x, y, z) \end{pmatrix} = 4z(x-1)$$

Nel punto P_0, il teorema di Dini non è applicabile perché il determinante $\det, \partial_{x,z}G(P_0) = 0$. Nei punti P_1, P_2 tale determinante è diverso da zero, quindi il teorema di Dini è applicabile in un intorno e fornisce la curva γ richiesta. Per calcolare $\dot\gamma$, si ha:

$$\dot\gamma(t) = -[\partial_{x,z}G(x(t), t, z(t))]^{-1} \cdot \partial_y G(x(t), t, z(t))$$

Nel nostro caso,

$$\partial_{x,z}G(0, 0, \pm 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \pm 4 \end{pmatrix}, \qquad [\partial_{x,z}G(0, 0, \pm 2)]^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & \pm 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\partial_y G(0, 0, \pm 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi in P_1 e P_2 si ha $\dot\gamma(t) = 0$.

(4) La distanza di (x, y, z) da A è $d_A(x, y, z) = \sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2}$. Calcolare i massimi e i minimi vincolati di d_A è lo stesso di calcolare i massimi e i minimi vincolati di $h = d_A^2$ in quanto $p \mapsto p^2$ è strettamente monotona su $[0, +\infty[$. Applichiamo quindi il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, definendo

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = h(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu g_2(x, y, z)$$

e imponendo $\nabla L = 0$. Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \partial_x h(x,y,z) + \lambda \partial_x g_1(x,y,z) + \mu \partial_x g_2(x,y,z) = 2(x-5) + 2\lambda(x-1) + 2\mu x = 0 \\ \partial_y h(x,y,z) + \lambda \partial_x g_1(x,y,z) + \mu \partial_x g_2(x,y,z) = 2y + 2\lambda y + 2\mu y = 0 \\ \partial_z h(x,y,z) + \lambda \partial_x g_1(x,y,z) + \mu \partial_x g_2(x,y,z) = 2z + 2\mu z = 0 \\ g_1(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ottiene $z = 0$ oppure $\mu = -1$.

Se $z = 0$, si ottiene dalle ultime due equazioni $y^2 = 4 - x^2$ e $y^2 = 1 - (x-1)^2$ da cui $4 - x^2 = 1 - (x-1)^2$ da cui $x = 2$, $z = 0$ e $y = 0$, ovvero il punto P_0. Si ha $d_A(P_0) = 3$.

Supponiamo invece $\mu = -1$. Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = 0$ oppure $y = 0$. Nel caso in cui $y = 0$, dalla quarta equazione si ottiene $x = 0$ oppure $x = 2$. Se $x = 0$ e $y = 0$ necessariamente $z = \pm 2$ mentre se $y = 0$, $x = 2$, necessariamente si ottiene $z = 0$. Si ottengono quindi i punti P_1, P_2 e P_0 e $d_A(P_1) = d_A(P_2) = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.

Se invece $\lambda = 0$ e $\mu = -1$ la prima equazione è impossibile.

Quindi P_0 è di minimo assoluto vincolato e la sua distanza da A è 3, mentre P_1 e P_2 sono di max assoluto vincolato e la loro distanza da A vale $\sqrt{29}$.

(5) L'insieme $\pi_1(\Gamma)$ è simmetrico rispetto agli assi e all'origine, pertanto studiamo solo il caso $y > 0$ e $z > 0$, gli altri vengono ricostruiti per simmetria. Si ottiene quindi

$$y = g(z) := \sqrt{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^2}.$$

definita per $z > 0$ e $\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^2 < 1$, ovvero per $0 < z < 2$. Si ha che $g(0) = g(2) = 0$ e g possiede un unico massimo in $]0,2[$ ottenuto per $1 - \frac{z^2}{2} = 0$, ovvero $z = \sqrt{2}$. Posto $p(z) = 1 - \frac{z^2}{2}$, si ha

$$\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{dp} \cdot \frac{dp}{dz} = -\frac{2zp}{\sqrt{1-p^2}}$$

Quindi g è strettamente crescente per $p < 0$ e strettamente decrescente per $p > 0$, ovvero strettamente crescente per $0 < z < \sqrt{2}$ e strettamente decrescente per $\sqrt{2} < z < 2$. Per $z \to 2^-$ si ha $g'(z) \to -\infty$ e per $z \to 0^+$ si ha $g'(z) = 1$. Questi dati permettono di ricostruire il grafico di $\pi_1(\Gamma)$: è simile ad un 8 centrato nell'origine e ruotato di $\pi/2$.

Svolgimento (Esercizio 74). In coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, si ha:

$$\Omega := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : -10 < z < 10,\ 0 < \rho < 1,\ \rho < 2\sin\theta,\ \pi/2 < \theta < 3\pi/2\}.$$

Osserviamo che per avere $0 \le \rho < 2\sin\theta$ si deve avere $0 < \theta < \pi$, quindi in definitiva $\pi < \theta < \pi/2$. In questo intervallo, si ha $2\sin\theta < 1$ per $5\pi/6 < \theta < \pi$. Quindi poniamo:

$$\Omega_1 := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : -10 < z < 10,\ 0 < \rho < 2\sin\theta,\ 5\pi/6 < \theta < \pi\},$$
$$\Omega_2 := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : -10 < z < 10,\ 0 < \rho < 1,\ \pi/2 < \theta < 5\pi/6\}.$$

ottenendo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Il determinante Jacobiano della trasformazione è ρ, quindi $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-10}^{10}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} \rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz + \int_{-10}^{10}\int_{\pi/2}^{5\pi/6}\int_0^{1} \rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz \\
&= \int_{-10}^{10}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} \rho^3\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,dz + \int_{-10}^{10}\int_{\pi/2}^{5\pi/6}\int_0^{1} \rho^3\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,dz \\
&= \int_{-10}^{10} dz\cdot\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} \rho^3\cos\theta\,d\rho\,d\theta + \int_{-10}^{10} dz\cdot\int_{\pi/2}^{5\pi/6}\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^1 \rho^3\,d\rho \\
&= 20\int_{5\pi/6}^{\pi} 4\sin^4\theta\cos\theta\,d\theta + 20\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{4} \\
&= 80\int_{1/2}^{0} t^4\,dt - \frac{5}{2} = 80\left[\frac{t^5}{5}\right]_{1/2}^{0} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} - 5/2 = -3.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 75). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

(1) Si ha $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = -4/z^5$ e

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = (3, 2z, 8x-1).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Si ha $\dot{\gamma}(t) = (0, -2\sin t, 2\cos t)$, da cui la circuitazione:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left((2\sin t+7)^2 + 2\cos t + 1, 64 - 3(2\sin t+7), \frac{1}{(2\sin t+7)^4}\right)\cdot(0,-2\sin t, 2\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(12\sin^2 t - 86\sin t + \frac{2\cos t}{(2\sin t+7)^4}\right)dt = 12\pi,
\end{aligned}$$

dove si è sfruttata la periodicità di seno e coseno.

Altro modo: la curva γ è il bordo della circonferenza D centrata in $(4,1,7)$ di raggio 2 e contenuta nel piano $x = 4$. Affinché l'orientamento su D induca il corretto orientamento della normale, si deve avere $\hat{n} = (1,0,0)$ per la regola della mano destra. Dal teorema di Stokes si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\ell = \int_D \operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_D (3,2z,8x-1)\cdot(1,0,0)\,d\sigma = 3\int_D d\sigma = 12\pi$$

essendo l'area di D pari a 4π. Questo calcolo conferma il risultato precedente.

(3) Si ha:

$$\operatorname{Jac}\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'elemento d'area utilizzando la regola di Binet: consideriamo la radice della somma dei quadrati dei determinanti delle sottomatrici di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi$:

$$\begin{aligned}d\sigma &= \sqrt{\det^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{pmatrix}}\,dx\,dy\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}\,dx\,dy\end{aligned}$$

Altro modo: il prodotto vettoriale delle colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi$ porge la normale (non unitaria). Il modulo di tale prodotto vettoriale è l'elemento d'area. Dividendo il prodotto vettoriale per il suo modulo si ottiene la normale unitaria

$$\hat{n} = \frac{\partial_x\varphi \wedge \partial_y\varphi}{|\partial_x\varphi \wedge \partial_y\varphi|}.$$

Calcoliamo il prodotto vettoriale delle due colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi$:

$$\partial_x\varphi \wedge \partial_y\varphi = \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & 1 & 0\\ \vec{e}_2 & 0 & 1\\ \vec{e}_3 & -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{pmatrix} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1\right).$$

Il modulo di tale vettore è effettivamente $\sqrt{1+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}$, che conferma il risultato precedente. La normale unitaria pertanto risulta:

$$\hat{n}\left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}}}$$

(4) Sostituendo, si ha

$$\hat{n}(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{34}}, \frac{1}{\sqrt{34}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right).$$

(5) Calcoliamo il flusso di $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ attraverso la superficie S:

$$\begin{aligned}\Phi(S, \mathrm{rot}\,\vec{F}) &:= \int_{\{(x,y):\,1<x^2+y^2<9\}} \det\left(\ \mathrm{rot}\vec{F}\circ\gamma \;\middle|\; \mathrm{Jac}\,\varphi\ \right)\,dx\,dy\\ &= \int_{\{(x,y):\,1<x^2+y^2<9\}} \det\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 1\\ 8x-1 & -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{pmatrix}\,dx\,dy\\ &= \int_{\{(x,y):\,1<x^2+y^2<9\}} \left(\frac{3x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 8x - 1\right)\,dx\,dy\end{aligned}$$

Passiamo in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$:

$$\begin{aligned}\Phi(S, \operatorname{rot}\vec{F}) &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(\frac{3\rho\cos\theta}{\rho^3} + \frac{2\rho\sin\theta}{\rho^4} + 8\rho\cos\theta - 1\right)\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(\frac{3\cos\theta}{\rho^2} + \frac{2\sin\theta}{\rho^3} + 8\rho\cos\theta - 1\right)\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_1^3 \rho\,d\rho\,d\theta = -8\pi,\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che i termini con potenze dispari di seno e coseno si annullano per periodicità.

Altro modo: Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore è pari alla circuitazione sul bordo. Determiniamo il bordo di S: è dato dall'immagine γ_1 e γ_3 secondo la parametrizzazione delle due circonferenze centrate nell'origine e di raggio rispettivamente 1 e 3. Per rispettare l'orientamento, la circonferenza di raggio maggiore deve essere percorsa nello spazio dei parametri in senso antoriario, mentre l'altra deve essere percorsa in senso orario.

Poniamo quindi

$$\begin{aligned}\gamma_3(t) &:= \varphi(3\cos\theta, 3\sin\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 1/3), \\ \gamma_1(t) &:= \varphi(\cos\theta, -\sin\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta, 1).\end{aligned}$$

Si ha $\dot\gamma_3(t) = (-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\dot\gamma_1(t) = (-\sin\theta, -\cos\theta, 0)$.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_3} \vec{F}\cdot\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ\gamma_3(\theta)\cdot\dot\gamma_3(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3\sin\theta + 1/9, 4\cdot 9\cos^2\theta - 1, 3^4)\cdot(-3\sin\theta, 3\cos\theta, 0)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-9\sin^2\theta - \frac{1}{3}\sin\theta + 36\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)\,d\theta = -9\pi. \\ \oint_{\gamma_1} \vec{F}\cdot\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ\gamma_1(\theta)\cdot\dot\gamma_1(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta + 1, 4\cos^2\theta - 3, 1)\cdot(-\sin\theta, -\cos\theta, 0)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta - \sin\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta\right)\,d\theta = \pi.\end{aligned}$$

Quindi

$$\Phi(S, \operatorname{rot}\vec{F}) = \oint_{\gamma_3} \vec{F}\cdot\ell + \oint_{\gamma_1} \vec{F}\cdot\ell = -8\pi,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 76). Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione, dividendo per $u(t,x)$ e separando le variabili si ottiene:

$$\frac{\dot T(t)}{T(t)} = \frac{\ddot X(x) - \dot X(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = \lambda T(t) \\ \ddot{X}(x) - \dot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

L'equazione per $X(x)$ ha polinomio caratteristico $\mu^2 - \mu - \lambda = 0$. Se tale polinomio ammettesse due radici reali distinte μ_1, μ_2, si avrebbe come soluzione generale

$$X(x) = c_0 e^{\mu_1 x} + c_1 e^{\mu_2 x}$$

Sostituendo $X(0) = 0$ si ha $c_1 = -c_0$, quindi $X(x) = c_0(e^{\mu_1 x} - e^{\mu_2 x})$. Sostituendo anche $X(\pi) = 0$ e considerando che $\mu_1 \neq \mu_2$ si ottiene $c_0 = c_1 = 0$, non accettabile. Se il polinomio caratteristo ammettesse la radice doppia (reale) μ, si avrebbe come soluzione generale $X(x) = c_0 e^{\mu x} + c_1 x e^{\mu x}$, da cui sostituendo $X(0) = 0$ si ha $c_0 = 0$ e cioé $X(x) = c_1 x e^{\mu_2 x}$. Sostituendo $X(\pi) = 0$ si ha $c_1 = 0$, non accettabile. Pertanto le radici del polinomio caratteristico debbono essere complesse coniugate, ovvero $1 + 4\lambda < 0$ da cui $\lambda < -1/4$. In tal caso, le radici sono

$$\mu_1 = \frac{1 + i\sqrt{|1+4\lambda|}}{2}, \qquad \frac{1 - i\sqrt{|1+4\lambda|}}{2}$$

Posto $\omega_\lambda := \frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2}$, si ha che

$$X(x) = c_0 e^{x/2} \cos \omega_\lambda x + c_1 e^{x/2} \sin \omega_\lambda x.$$

Sostituendo $X(0) = 0$ si ottiene $c_0 = 0$ e quindi $X(x) = c_1 e^{x/2} \sin \omega_\lambda x$, e sostituendo $X(\pi) = 0$, per avere soluzioni non nulle si deve avere $\omega_\lambda \in \mathbb{Z} \setminus 0$ ossia $4n^2 = |1 + 4\lambda|$, quindi $\lambda = -n^2 - 1/4$, $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Quindi poniamo $X_n(x) = c_n e^{x/2} \sin nx$. Risolviamo l'equazione per $T(t)$ con $\lambda = -n^2 - 1/4$ ottenendo $T_n(t) = d_n e^{-(n^2+1/4)t}$. Posto $b_n = d_n c_n$, si ottengono le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = b_n e^{-(n^2+1/4)t} e^{x/2} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo di coprire il dato iniziale con una serie di soluzioni elementari:

$$u(0,x) = e^{x/2} x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{x/2} \sin(nx) = e^{x/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Si ricava:

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Quindi prolunghiamo per disparità $x(\pi - x)$ su $[-\pi, \pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Consideriamo lo sviluppo in serie (di soli seni) di questa funzione:

$$b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\, dx = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n).$$

In definitiva:

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} e^{-(n^2+1/4)t + x/2} \sin(nx).$$

La serie converge uniformemente in $[0, +\infty[\times [0, \pi]$ in quanto l'integrando è maggiorato in modulo da $1/n^3$, termine generale di serie convergente. Inoltre dato $t_0 > 0$ la derivata prima e seconda in x e prima in t sono dominate in $[t_0, +\infty[\times [0, \pi]$ da un termine della forma $C(t_0) \frac{e^{-n^2 t_0}}{p(n)}$ dove p è polinomio in n e $C(t_0)$ è una costante che dipende solo da p_n, quindi per n suff. grande (dipendente da t_0), tale termine è minore di $1/n^2$ e la serie converge ancora uniformemente. Quindi la serie trovata effettivamente risolve il problema.

Svolgimento (Esercizio 77). Si ponga
$$f(x,y) := e^{x^2+y^2}(x^2+y^2) - |x|.$$
Osserviamo che $f(x,y) = f(-x,y)$, quindi l'insieme è simmetrico rispetto all'asse y, inoltre $f(x,y) = f(x,-y)$ quindi l'insieme è simmetrico anche rispetto all'asse x, inoltre è simmetrico rispetto all'origine.

(1) In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha:
$$\begin{aligned}\Gamma &:= \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 e^{\rho^2} = \rho|\cos\theta|\right\}\\ &= \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho e^{\rho^2} = |\cos\theta|\right\}\\ &= \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 2\rho^2 e^{2\rho^2} - 1 = \cos 2\theta\right\},\end{aligned}$$
dove nel secondo passaggio si è osservato che il caso $\rho = 0$ è ottenuto anche per $\theta = \pi/2$.

(2) $\Gamma = f^{-1}(0)$ è chiuso perché f è continua, inoltre si osservi che per $r > 0$ vale $e^{r^2} > r^2$, quindi
$$\rho^3_{|\Gamma} \leq [\rho e^{\rho^2}]_{|\Gamma} = |\cos\theta|_{|\Gamma} \leq 1$$
pertanto la funzione $\rho_{|\Gamma}$ è limitata, quindi Γ è limitato. Essendo chiuso, è anche compatto. Si ha che $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quest'ultimo insieme non è semplicemente connesso, quindi nemmeno $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ lo può essere.

(3) Si ha che $f(0,y) = e^{y^2}y^2$ e l'equazione $f(0,y) = 0$ è risolta solo per $y = 0$, quindi $\Gamma \cap \{x = 0\} = \{(0,0)\}$. L'intersezione con l'asse x, oltre che nell'origine è data da $f(x,0) = 0$ ossia $x^2 e^{x^2} = |x|$, quindi $x = 0$ (ancora l'origine) oppure $xe^{x^2} = \pm 1$. Studiamo il caso $x \geq 0$, il caso $x < 0$ si otterrà per simmetria. In questo caso si ha $xe^{x^2} = 1$. Poniamo $g(x) = xe^{x^2}$ per $x \geq 0$. Si ottiene $g(0) = 0$, $g'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Pertanto la funzione $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ è strettamente crescente e suriettiva, ma allora è biiettiva ed esiste uno ed un solo $\bar{x}_+ > 0$ tale che $f(\bar{x}_+) = 1$. Quindi $P_1 = (\bar{x}_+, 0)$ e $P_2 = -P_1$ per simmetria. Calcoliamo $df(x,y)$ nel semipiano $x > 0$:
$$df(x,y) = \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy = \left(2xe^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+1\right) - 1\right)dx + 2ye^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+1\right)dy$$
Si ha $\partial_y f(P_1) = \partial_y f(P_2) = 0$, invece $\partial_x f(P_1) = 2\bar{x}_+ e^{\bar{x}_+^2}(\bar{x}_+^2 + 1) - 1$. Ricordando che $\bar{x}_+ e^{\bar{x}_+^2} = 1$, si ha $\partial_x f(P_1) = 2(\bar{x}_+^2 + 1) - 1 > 2 - 1 > 0$. Quindi $\partial_x f(P_1) \neq 0$. Per simmetria, $\partial_x f(P_2) \neq 0$, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini e ottenere la funzione implicita richiesta in un intorno di P_1 e P_2.

(4) La funzione h non è continua in $\mathbb{R}^2$, quindi la ricerca di massimi e minimi richiede una certa attenzione. Studiamo dapprima il caso $x > 0$. Si ha $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \cos\theta$. Dall'espressione in coordinate polari si ottiene che $|h|_{|\Gamma\cap\{x>0\}} \leq 1$ e che h raggiunga il suo valore massimo in $\Gamma \cap \{x > 0\}$ in P_1. Simmetricamente, il valore minimo di h su $\Gamma \cap \{x < 0\}$ è raggiunto in P_2. Si ha $h(P_1) = -h(P_2) = 1$. Studiamo il limite di $h(x,y)$ al tendere di (x,y) verso l'origine in Γ. Si ha:
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} h(x,y) = \lim_{\rho\to0^+} \rho e^{\rho^2} = 0.$$
Pertanto il massimo di h su Γ è raggiunto in P_1 e vale 1, il minimo su Γ è raggiunto in P^2 e vale -1.

(5) Consideriamo l'espressione in coordinate polari, limitandoci a $0 < \theta < \pi/2$. Per $\theta = 0$ si ha il punto P_1. Successivamente il valore del coseno decresce strettamente fino a zero in $\theta = \pi/2$. Per la stretta monotonia di g, anche il valore di ρ decresce strettamente fino a 0 in $\theta = \pi/2$. Quindi il grafico somiglia al simbolo ∞.

Svolgimento (Esercizio 78). L'insieme Ω è un cilindro circolare retto con asse coincidente con l'asse z e raggio di base pari a 1.

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega z\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{\{x^2+y^2<1\}} z\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\right) dz \\
&= \int_0^1 z\left(\int_{\{x^2+y^2<1\}} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\right) dz = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy \cdot \int_0^1 z\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1} (1-y^2)\,dy = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 79). Poniamo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha:

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & y+z^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & 4x^2-3z \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x+y \end{pmatrix} = (4, -1+2z, -1+8x)$$

Poiché il rotore è non nullo, il campo non è conservativo.

(2) Si ha

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} &= \int_0^2 \pi\vec{F}\circ\gamma(t)\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(4\sin^2(t)+2\cos(t), -6\sin(t), 2\cos(t)\big)\cdot(0, -2\sin(t), 2\cos(t))\,dt = 16\pi
\end{aligned}$$

(3) Si ha:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il prodotto vettoriale delle colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$:

$$\partial_u\varphi\wedge\partial_v\varphi = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \vec{e}_2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \vec{e}_3 & 2u & 2v \end{pmatrix} = (v+u, v-u, -1/2)$$

L'elemento d'area è pari alla norma $\|\partial_u\varphi\wedge\partial_v\varphi\|$, ovvero:

$$d\sigma = \sqrt{2u^2+2v^2+\frac{1}{4}}\,du\,dv.$$

(4) Si deve avere $(u+v)/2 = 3$, $(u-v)/2 = 0$, $u^2+v^2 = 18$. Dalla seconda, si ha $u = v$, quindi dalla prima $u = 3$, $v = 3$. Si ha quindi

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi\wedge\partial_v\varphi(3,3)}{\|\partial_u\varphi\wedge\partial_v\varphi(3,3)\|} = \frac{1}{\sqrt{145}}(12, 0, -1).$$

(5) Si ha:

$$\Phi(\vec{F},S) := \int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5} \det\begin{pmatrix} (u^2+v^2)^2+\dfrac{u-v}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ (u+v)^2-3\left(u^2+v^2\right) & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{u-v}{2}+\dfrac{u+v}{2} & 2u & 2v \end{pmatrix} du\,dv$$

$$= \int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5}\left(u^5+u^4v+2u^3v^2-2u^3+2u^2v^3+4u^2v+\frac{u^2}{2}+uv^4-4uv^2-\frac{u}{2}+v^5+2v^3-\frac{v^2}{2}\right)du\,dv$$
$$= 0.$$

Svolgimento (Esercizio 80). Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo e dividendo per $u(t,x)$ si ottiene:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

e quindi $\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$ con condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$. Il polinomio caratteristico è $\mu^2 = \lambda$. Se $\lambda > 0$ le radici del polinomio caratteristico sono $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$, e la soluzione generale è $X(x) = c_1e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2e^{-x\sqrt{\lambda}}$. Tale soluzione soddisfa le condizioni al contorno solo per $c_1 = c_2 = 0$ quindi non è accettabile.

Se $\lambda = 0$ si ha 0 come radice doppia, e la soluzione generale è $X(X) = c_1 + c_2x$. Tale soluzione soddisfa le condizioni al contorno solo per $c_1 = c_2 = 0$ quindi non è accettabile.

Se $\lambda < 0$ si hanno le radici complesse coniugate $\pm i\sqrt{|\lambda|}$. La soluzione generale è

$$X(x) = c_1\cos(x\sqrt{|\lambda|}) + c_2\sin(x\sqrt{|\lambda|}).$$

Tale soluzione soddisfa le condizioni al contorno per $c_1 = 0$ e $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Definiamo quindi $X_n(x) = c_n\sin(nx)$, relativa al valore $\lambda = -n^2$.

Per tali valori di λ, l'equazione per $T(t)$ porge $T_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$ con la condizione $\dot{T}_n(0) = 0$, da cui $T_n(t) = a_n\cos(nt)$.

Si ottengono così le soluzioni elementari (posto $d_n = a_nc_n$):

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = d_n\cos(nt)\sin(nx).$$

Le soluzioni elementari soddisfano $\partial_{tt}u_n(t,x) = \partial_{xx}u_n(t,x)$, $u_n(t,0) = u_n(t,\pi) = 0$ e $\partial_tu_n(0,x) = 0$.

Cerchiamo di coprire il dato iniziale con una serie di soluzioni elementari.

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x).$$

Si ricava:

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\sin(nx)$$

Quindi prolunghiamo per disparità $x(\pi-x)$ su $[-\pi,\pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Consideriamo lo sviluppo in serie (di soli seni) di questa funzione:

$$d_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n).$$

Si ottiene quindi la serie

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\cos(nt)\sin(nx).$$

La serie converge uniformemente e le serie delle derivate seconde in t e in x convergono in L^2.

Svolgimento (Esercizio 81). Osserviamo che:

a. Il termine generale della serie è in modulo maggiorato da:

$$\begin{aligned}\left|\frac{n\log\, n+e^{-n}}{n-e^n}\cos nx+\cos(n\pi)\frac{5^{n+2}}{6^{3n-4}}\sin nx\right| &\le \left|\frac{n\log\, n+e^{-n}}{n-e^n}\right|+\frac{5^{n+2}}{6^{3n-4}}\\ &=\frac{n\log\, n+e^{-n}}{e^n-n}+25\cdot 6^4\cdot\frac{5^n}{(6^3)^n}=\frac{n\log\, n+e^{-n}}{e^n}\frac{1}{1-ne^{-n}}+25\cdot 6^4\cdot\left(\frac{5}{6^3}\right)^n\\ &\le\frac{n^2+1}{e^n}\frac{1}{1-ne^{-n}}+25\cdot 6^4\cdot\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{n^3}+25\cdot 6^4\cdot\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che per $n\ge 1$ vale $n>\log n$, $5/6^3<1/2$ e per n sufficientemente grande si ha $e^n>(n^2+1)n^3$, $\frac{1}{1-ne^{-n}}<1$. Quindi il termine generale è maggiorato in modulo dal termine generale di una serie numerica convergente. La serie converge totalmente quindi uniformemente, puntualmente e in L^2. Poiché converge totalmente, essendo le somme parziali funzioni continue, converge ad una funzione continua. Essa è integrabile termine a termine. Nell'integrazione tra 0 e 2π, tutti i termini che contengono seni o coseni si annullano per periodicità, pertanto

$$\int_0^{2\pi}S(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{2}\,dx=\pi^2.$$

b. Poiché per n sufficientemente grande si ha $\log n<\sqrt{n}$, il termine generale della serie è in modulo maggiorato da:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^n\log n}{n^3+12n+1}\cos nx-\frac{n^{1/4}-4n}{6n^4-2n}\sin nx\right| &\le\frac{\sqrt{n}}{n^3}+\frac{4-n^{-3/4}}{6n^3-2}\\ &\le\frac{1}{n^{5/2}}+\frac{4}{5n^3+n^3-2}\le\frac{1}{n^{5/2}}+\frac{4}{5}\frac{1}{n^3}.\end{aligned}$$

Quindi il termine generale è maggiorato in modulo dal termine generale di una serie numerica convergente. La serie converge totalmente quindi uniformemente, puntualmente e in L^2. Poiché converge totalmente, essendo le somme parziali funzioni continue, converge ad una funzione continua. Essa è integrabile termine a termine. Nell'integrazione tra 0 e 2π, tutti i termini che contengono seni o coseni si annullano per periodicità, pertanto

$$\int_0^{2\pi}S(x)=\int_0^{2\pi}7\,dx=14\pi.$$

Svolgimento (Esercizio 82).

a. Poniamo $f(x,y)=(x^2+2y^2)^2-x^2-y^2$. In coordinate polari piane $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ si ha

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^4(1+\sin^2\theta)^2-\rho^2$$

L'origine appartiene all'insieme $f=0$. Nei punti diversi dall'origine è possibile dividere per ρ^2, quindi

$$\Gamma:=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ \rho=\frac{1}{1+\sin^2\theta},\ \theta\in[0,2\pi[\right\}\cup\{(0,0)\}.$$

(osserviamo che la condizione $\rho\ge 0$ è sempre rispettata). Si hanno le simmetrie rispetto agli assi e all'origine: $f(x,y)=f(-x,y)=f(-x,-y)=f(x,-y)$.

Poiché $\Gamma = f^{-1}(0)$ e f è continua, si ha che Γ è chiuso. Dall'espressione in coordinate polari si ricava che il massimo di ρ sull'insieme vale 1 ed è assunto quando $\theta = 0, \pi$, quindi $\Gamma \subseteq \overline{B((0,0),1)}$. Pertanto è anche limitato. Essendo chiuso e limitato, è compatto.

Calcoliamo le intersezioni con gli assi: $f(x,0) = x^4 - x^2$ nullo per $x = 0$ o $x = \pm 1$, quindi $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,0)$; $f(0,y) = 4y^4 - y^2$ nullo per $y = 0$ e $y = \pm 1/2$, quindi $P_3 = (0,1/2)$ e $P_4 = (0,1/2)$.

Calcoliamo il differenziale di f:

$$df(x,y) = \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy = (4x\left(x^2+2y^2\right) - 2x)\,dx + (8y\left(x^2+2y^2\right) - 2y)\,dy$$

Pertanto, la tangente all'insieme nel generico punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$ è data da:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = df(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) \\ &= (4x\left(x^2+2y^2\right) - 2x)(x - x_0) + (8y\left(x^2+2y^2\right) - 2y)(y - y_0) \end{aligned}$$

Valutando si ha $\partial_x f(P_3) = \partial_x f(P_4) = \partial_y f(P_1) = \partial_y f(P_2) = 0$ mentre $\partial_y f(P_3) \neq 0$, $\partial_y f(P_4) \neq 0$, $\partial_x f(P_1) \neq 0$, $\partial_y f(P_2) \neq 0$. Quindi le rette tangenti in P_3 e P_4 sono orizzontali, mentre in P_1 e P_2 sono verticali. Si ha $r_1 : x = 1$, $r_2 : x = -1$, $r_3 : y = \frac{1}{2}$, $r_4 : y = -\frac{1}{2}$. Per il Teorema di Dini, Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di P_3 e P_4. Nei punti P_1 e P_2, il Teorema di Dini non è applicabile. Si ha che Γ non può essere scritto come grafico $y = \varphi(x)$ a causa della simmetria rispetto all'asse x.

Si ha $h(x,y) > 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $h(0,0) = 0$ con $(0,0) \in \Gamma$, che pertanto è punto di minimo assoluto. Si ha poi

$$h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)_{|\Gamma} = \rho^2_{|\Gamma} = \frac{1}{(1+\sin^2\theta)^2}$$

che raggiunge il suo massimo assoluto in $[0, 2\pi]$ per $\sin\theta = 0$, quindi $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Il valore del massimo è 1. I punti di massimo corrispondenti sono P_1 e P_2. I punti corrispondenti a $\sin^2\theta = 1$, ovvero $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ sono punti di minimo relativo e in questi punti si ha $\rho^2 = 1/4$, quindi $\rho = 2$.

Seppure non richiesto dall'esercizio, raccogliamo ulteriori dati per costruire un grafico qualitativo dell'insieme Γ. L'insieme Γ è inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine ed è ad essa tangente nei punti $(\pm 1, 0)$. L'origine è un punto isolato di Γ e $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ è circoscritto alla circonferenza di raggio $1/2$ centrata nell'origine ed è ad essa tangente nei punti $(0, \pm 1/2)$. Il massimo di $|x|$ vincolato all'insieme è raggiunto nei punti $(\pm 1, 0)$, mentre il massimo di y^2, e quindi di $|y|$ vincolato all'insieme è raggiunto nei punti che massimizzano

$$y^2_{|\Gamma} = [\rho^2 \sin^2\theta]_{|\Gamma} = \frac{\sin^2\theta}{(1+\sin^2\theta)^2} =: p(\theta).$$

Si ha:

$$p'(\theta) = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\left(\sin^2\theta+1\right)^2} - \frac{4\sin^3\theta\cos\theta}{\left(\sin^2\theta+1\right)^3} = \frac{2\sin\theta\cos^3\theta}{\left(\sin^2\theta+1\right)^3}$$

che si annulla per $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Tali punti corrispondono a $(\pm 1, 0)$ (minimi per y^2), $(0, \pm 1/2)$ (massimi per y^2). L'insieme ha l'aspetto di un'ovale allungato lungo l'asse delle ascisse, cui va aggiunta l'orgine (punto isolato).

b. Poniamo $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 - 2y^2$. In coordinate polari piane $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4 - \rho^2(1+\sin^2\theta)$$

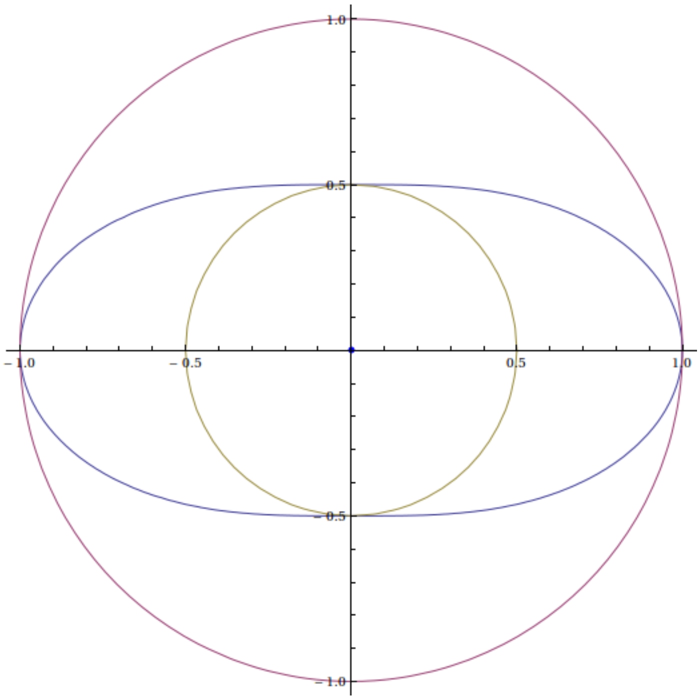


FIGURA 11. La curva di equazione $(x^2+2y^2)^2 = x^2+y^2$ con le circonferenze inscritta e circoscritta. L'origine è punto isolato.

L'origine appartiene all'insieme $f=0$. Nei punti diversi dall'origine è possibile dividere per ρ^2, quindi

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = \sqrt{1+\sin^2\theta},\, \theta\in[0,2\pi[\right\} \cup \{(0,0)\},$$

osservando che la condizione $\rho \geq 0$ è sempre rispettata. Si hanno le simmetrie rispetto agli assi e all'origine: $f(x,y) = f(-x,y) = f(-x,-y) = f(x,-y)$.

Poiché $\Gamma = f^{-1}(0)$ e f è continua, si ha che Γ è chiuso. Dall'espressione in coordinate polari si ricava che il massimo di ρ sull'insieme vale $\sqrt{2}$, quindi $\Gamma \subseteq \overline{B((0,0),\sqrt{2})}$. Pertanto è anche limitato. Essendo chiuso e limitato, è compatto.

Calcoliamo le intersezioni con gli assi: $f(x,0) = x^4 - x^2$ nullo per $x=0$ o $x=\pm1$, quindi $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,0)$; $f(0,y) = y^4 - 2y^2$ nullo per $y=0$ e $y=\pm\sqrt{2}$, quindi $P_3 = (0,\sqrt{2})$ e $P_4 = (0,\sqrt{2})$.

Calcoliamo il differenziale di f:

$$df(x,y) = \partial_x f(x,y)\,dx + \partial_y f(x,y)\,dy = (4x\left(x^2+y^2\right) - 2x)\,dx + (4y\left(x^2+y^2\right) - 4y)\,dy$$

Pertanto, la tangente all'insieme nel generico punto $(x_0,y_0)\in\Gamma$ è data da:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) = df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) \\ &= (4x\left(x^2+y^2\right) - 2x)(x-x_0) + (4y\left(x^2+y^2\right) - 4y)(y-y_0) \end{aligned}$$

Valutando si ha $\partial_x f(P_3) = \partial_x f(P_4) = \partial_y f(P_1) = \partial_y f(P_2) = 0$ mentre $\partial_y f(P_3) \neq 0$, $\partial_y f(P_4) \neq 0$, $\partial_x f(P_1) \neq 0$, $\partial_y f(P_2) \neq 0$. Quindi le rette tangenti in P_3 e P_4 sono orizzontali, mentre in P_1 e P_2 sono verticali. Si ha $r_1 : x = 1$, $r_2 : x = -1$, $r_3 : y = 1/2$, $r_4 : y = -1/2$. Per il Teorema di Dini, Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di P_3 e P_4. Nei punti P_1 e P_2 il teorema di Dini non è applicabile, ma le simmetrie rispetto agli assi escludono la possibilità di esplicitare Γ come grafico $y = f(x)$ in tali punti.

Si ha $h(x,y) > 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $h(0,0) = 0$ con $(0,0) \in \Gamma$, che pertanto è punto di minimo assoluto. Si ha poi

$$h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)_{|\Gamma} = \rho^2_{|\Gamma} = 1 + \sin^2\theta$$

che raggiunge il suo massimo assoluto in $[0, 2\pi]$ per $\sin^2\theta = 1$, quindi $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$. Il valore del massimo è 2. I punti di massimo corrispondenti sono P_3 e P_4. I punti con $\sin\theta = 0$, ovvero $\theta = 0, \pi$ corrispondenti a P_1 e P_2 sono di minimo relativo.

Seppure non richiesto dall'esercizio, raccogliamo ulteriori dati per costruire un grafico qualitativo dell'insieme Γ. L'insieme Γ è inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine ed è ad essa tangente nei punti $(0, \pm\sqrt{2})$. L'origine è un punto isolato di Γ e $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ è circoscritto alla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine ed è ad essa tangente nei punti $(\pm 1, 0)$. Il massimo di $|y|$ vincolato all'insieme è raggiunto nei punti $(0, \pm\sqrt{2})$, mentre il massimo di x^2, e quindi di $|x|$ vincolato all'insieme è raggiunto nei punti che massimizzano

$$x^2_{|\Gamma} = [\rho^2\cos^2\theta]_{|\Gamma} = (1 + \sin^2\theta)\cos^2\theta = (1 + \sin^2\theta)(1 - \sin^2\theta) = 1 - \sin^4\theta : q(\theta).$$

Tali punti corrispondono a $\theta = 0, \pi$, ovvero $(\pm 1, 0)$. L'insieme ha l'aspetto di un'ovale allungato lungo l'asse delle ordinate, cui va aggiunta l'orgine (punto isolato).

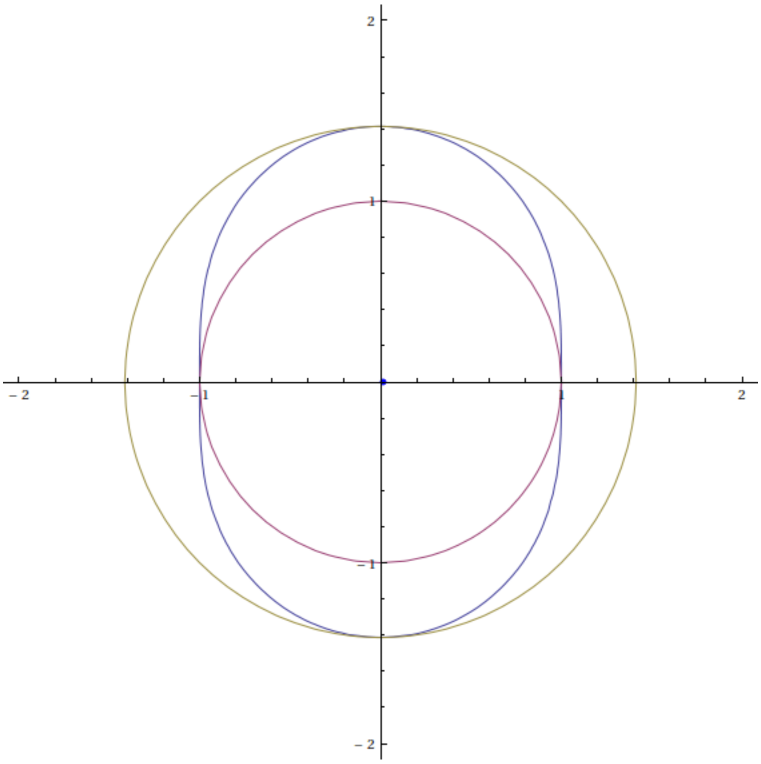


FIGURA 12. La curva di equazione $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + 2y^2$ con le circonferenze inscritta e circoscritta. L'origine è punto isolato.

Svolgimento (Esercizio 83).

a. Calcoliamo $\nabla g(x,y) = (3x^2 + 4x - \alpha y, 2y - \alpha x)$ e poniamo $\nabla g(x,y) = (0,0)$ per trovare i punti critici. Si ricava $y = \alpha x/2$ dalla seconda componente. Sostituendo nella prima si ha

$$3x^2 + \left(4 - \alpha^2/2\right) x = 0,$$

nulla per $x = 0$, cui corrisponde $y = 0$ e per $x = \dfrac{\alpha^2 - 8}{6}$, cui corrisponde $y = \dfrac{\alpha^3 - 8\alpha}{12}$. Pertanto i punti critici sono $O = (0, 0)$ e $P_\alpha = \left(\dfrac{\alpha^2 - 8}{6}, \dfrac{\alpha^3 - 8\alpha}{12}\right)$. Tali punti sono distinti se $\alpha^2 \neq 8$, ovvero se $|\alpha| \neq 2\sqrt{2}$. Calcoliamo la matrice Hessiana di g in questi punti:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 4 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(P_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 4 & -\alpha \\ -\alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è il prodotto degli autovalori, quindi se il determinante è strettamente negativo i due autovalori sono di segno discorde, pertanto il punto critico è di sella.

Nella fattispecie, $\det(D^2 f(0, 0)) = 8 - \alpha^2$ che è strettamente minore di zero se $|\alpha| > 2\sqrt{2}$. Pertanto per $|\alpha| > 2\sqrt{2}$, l'origine è punto di sella.

Per studiare il caso $|\alpha| < 2\sqrt{2}$, osserviamo che $\partial^2_{xx} g(0, 0) = 4 > 0$ e $\det(D^2 f(0, 0)) > 0$, quindi per il criterio dei minori principali[4] concludiamo che in questo caso l'origine è un minimo.

Nel caso particolare $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$, si ha $P_{\pm 2\sqrt{2}} \equiv O(0, 0)$ e

$$g(x, y) = x^3 + 2x^2 \mp 2\sqrt{2}xy + y^2 = x^3 + (\sqrt{2}x \mp y)^2$$

Si ha che $g(x, \pm\sqrt{2}x) = x^3$ che in un intorno di $x = 0$ assume valori di ambo i segni, quindi anche per $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ si ha un punto di sella nell'origine.

Procediamo in modo analogo per P_α, ricordando che nel caso $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ tale punto coincide con $O(0, 0)$ ed è di sella. Si ha $\det(D^2 f(P_\alpha)) = \alpha^2 - 8$ che è strettamente minore di zero se $|\alpha| < 2\sqrt{2}$. Pertanto per $|\alpha| < 2\sqrt{2}$, il punto P_α è punto di sella.

Per studiare il caso $|\alpha| > 2\sqrt{2}$, osserviamo che $\partial^2_{xx} g(P_\alpha) = \alpha^2 - 4 > 0$ e $\det(D^2 f(P_\alpha)) > 0$ quindi per il criterio dei minori principali concludiamo che in questo caso P_α è un minimo.

Seppure in modo più laborioso, per risolvere l'esercizio si poteva procedere con il calcolo degli autovalori utilizzando il fatto che gli autovalori di una matrice quadrata A di ordine 2 risolvono l'equazione $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0$. Pertanto gli autovalori di $D^2 f(0, 0)$ risolvono l'equazione $\lambda^2 - 6\lambda + (8 - \alpha^2) = 0$, quindi si ha $\lambda = 3 \pm \sqrt{1 + \lambda^2}$. Uno degli autovalori è sempre positivo. L'altro è positivo solo se $\sqrt{1 + \alpha^2} < 3$, quindi $|\alpha| < 2\sqrt{2}$. Pertanto per $|\alpha| < 2\sqrt{2}$ l'origine è un punto di minimo mentre per $|\alpha| > 2\sqrt{2}$ si trova che è un punto di sella. Gli autovalori di $D^2 f(P_\alpha)$ sono le soluzioni di

$$\lambda^2 - (\alpha^2 - 2)\lambda + (\alpha^2 - 8) = 0$$

ossia

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 2 + \sqrt{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 36}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 2 - \sqrt{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 36}\right).$$

Si ha sempre $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Distinguiamo vari casi:

i. Se $\lambda_2 > 0$ allora entrambi gli autovalori sono strettamente positivi, quindi P_α è di minimo. Questo caso si verifica se

$$\alpha^2 - 2 > \sqrt{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 36} = \sqrt{(\alpha^2 - 4)^2 + 20},$$

si deve avere $\alpha^2 > 2$, elevando al quadrato si ottiene $(\alpha^2 - 2)^2 - (\alpha^2 - 4)^2 > 20$ da cui

$$20 < ((\alpha^2 - 2) - (\alpha^2 - 4))((\alpha^2 - 2) + (\alpha^2 - 4)) = 2(2\alpha^2 - 6)$$

[4]*Criterio dei minori principali*: Se, preso un elemento della diagonale, esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice, sono strettamente positivi, allora la forma quadratica associata alla matrice è definita positiva. Se invece fra questi minori quelli di ordine dispari sono strettamente negativi e quelli di ordine pari strettamente positivi, allora la forma quadratica associata alla matrice è definita negativa.

e quindi $\alpha^2 > 8$ che è accettabile. Pertanto P_α è di minimo se $|\alpha| > 2\sqrt{2}$.

ii. Se $\lambda_1 < 0$ allora entrambi gli autovalori sono strettamente negativi, quindi P_α è di massimo. Questo caso si verifica se

$$\alpha^2 - 2 < -\sqrt{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 36},$$

si deve necessariamente avere $\alpha^2 < 2$, quindi moltiplicando per -1

$$2 - \alpha^2 > \sqrt{\alpha^4 - 8\alpha^2 + 36},$$

con entrambi i termini a questo punto strettamente positivi. Elevando al quadrato, si ottiene una disequazione è identica alla precedente, che era soddisfatta per $\alpha^2 > 8$, quindi questo caso non si verifica mai e $\lambda_1 > 0$ per ogni α.

iii. Se $|\alpha| < 2\sqrt{2}$ gli autovalori hanno segni discordi, quindi P_α è un punto di sella.

iv. Se $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ si ottiene $P_\alpha = (0, 0)$. Questo caso va studiato a parte e, come si è visto, $g(x, \pm\sqrt{2}x) = x^3$, che in un intorno di 0 assume valori di entrambi i segni, quindi è di sella.

b. Calcoliamo $\nabla g(x, y) = (12x^2 + 12x + 3y, 3x - 2\alpha y)$ e poniamo $\nabla g(x, y) = 0$ per trovare i punti critici. Se $\alpha = 0$, dalla seconda relazione si ha $x = 0$ e sostituendo nella prima si ottiene $y = 0$. Altrimenti, dalla seconda relazione si ricava $y = 3x/(2\alpha)$ e quindi $O = (0, 0)$ oppure $P_\alpha = \left(\dfrac{-8\alpha - 3}{8\alpha}, -\dfrac{3(8\alpha + 3)}{16\alpha^2}\right)$. Pertanto i punti critici sono l'origine O per ogni valore di α e il punto P_α solo per $\alpha \neq 0$. È richiesto lo studio della sola origine, calcoliamo quindi la matrice Hessiana di g:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x + 12 & 3 \\ 3 & -2\alpha \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Il determinante è il prodotto degli autovalori, quindi se il determinante è strettamente negativo i due autovalori sono di segno discorde, pertanto il punto critico è di sella.

Si ha $\det(D^2 f(0, 0)) = -24\alpha - 9$ che è strettamente minore di zero per $\alpha > -3/8$. Quindi per $\alpha > -3/8$ l'origine è un punto di sella.

Per studiare il caso $\alpha < -3/8$, osserviamo che $\partial^2_{xx} g(0, 0) = 12 > 0$ e $\det(D^2 f(0, 0)) > 0$, quindi per il criterio dei minori principali[5] concludiamo che in questo caso l'origine è un minimo.

Se $\alpha = -3/8$ si ottiene $g(x, y) = x^3 + 6(x + y/4)^2$, da cui $g(x, -4x) = x^3$ che assume valori discordi in un intorno di 0, quindi anche per questo caso l'origine è di sella.

Seppure in modo più laborioso, per risolvere l'esercizio si poteva procedere con il calcolo degli autovalori utilizzando il fatto che gli autovalori di una matrice quadrata A di ordine 2 risolvono l'equazione $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = 0$. Pertanto gli autovalori di $D^2 f(0, 0)$ risolvono l'equazione

$$\lambda^2 - 2(6 - \alpha) - (9 + 24\alpha) = 0$$

da cui

$$\lambda_1 = 6 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 12\alpha + 45}, \qquad \lambda_2 = 6 - \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 12\alpha + 45}.$$

Si ha $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Distinguiamo i vari casi:

[5] *Criterio dei minori principali*: Se, preso un elemento della diagonale, esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice, sono strettamente positivi, allora la forma quadratica associata alla matrice è definita positiva. Se invece fra questi minori quelli di ordine dispari sono strettamente negativi e quelli di ordine pari strettamente positivi, allora la forma quadratica associata alla matrice è definita negativa.

(a) Se $\lambda_2 > 0$ entrambi gli autovalori sono strattamente positivi e quindi O è di minimo. Questo avviene se

$$6 - \alpha > \sqrt{\alpha^2 + 12\alpha + 45}.$$

Necessariamente si deve avere $\alpha < 6$, elevando al quadrato si ha

$$36 - 12\alpha + \alpha^2 > \alpha^2 + 12\alpha + 45,$$

da cui $\alpha < -3/8$, che è accettabile. Pertanto per $\alpha < -3/8$ l'origine è di minimo.

(b) Se $\lambda_1 < 0$ entrambi gli autovalori sono strettamente negativi e quindi 0 è di massimo. Questo avviene se

$$6 - \alpha < -\sqrt{\alpha^2 + 12\alpha + 45}.$$

Necessariamente si deve avere $\alpha > 6$, da cui moltiplicando per -1 si ha

$$\alpha - 6 > \sqrt{\alpha^2 + 12\alpha + 45}.$$

I membri sono positivi, elevando al quadrato si ottiene

$$36 - 12\alpha + \alpha^2 > \alpha^2 + 12\alpha + 45,$$

da cui $\alpha < -3/8$, che non è accettabile. Quindi questo caso non si verifica mai e $\lambda_1 > 0$ per ogni α.

(c) Se $\alpha > -3/8$ si ha quindi che gli autovalori sono di segno discorde, pertanto l'origine è di sella.

(d) Se $\alpha = -3/8$ si ottiene $g(x, y) = x^3 + 6(x + y/4)^2$, da cui $g(x, -4x) = x^3$ che assume valori discordi in un intorno di 0, quindi anche per questo caso l'origine è di sella.

Svolgimento (Esercizio 84).

a. Si ha utilizzando le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho > 0$, $\theta \in [0, \pi/2]$, e ponendo poi $t = 1 + \rho^2$ da cui $dt = 2\rho\, d\rho$

$$I := \iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \rho^2)^{3/2}}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}}\, d\rho$$
$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

b. Si ha $y = 3 - x$ che si annulla per $x = 3$. Pertanto $D := \{(x, y) : x \in [0, 3], 0 \le y \le 3 - x\}$ da cui

$$I := \iint_D \sqrt{1 + x + y}\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} \sqrt{1 + x + y}\, dx\, dy = \int_0^3 \left[\frac{(1 + x + y)^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=3-x} dx$$
$$= \frac{2}{3} \int_0^3 [8 - (1 + x)^{3/2}]\, dx = 16 - \frac{2}{3} \int_0^3 (1 + x)^{3/2}\, dx = 16 + \frac{2}{3}\frac{2}{5}[(1 + x)^{5/2}]_{x=0}^{x=3}$$
$$= 16 - \frac{124}{15} = \frac{116}{15} = 7 + \frac{11}{15}.$$

Svolgimento (Esercizio 85). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 10x + 4y + 1 = 10x + 4y + 1.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & 5x^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x + 2y^2 + z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & z \end{pmatrix} = (-2z, 0, 1)\,.\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-2\sin(t), 2\sin(t)\cos(t), 0)$ da cui la circuitazione:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (20\cos^2(t), 2\sin^4(t) + 2\cos(t) + 9, 3)\cdot(-2\sin(t), 2\sin(t)\cos(t), 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\sin(t)\cos(t)\left(2\sin^4(t) - 18\cos(t) + 9\right)\right)\,dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos(u)\cos(v)\sin(u) & -\sin^2(u)\sin(v) \\ 2\cos(u)\sin(u)\sin(v) & \cos(v)\sin^2(u) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| = \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{\sin^4(u)\sin^2(v) + \sin^4(u)\cos^2(v) + \left(2\sin^3(u)\cos(u)\cos^2(v) + 2\sin^3(u)\cos(u)\sin^2(v)\right)^2}\,du\,dv. \\ &= \sqrt{\sin^4(u)\left(4\sin^2(u)\cos^2(u) + 1\right)}\,du\,dv = \sin^2(u)\sqrt{\sin^2(2u) + 1}\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = \left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) = \varphi(u,v)$ solo se $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u \varphi(P) \wedge \partial_v \varphi(P)}{\|\partial_u \varphi(P) \wedge \partial_v \varphi(P)\|} = (-1, 0, 0)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\Phi(\vec{F}, \Sigma) = \int_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma := \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \det \left(\begin{array}{c|c} F_1 \circ \varphi(u,v) & \\ F_2 \circ \varphi(u,v) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) \\ F_3 \circ \varphi(u,v) & \end{array} \right) du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} 5\cos^2(v)\sin^4(u) & 2\cos(u)\cos(v)\sin(u) & -\sin^2(u)\sin(v) \\ 2\sin^2(v)\sin^4(u) + \cos(v)\sin^2(u) + u^2 & 2\cos(u)\sin(u)\sin(v) & \cos(v)\sin^2(u) \\ u & 1 & 0 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -u^2 \sin^2(u)\sin(v) - 2\sin^6(u)\sin^3(v) - 5\sin^6(u)\cos^3(v) +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2u\sin^3(u)\cos(u)\cos^2(v)\, du\, dv - \sin^4(u)\sin(v)\cos(v) +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2u\sin^3(u)\cos(u)\sin^2(v)\, du\, dv$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2u\sin^3(u)\cos(u)\, du\, dv = 4\pi \int_0^{2\pi} u\sin^3(u)\cos(u)\, du$$
$$= 4\pi \left[u\frac{\sin^4(u)}{4} \right]_{u=0}^{u=2\pi} - \pi \int_0^{2\pi} \sin^4(u)\, du = -\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} \right)^4 du$$
$$= -\frac{\pi}{16} \int_0^{2\pi} (e^{2iu} + e^{-2iu} - 2)^2\, du = -\frac{\pi}{16} \int_0^{2\pi} (e^{4iu} + e^{-4iu} + 4 + 2 - 4e^{2iu} - 4e^{-2iu})\, du$$
$$= -\frac{\pi}{16} \int_0^{2\pi} 6\, du = -\frac{3\pi^2}{4}.$$

Il flusso di $\vec{G} = \mathrm{rot}\,\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\Phi(\vec{G}, \Sigma) = \int_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma := \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1 \circ \varphi(u,v) & \\ G_2 \circ \varphi(u,v) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) \\ G_3 \circ \varphi(u,v) & \end{array} \right) du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} -2u & 2\cos(u)\cos(v)\sin(u) & -\sin^2(u)\sin(v) \\ 0 & 2\cos(u)\sin(u)\sin(v) & \cos(v)\sin^2(u) \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\sin^3(u)\cos(u)\cos^2(v) + 2u\sin^2(u)\cos(v) + 2\sin^3(u)\cos(u)\sin^2(v)\, du\, dv$$
$$= 0.$$

Calcoliamo il flusso di $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\gamma_1(u) := \varphi(u, 0) = \left(\sin^2(u), 0, u\right),\ u \in [0, 2\pi],$$
$$\gamma_2(v) := \varphi(2\pi, v) = (0, 0, 2\pi),\ v \in [0, 2\pi],$$
$$\gamma_3(u) := \varphi(2\pi - u, 2\pi) = \left(\sin^2(u), 0, 2\pi - u\right),\ u \in [0, 2\pi],$$
$$\gamma_4(v) := \varphi(0, 2\pi - v) = (0, 0, 0),\ v \in [0, 2\pi].$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (\sin(2u), 0, 1)\,,\ u \in]0, 2\pi[,\\
\dot\gamma_2(v) &:= (0, 0, 0)\,,\ v \in]0, 2\pi[,\\
\dot\gamma_3(u) &:= (\sin(2u), 0, -1)\,,\ u \in]0, 2\pi[,\\
\dot\gamma_4(v) &:= (0, 0, 0)\,,\ v \in]0, 2\pi[.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\gamma_1 = \int_0^{2\pi} \vec F(\gamma_1(u)) \cdot \dot\gamma_1(u)\, du = \int_0^{2\pi} \left(5\sin^4(u), u^2 + \sin^2(u), u\right) \cdot (\sin(2u), 0, 1)\ du\\
&= \int_0^{2\pi} u + 10\sin^5(u)\cos(u)\, du = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\gamma_2 = \int_0^{2\pi} \vec F(\gamma_2(v)) \cdot \dot\gamma_2(v)\, dv = \int_0^{2\pi} \left(0, 4\pi^2, 2\pi\right) \cdot (0, 0, 0)\ du\\
&= \int_0^{2\pi} 0\, du = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\gamma_3 = \int_0^{2\pi} \vec F(\gamma_3(u)) \cdot \dot\gamma_3(u)\, du\\
&= \int_0^{2\pi} \left(5\sin^4(u), (u-2\pi)^2 + \sin^2(u), 2\pi - u\right) \cdot (\sin(2u), 0, -1)\ du\\
&= \int_0^{2\pi} \left((u-2\pi)^2 + \sin^2(u)\right)\sin(2u)\sin(v) + 10\sin^5(u)\cos(u)\cos(v) + u - 2\pi\, du = -2\pi^2.
\end{aligned}$$

$$I_4 := \int_{\gamma_4} \vec F \cdot d\gamma_4 = \int_0^{2\pi} \vec F(\gamma_4(v)) \cdot \dot\gamma_4(v)\, dv = \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0)\ du = \int_0^{2\pi} 0\, du = 0.$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 86). Il problema è posto in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x, y) = \left(2y + xy + \frac{y^3}{3x}\right)\ dx + \left(x + \frac{y^2}{x}\right)\ dy =: p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy.$$

Poiché

$$\frac{\partial_y p(x, y) - \partial_x q(x, y)}{q(x, y)} = 1 + \frac{1}{x} =: f(x),$$

l'equazione data non è esatta, ma essendo il secondo membro una funzione della sola x, essa ammette il fattore integrante

$$\lambda(x, y) = e^{\int f(x)\, dx} = e^{x + \log|x|} = |x|e^x.$$

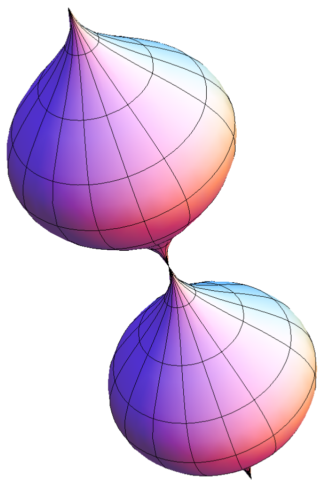


FIGURA 13. La superficie $\varphi(u,v) = \big(\sin^2(u)\cos(v), \sin^2(u)\sin(v), u\big)$, con $u, v \in [0, 2\pi]$.

Pertanto la forma

$$|x|e^x\omega(x,y) = e^x\left(2|x|y + |x|xy + \frac{|x|}{3x}y^3\right)\,dx + e^x\left(x|x| + \frac{|x|}{x}y^2\right)\,dy$$

è chiusa su Ω quindi poiché Ω è semplicemente connesso, ivi è esatta. Questo significa che il campo vettoriale:

$$\vec{G}(x,y) := \left(e^x\left(2|x|y + |x|xy + \frac{|x|}{3x}y^3\right), e^x\left(x|x| + \frac{|x|}{x}y^2\right)\right)$$

è conservativo. Posto $\Omega^+ := \{(x,y) \in \Omega:\ x > 0\}$ e $\Omega^- := \{(x,y) \in \Omega:\ x < 0\}$, si ha

$$\vec{G}(x,y) := -G(-x,y) = \left(e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right), e^x\left(x^2 + y^2\right)\right),$$

per ogni $(x,y) \in \Omega^+$. Per trovare un potenziale in Ω^+ integriamo il campo lungo la spezzata $\gamma_1(t) := (t, 0)$, $t \in [0, x_0]$ e $\gamma_2(t) := (x_0, t)$, $t \in [0, y_0]$:

$$\begin{aligned} V(x_0,y_0) &:= \int_{\gamma_1} \vec{G}\cdot d\ell + \int_{\gamma_2} \vec{G}\cdot d\ell = \int_0^{x_0} \vec{G}(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^{y_0} \vec{G}(x_0,t)\cdot(0,1)\,dt \\ &:= \int_0^{y_0} e^{x_0}(x_0^2 + t^2)\,dt = e^{x_0}\left(x_0^2y_0 + \frac{y_0^3}{3}\right). \end{aligned}$$

Tale funzione è un potenziale anche in Ω^-. Quindi l'integrale generale in forma implicita dell'equazione totale è:

$$e^x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)=c, \qquad\qquad c\in\mathbb{R}.$$

Imponendo il passaggio per $(\pi,1)$ otteniamo $c=4e/3$, da cui ricordando che $x\neq 0$ si ha

$$e^x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)=\frac{4}{3}e.$$

Osserviamo che dall'equazione si ricava che $y(x)\equiv 0$ è soluzione per ogni $x>0$ e che per $x>0$ vale il teorema di esistenza e unicità. Pertanto la soluzione $y(\cdot)$ tale per cui $y(1)=1$ è sempre positiva per ogni $x>0$ dove è definita. Sempre dall'equazione, si ricava che per $x>0$ vale $\dot y(x)<0$, pertanto per $x>0$ la soluzione è sempre strettamente decrescente e limitata dal basso. Quindi ammette limite finito ℓ. Il valore di ℓ si ricava imponendo $\lim_{x\to\infty}\dot y(x)=0$, da cui si ottiene che $\ell=0$. L'equazione può essere riscritta come

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}}{x^2+y^2},$$

pertanto posto $y(0)=\sqrt[3]{4e}$, la soluzione $y(\cdot)$ si estende ad una funzione di classe C^1 definita anche in un intorno sinistro di $x=0$. Per $x\to-\infty$, ricordando che $y(x)>0$ per ogni x, si deve necessariamente avere $y\to+\infty$, infatti se $y(x)$ si mantenesse limitato per $x\to+\infty$ la relazione implicita

$$e^x\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)=\frac{4}{3}e.$$

non potrebbe essere verificata perché il termine di sinistra tenderebbe a zero. D'altra parte se esistesse $c\in\mathbb{R}$ tale per cui

$$\lim_{x\to c^+}y(x)=+\infty,$$

allo stesso modo la relazione implicita non sarebbe verificata. Ma allora con l'estensione $y(0)=\sqrt[3]{4e}$, la soluzione risulta essere definita su tutto $\mathbb{R}$ e ammettere asintoto orizzontale per $x\to+\infty$. Non ammette asintoto per $x\to-\infty$, perché posto $y=mx$, il limite nella relazione implicita conduce ad un assurdo.

Svolgimento (Esercizio 87). Si ha che $u_\varepsilon(0,y)=0$, pertanto il limite per $\varepsilon\to 0$ di $u_\varepsilon(0,x)=0$. Fissato $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, esiste $\varepsilon_x>0$ tale che $|x|>\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>\varepsilon_x$, da cui $x_\varepsilon(x,y)=0$ per ogni $\varepsilon>\varepsilon_x$, quindi il limite è ancora 0. La successione $u_\varepsilon(\cdot)$ converge puntualmente alla funzione nulla.

Fissiamo ora $y\in\mathbb{R}$. Poniamo $z=x/\varepsilon$, $dz=dx/\varepsilon$

$$F(y):=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}}u_\varepsilon(x,y)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{x}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)e^{(y-x)^2+1}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{1}z(1-z)e^{(y-\varepsilon z)^2+1}\,dz.$$

Osserviamo che, per ogni $0<\varepsilon<1$ sufficientemente piccolo e $-1<z<1$,

$$(y-\varepsilon z)^2=(y^2-2\varepsilon yz+\varepsilon^2z^2)\le y^2+1+2|y|,$$

quindi la funzione integranda è maggiorata in modulo su $[-1,1]$ dalla funzione continua integrabile

$$z\mapsto|z(1-z)|\cdot e^{y^2+1+2|y|}.$$

Pertanto per il teorema della convergenza dominata:

$$\begin{aligned}F(y)&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{1}z(1-z)e^{(y-\varepsilon z)^2+1}\,dz=\int_{-1}^{1}\lim_{\varepsilon\to0^+}z(1-z)e^{(y-\varepsilon z)^2+1}\,dz\\&=\int_{-1}^{1}z(1-z)e^{y^2+1}\,dz=e^{y^2+1}\int_{-1}^{1}z(1-z)=-\frac{2}{3}e^{y^2+1}.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 88). Poniamo $F(x,y) := 6x^4y^2 + 5x^4 + 2x^2y^4 + y^4 - y^2$. Essendo F un polinomio, $F : \mathbb{R}^2 \to R$ è continua e quindi $\Gamma = F^{-1}(0)$ è un chiuso. L'insieme Γ è simmetrico rispetto agli assi e all'origine infatti $F(x,y) = F(-x,y) = F(x,-y) = F(-x,-y)$. Si ha:

$$\begin{aligned}F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= 2\rho^6\sin^4\theta\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\left(\rho^2\sin^2\theta - 1\right) + \rho^4\cos^4\theta\left(6\rho^2\sin^2\theta + 5\right)\\ &= \rho^2\left(-4\rho^4\cos^6\theta + 2\rho^2\left(\rho^2+3\right)\cos^4(\theta) + \left(2\rho^4 - 2\rho^2 + 1\right)\cos^2\theta + \rho^2 - 1\right).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 2\rho^6\sin^4\theta\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\left(\rho^2\sin^2\theta - 1\right) + \rho^4\cos^4\theta\left(6\rho^2\sin^2\theta + 5\right) = 0\right\}.$$

Osserviamo dall'equazione che se $(x,y) \in \Gamma$, si ha $0 = F(x,y) \geq -y^2 + y^4$, pertanto si deve avere $y^2 \geq y^4$. Ma questo implica $|y| \leq 1$. Si ha inoltre che $0 = F(x,y) \geq 5x^4 - y^2$, pertanto si deve avere $5x^4 \leq y^2 \leq 1$, quindi anche x è limitata. Essendo Γ chiuso e limitato, è compatto. Per studiare le intersezioni con le bisettrici è sufficiente limitarsi al primo quadrante e poi ricostruire per simmetria. Si ha $F(x,x) = x^2\left(8x^4 + 6x^2 - 1\right)$ che si annulla per $x = 0$ e $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 3\right)}$. Posto $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 3\right)}$, si ottengono quindi le intersezioni $(0,0)$, $P_1(\alpha,\alpha)$, $P_2 = (-\alpha,\alpha)$, $P_3 = -P_1$ e $P_4 = -P_2$. Calcoliamo il gradiente di F:

$$\nabla F(x,y) = \left(20x^3 + 24x^3y^2 + 4xy^4, -2y + 12x^4y + 4y^3 + 8x^2y^3\right).$$

La tangente in P_i è data da:

$$\langle \nabla F(P_i), (x,y) - P_i\rangle = 0,$$

ovvero, ricordando le simmetrie di F:

$$\begin{aligned}(28\alpha^5 + 20\alpha^3)(x-\alpha) + (20\alpha^5 + 4\alpha^3 - 2\alpha)(y-\alpha) &= 0, \text{ in } P_1 = (\alpha,\alpha),\\ (28\alpha^5 + 20\alpha^3)(-x-\alpha) + (20\alpha^5 + 4\alpha^3 - 2\alpha)(y-\alpha) &= 0, \text{ in } P_2 = (-\alpha,\alpha),\\ (28\alpha^5 + 20\alpha^3)(-x-\alpha) + (20\alpha^5 + 4\alpha^3 - 2\alpha)(-y-\alpha) &= 0, \text{ in } P_3 = (-\alpha,-\alpha),\\ (28\alpha^5 + 20\alpha^3)(x-\alpha) + (20\alpha^5 + 4\alpha^3 - 2\alpha)(-y-\alpha) &= 0, \text{ in } P_4 = (\alpha,-\alpha),\end{aligned}$$

Essendo $\alpha > 0$, in tutti questi punti si ha $\partial_x F(P_i) \neq 0$, quindi è sempre possibile esplicitare localmente $x = x(y)$.

Poniamo $L(x,y,\lambda) = h(x,y) = y^2 - \lambda F(x,y)$. Per il sistema dei moltiplicatori di Lagrange, si deve avere $\nabla L(x,y,0)$ nei punti di massimo e minimo di $h(x,y)$ vincolati a Γ. In particolare si ha $0 = \partial_x L(x,y,\lambda) = 4x\left(x^2\left(6y^2+5\right) + y^4\right)$ che si annulla solo per $x = 0$. Le intersezioni di Γ con la retta $x = 0$ sono date da $F(0,y) = 0$ ovvero da $y^4 - y = 0$, quindi da $y = 0$, $y = \pm 1$. Pertanto $(0,0)$ è di minimo e $(0,\pm 1)$ sono punti di massimo. Il minimo assoluto di h vincolato a Γ è 0 e il massimo assoluto vincolato è 1.

Svolgimento (Esercizio 89). In coordinate polari si ha $\Omega := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [0,\pi/2], \rho \leq \sin\theta\}$, da cui, ricordando che $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$:

$$\begin{aligned}I &:= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^4\sin^4\theta}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\cos\theta\sin^4\theta\rho^4\,d\rho\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sin\theta}\cos\theta\sin^4\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^9\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\left[\cos\theta\frac{\sin^{10}\theta}{10}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{50}.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 90). Si veda la soluzione dell'Esercizio 85.

Svolgimento (Esercizio 91). Si veda la soluzione dell'Esercizio 86.

Svolgimento (Esercizio 92). Poniamo $F(x,y) = x^4 + 4x^3 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2$. F è continua, quindi $\Gamma = F^{-1}(0)$ è chiuso. In coordinate polari piane:

$$\begin{aligned} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho^4\sin^4\theta + \rho^4\cos^4\theta + 2\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta + 4\rho^3\cos^3\theta - \rho^2\sin^2\theta \\ &= (\rho^2(\sin^2+\cos^2))^2 + 4\rho^3\cos^3\theta - \rho^2\sin^2\theta \\ &= \rho^2(\rho^2 + 4\rho\cos^3\theta - \sin^2\theta). \end{aligned}$$

Osservando che per $\theta = 0$ si recupera il caso $\rho = 0$, possiamo scrivere

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^2 + 4\rho\cos^3\theta - \sin^2\theta = 0\}.$$

In particolare si ottiene $\rho = -2\cos^3\theta \pm \sqrt{4\cos^6\theta + \sin^4\theta}$ da cui $\rho \le 2 + \sqrt{4+1} \le 2 + \sqrt{5}$, quindi l'insieme, essendo chiuso e limitato, è compatto. Osserviamo la simmetria rispetto all'asse delle ascisse $F(x,y) = F(x,-y)$. Per calcolare le intersezioni con le bisettrici studiamo $F(x,x) = 0$ e $F(x,-x) = 0$. Si ha in entrambi i casi $4x^4 + 4x^3 - x^2 = 0$ da cui $x = 0$ e $x = \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{2})$, quindi le intersezioni sono date da

$$P_1\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)\right), \quad P_2\left(\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)\right), \quad P_3 = -P_1, \quad P_4 = -P_2.$$

Il gradiente di F è:

$$\nabla F(x,y) = \left(4x^3 + 12x^2 + 4xy^2, 4x^2y + 4y^3 - 2y\right).$$

L'equazione della retta tangente in (x_0,y_0) a Γ è $\nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 0$. Le equazioni delle retta r_i tangente a Γ in P_i, $i = 1,\dots,4$ risultano quindi

$$\begin{aligned} r_1 :&\quad -\left(\sqrt{2}-2\right)x - \left(6-4\sqrt{2}\right)y + \frac{7}{\sqrt{2}} - 5 = 0, \\ r_2 :&\quad \left(2+\sqrt{2}\right)x + \left(6+4\sqrt{2}\right)y - \frac{7}{\sqrt{2}} - 5 = 0, \\ r_3 :&\quad \left(2+\sqrt{2}\right)x - \left(6+4\sqrt{2}\right)y - \frac{7}{\sqrt{2}} - 5 = 0, \\ r_4 :&\quad -\left(\sqrt{2}-2\right)x + \left(6-4\sqrt{2}\right)y + \frac{7}{\sqrt{2}} - 5 = 0. \end{aligned}$$

Tutte queste tangenti non sono verticali, quindi in tutti i punti considerati è possibile applicare il teorema di Dini per ottenere localmente $y = y(x)$. Per trovare i massimi e i minimi vincolati osserviamo che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho$, pertanto $(0,0)$ corrispondente a $\rho = 0$ è punto di minimo assoluto. Posto $\rho \neq 0$, dall'equazione in coordinate polari si ha:

$$\rho^2 + 4\rho\cos^3\theta - \sin^2\theta = 0.$$

Usiamo il teorema di Dini per esplicitare ρ in funzione di θ. Si ha:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2\rho + 4\cos^3\theta}{-12\rho\cos^2\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}.$$

La derivata è nulla se $\rho = -2\cos^3\theta$, inoltre sono da studiare a parte i casi $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ e $\rho\cos\theta = -1/6$. Dall'espressione in coordinate polari: per $\theta = 0$ si ottiene $\rho^2 + 4\rho = 0$, impossibile perché $\rho > 0$, per $\theta = \pi/2$ oppure $\theta = 3/2\pi$ si ha $\rho = 1$, per $\theta = \pi$ si ha $\rho = 4$. Se $\rho = -2\cos^3\theta$, si ottiene $\rho^2 - 2\rho = \sin^2\theta$ da cui $(\rho-1)^2 = \sin^2\theta + 1$ e quindi $\rho = 1 + \sqrt{\sin^2\theta + 1}$ che vale al massimo $1 + \sqrt{2}$. Se $\rho\cos\theta = -1/6$, dall'espressione in coordinate polari si ha $\rho^2 - \frac{3}{2}\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$ da cui $\rho^2 = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta \le 3/2$. Il valore massimo di h è quindi $\rho = 4$, ottenuto per $\theta = \pi$. Pertanto il massimo vincolato è assunto in $(-4,0)$ e vale 4.

Svolgimento (Esercizio 93). Si ha:

$$I = \left(\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{dy}{x+y}\right) dx\right)\left(\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{dt}{z+t}\right) dz\right) = \left(\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{dy}{x+y}\right) dx\right)^2.$$

e d'altra parte

$$\int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{dy}{x+y}\right) dx = \int_1^2 \int_{x+3}^{x+4} \frac{dz}{z}\, dx = -\int_1^2 \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \log 25 - \log 24.$$

Quindi $I = (\log 25 - \log 24)^2$.

Svolgimento (Esercizio 94). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 2x + 1 + 2z = 2x + 2z + 1.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2+y \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x+y+z \\ \vec{e}_3 & \partial_z & z^2-y \end{pmatrix} = (-2,0,0)\,.\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), 3\cos(t), 0)$ da cui la circuitazione:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3\sin(t)+\cos^2(t), 3\sin(t)+\cos(t), -3\sin(t))\cdot(-\sin(t), 3\cos(t), 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-3\sin^2(t) - (\sin(t)-3)\cos^2(t) + 9\sin(t)\cos(t)\right)\,dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} 6u & 1 \\ 2u & 8v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(2u-8v)^2 + (48uv-2u)^2 + (1-6u)^2}\,du\,dv. \\ &= \sqrt{4(u-4v)^2 + (2u-48uv)^2 + (1-6u)^2}\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (3, 1, 1) = \varphi(u, v)$ solo se $u = 1$, $v = 0$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{33}}, -\frac{5}{\sqrt{33}}, -\frac{2}{\sqrt{33}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F}, \Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \left(\begin{array}{c|c} F_1 \circ \varphi(u, v) & \\ F_2 \circ \varphi(u, v) & \operatorname{Jac}\varphi(u, v) \\ F_3 \circ \varphi(u, v) & \end{array}\right) du\, dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} u^2 + 4v^2 + \left(3u^2 + v\right)^2 & 6u & 1 \\ 4u^2 + u + 4v^2 + 2v & 2u & 8v \\ -u^2 - 4v^2 + (u + v)^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} du\, dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (18u^5 - 72u^4 v + 12u^3 v - 22u^3 + 48u^2v^2 - 12u^2 v - 2u^2)\, du\, dv + \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-144uv^3 - 8uv^2 - 12uv + u - 40v^3 + 4v^2 + 2v)\, du\, dv = 24.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G}, \Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1 \circ \varphi(u, v) & \\ G_2 \circ \varphi(u, v) & \operatorname{Jac}\varphi(u, v) \\ G_3 \circ \varphi(u, v) & \end{array}\right) du\, dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} -2 & 6u & 1 \\ 0 & 2u & 8v \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} du\, dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (16v - 4u)\, du\, dv = 0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u, -1) = \left(3u^2 - 1, u^2 + 4, u - 1\right),\ u \in [-1, 1], \\
\gamma_2(v) &:= \varphi(1, v) = \left(v + 3, 4v^2 + 1, v + 1\right),\ v \in [-1, 1], \\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u, 1) = \left(3u^2 + 1, u^2 + 4, 1 - u\right),\ u \in [-1, 1], \\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-1, -v) = \left(3 - v, 4v^2 + 1, -v - 1\right),\ v \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Le derivate di tali curve sono date da: $\dot\gamma_1(u) := (6u, 2u, 1)$, $\dot\gamma_2(v) := (1, 8v, 1)$, $\dot\gamma_3(u) := (6u, 2u, -1)$ e infine $\dot\gamma_4(v) := (-1, 8v, -1)$, $u, v \in]-1, 1[$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\gamma_1 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_1(u)) \cdot \dot\gamma_1(u)\, du \\ &= \int_{-1}^{1} \big(9u^4 - 5u^2 + 5, 4u^2 + u + 2, -2u - 3\big) \cdot (6u, 2u, 1)\ du \\ &= \int_{-1}^{1} 54u^5 - 22u^3 + 2u^2 + 32u - 3\, du = -\frac{14}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\gamma_2 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_2(v)) \cdot \dot\gamma_2(v)\, dv \\ &= \int_{-1}^{1} \big(5v^2 + 6v + 10, 4v^2 + 2v + 5, (2 - 3v)v\big) \cdot (1, 8v, 1)\ du \\ &= \int_{-1}^{1} 2\left(16v^3 + 9v^2 + 24v + 5\right)\ du = 32. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\gamma_3 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_3(u)) \cdot \dot\gamma_3(u)\, du \\ &= \int_{-1}^{1} \big(9u^4 + 7u^2 + 5, 4u^2 - u + 6, -2u - 3\big) \cdot (6u, 2u, -1)\ du \\ &= \int_{-1}^{1} 54u^5 + 50u^3 - 2u^2 + 44u + 3\, du = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec F \cdot d\gamma_4 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_4(v)) \cdot \dot\gamma_4(v)\, dv \\ &= \int_{-1}^{1} \big(5v^2 - 6v + 10, 4v^2 - 2v + 3, (2 - 3v)v\big) \cdot (-1, 8v, -1)\ du \\ &= \int_{-1}^{1} 2\left(16v^3 - 9v^2 + 14v - 5\right)\ du = -32. \end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 95). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per $T(t)X(x)$ si ottiene

$$\frac{\dot T(t)}{T(t)} = \frac{36\ddot X(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pertanto si hanno le equazione $\dot T(t) = \lambda T(t)$, la cui soluzione è $T_\lambda(t) = k_\lambda e^{\lambda t}$ e $36\ddot X(x) - \lambda X(x) = 0$ da accoppiarsi con le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$. Il polinomio caratteristico è $36\mu^2 - \lambda$ e il suo discriminante è 4λ. Se $\lambda > 0$ la soluzione è $X_\lambda(x) = c^1_\lambda e^{\sqrt{\lambda}x/6} + c^2_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}x/6}$. Sostituendo i dati $X(0) = X(\pi) = 0$ si ha $c^1_\lambda = -c^2_\lambda$ e $c^1_\lambda(e^{\sqrt{\lambda}\pi/6} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi/6}) = 0$ da cui $c^1_\lambda = c^2_\lambda = 0$ non accettabile. Se

$\lambda = 0$ la soluzione è $X_0(x) = c_0^1 + c_0^2 x$ e sostituendo le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$ si ottiene ancora $c_\lambda^1 = c_\lambda^2 = 0$ non accettabile. Se $\lambda < 0$ la soluzione è $X_\lambda = c_\lambda^1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x/6) + c_\lambda^2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x/6)$, e sostituendo le condizioni $X(0) = X(\pi) = 0$ si ha $c_\lambda^1 = 0$ e $\sqrt{|\lambda|}/6 = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pertanto si hanno i valori accettabili $\lambda_n = -36n^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le soluzioni relative sono $X_{\lambda_n}(x) = c_{\lambda_n} \sin(nx)$. Con tali valori di λ_n, si ha $T_{\lambda_n}(t) = k_{\lambda_n} e^{-36n^2 t}$. Si ottengono pertanto le soluzioni elementari $u_n(t,x) = b_n e^{-36n^2 t} \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dove $b_n = k_{\lambda_n} c_{\lambda_n}$. Cerchiamo di ottenere il dato iniziale mediante una serie di soluzioni elementari:

$$e^x = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left([e^x \sin(nx)]_{x=0}^{x=\pi} - n \int_0^\pi e^x \cos(nx)\, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-n[e^x \cos(nx)]_{x=0}^{x=\pi} + n \int_0^\pi -ne^x \sin(nx)\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-n(e^\pi(-1)^n - 1) - n^2 \frac{\pi}{2} b_n \right). \end{aligned}$$

quindi $b_n = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{(1 - e^\pi(-1)^n)n}{1+n^2}$. Si ottiene quindi la serie:

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^\pi(-1)^n)n}{1+n^2} e^{-36n^2 t} \sin(nx).$$

Osserviamo che il modulo del termine generale della serie e della serie delle derivate di ogni ordine in x e in t è maggiorato da $C\frac{p(n)}{n^2+1} e^{-36n^2 t}$, dove C è una costante che dipende solo dall'ordine di derivazione e $p(n)$ è un polinomio in n. Pertanto su ogni compatto di $]0, +\infty[\times [0, \pi]$ si ha che la serie converge totalmente, e pertanto è una soluzione del problema.

Altro modo: consideriamo l'equazione di partenza $\partial_t u(t,x) - 36\, \partial_{xx}^2 u(t,x) = 0$, moltiplichiamola per $\sin(nx)$ e integriamo in x sull'intervallo $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi \partial_t u(t,x) \sin(nx)\, dx - 36 \int_0^\pi \partial_{xx}^2 u(t,x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^\pi u(t,x) \sin(nx)\, dx + 36n \int_0^\pi \partial_x u(t,x) \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^\pi u(t,x) \sin(nx)\, dx - 36n^2 \int_0^\pi u(t,x) \sin(nx)\, dx. \end{aligned}$$

Posto $\hat{u}_n(t) = \displaystyle\int_0^\pi u(t,x) \sin(nx)\, dx$, si ha $\frac{d}{dt} \hat{u}_n(t) = -36n^2 \hat{u}_n(t)$, quindi $\hat{u}_n(t) = \hat{u}_n(0) e^{-36n^2 t}$, dove

$$\hat{u}_n(0) = \int_0^\pi u(0,x) \sin(nx)\, dx = \int_0^\pi e^x \sin(nx)\, dx = \frac{n - e^\pi(-1)^n n}{n^2+1}.$$

A questo punto,

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n(t) \sin(nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^\pi(-1)^n)n}{1+n^2} e^{-36n^2 t} \sin(nx),$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 96). Poniamo $f(x,y) := -3x^2y^2 + x^2 + 6y^4 - 2$. Osserviamo che $f(x,y) = f(\pm x, \pm y)$ con tutte le combinazioni di segni, quindi l'insieme è simmetrico rispetto agli assi e all'origine. Si ha

$$f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = 6\rho^4 \sin^4(\theta) - 3\rho^4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \rho^2 \cos^2(\theta) - 2,$$

da cui

$$\Gamma := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 6\rho^4\sin^4(\theta) - 3\rho^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + \rho^2\cos^2(\theta) - 2 = 0,\ \rho > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Poiché $f \in C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, si ha che $\Gamma = f^{-1}(0)$ è chiuso. Per vedere se è compatto, poniamo $y = mx$ e consideriamo $f(x, mx) = 6m^4x^4 - 3m^2x^4 + x^2 - 2$. Se $f(x, mx) = 0$, si ottiene

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{48m^4 - 24m^2 + 1}}{6\left(2m^4 - m^2\right)}$$

In particolare, per $m \to 1/\sqrt{2}^-$, il limite dell'espressione precedente è $+\infty$. Quindi la retta $y = mx$ per $m \to 1/\sqrt{2}^-$ tende a intersecare l'insieme in punti di ascissa illimitatamente grande. L'insieme non è quindi compatto. Per trovare i punti di intersezione con la retta $x = 2$ risolviamo l'equazione $f(2, y) = 0$. Si ottiene $2 - 12y^2 + 6y^4 = 0$, da cui

$$P_1 = \left(2, -\sqrt{\frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{6}\right)}\right),\ P_2 = \left(2, \sqrt{\frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{6}\right)}\right),$$

$$P_3 = \left(2, -\sqrt{\frac{1}{3}\left(3 + \sqrt{6}\right)}\right),\ P_4 = \left(2, \sqrt{\frac{1}{3}\left(3 + \sqrt{6}\right)}\right).$$

Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)) = (2x - 6xy^2, 24y^3 - 6x^2y).$$

Osserviamo che $\partial_x f(P_i) \neq 0$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ è possibile applicare il teorema della funzione implicita in tutti i punti ottenendo locaclmente $x = x(y)$. Indicata con r_i la retta tangente a Γ in P_i per $i = 1, 2, 3, 4$ si ha:

$$\begin{aligned}
r_i :& \nabla f(P_i) \cdot ((x, y) - P_i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4,\\
r_1 :& \left(\sqrt{6} - 2\right)x + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}y = 0,\\
r_2 :& \left(\sqrt{6} - 2\right)x - 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}y = 0,\\
r_3 :& \left(2 + \sqrt{6}\right)x + 2\sqrt{2\left(3 + \sqrt{6}\right)}y = 0,\\
r_4 :& \left(2 + \sqrt{6}\right)x - 2\sqrt{2\left(3 + \sqrt{6}\right)}y = 0.
\end{aligned}$$

Essendo Γ non limitato, non esistono massimi assoluti. Dall'equazione $f(x, y) = 0$, si ottiene per $y \neq \pm 1/\sqrt{3}$ che $x^2 = \dfrac{2\left(3y^4 - 1\right)}{3y^2 - 1}$. Poiché $f(x, \pm 1/\sqrt{3}) \neq 0$, non stiamo escludendo punti di Γ dal campo di esistenza. La formula $x^2 = \dfrac{2\left(3y^4 - 1\right)}{3y^2 - 1} \geq 0$ è valida solo se il membro di sinistra è non negativo. Questo avviene se $|y| < \sqrt{1/3}$ oppure $|y| \geq \sqrt[4]{1/3}$ Pertanto:

$$h(x, y)_{|\Gamma} = \frac{2\left(3y^4 - 1\right)}{3y^2 - 1} + y^2 =: g(y).$$

Per trovare i massimi nell'insieme $|y| \geq \sqrt[4]{1/3}$, studiamo dapprima il caso $|y| > \sqrt[4]{1/3}$ e $|y| < \sqrt{1/3}$ e poi a parte studiamo $|y| = \pm\sqrt[4]{1/3}$ La derivata di questa funzione è

$$g'(y) = -\frac{12\left(3y^4 - 1\right)y}{\left(3y^2 - 1\right)^2} + \frac{24y^3}{3y^2 - 1} + 2y,$$

e l'unico punto dove si annulla è per $y = 0$. Questo corrisponde ai punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$ dove h vale 2. Studiamo ora i punti esclusi: $f(x, \pm\sqrt[4]{1/3}) = 0$ se e solo se $x = 0$, questo corrisponde ai punti $Q_\pm := (0, \pm\sqrt[4]{1/3})$ dove h vale $\sqrt{1/3} < 2$. Pertanto i punti $Q_\pm$ sono di minimo assoluto per h vincolato a Γ.

Svolgimento (Esercizio 97). Consideriamo i seguenti cambiamenti di coordinate $\psi(x, y) = (u, v)$ e $\varphi(\rho, \theta) = (x, y)$ dove $\psi := \varphi^{-1} :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ è data da

$$\varphi(u, v) = (x, y) := \begin{cases} x = e^u, \\ y = e^v. \end{cases} \qquad \psi(u, v) = (x, y) = \begin{cases} u = \log x, \\ v = \log y. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana di φ è diagonale:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{pmatrix},$$

e il suo determinante è $\det \operatorname{Jac}\varphi(u, v) = e^u e^v > 0$. Posto

$$f(x, y) = \frac{1}{(\log x)^2 + (\log y)^2} \frac{1}{xy},$$

si ha:

$$I_\alpha = \int_{\varphi^{-1}(R_\alpha)} f \circ \varphi(u, v) \, |\det \operatorname{Jac}\varphi(u, v)| \, du \, dv = \int_{\varphi^{-1}(R_\alpha)} \frac{1}{u^2 + v^2} \, du \, dv,$$

$$\varphi^{-1}(R_\alpha) := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\alpha^2} \le u^2 + v^2 \le \alpha^2, \; u + v \ge \sqrt{u^2 + v^2} \right\}$$

Passando in coordinate polari, $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(R_\alpha) &= \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\alpha} \le \rho \le \alpha, \; \cos\theta + \sin\theta \ge 1, \; \theta \in [0, 2\pi] \right\} \\
&= \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \; \rho \in \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right], \; \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \ge \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \theta \in [0, 2\pi] \right\} \\
&= \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \; \rho \in \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right], \; \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \theta \in [0, 2\pi] \right\} \\
&= \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \; \rho \in \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right], \; \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + \theta \le \frac{3\pi}{4} \right\} \\
&= \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \; \rho \in \left[\frac{1}{\alpha}, \alpha\right], \; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$I_\alpha := \int_{1/\alpha}^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_{1/\alpha}^{\alpha} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pi}{2} \left(\log\alpha - \log\frac{1}{\alpha} \right) = \pi \log\alpha.$$

Svolgimento (Esercizio 98). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z) = \partial_x F_1(x, y, z) + \partial_y F_2(x, y, z) + \partial_z F_3(x, y, z) = 2xz + 0 + 0 = 2xz.$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2 z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2 - y \end{pmatrix} = \left(-2z - 1, x^2 - 2x, 0\right).$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.

Si ha $\dot\gamma(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t), 0)$ da cui la circuitazione:

$$\oint_\gamma \vec F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \vec F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (0, 0, 9\cos^2(t) - 3\sin(t)) \cdot (-3\sin(t), 3\cos(t), 0)\, dt = 0.$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned} d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det \begin{pmatrix} \vec e_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec e_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec e_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{64u^2v^2 + (2u-2v)^2 + (2u+2v)^2}\, du\, dv. \\ &= 2\sqrt2\sqrt{u^2\left(8v^2+1\right) + v^2}\, du\, dv. \end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $u = 0$, $v = 1$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat n(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right).$$

Il flusso di $\vec G = \operatorname{rot}\vec F = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec G, \Sigma) = \int_\Sigma \vec G \cdot \hat n\, d\sigma &:= \int_{-2}^2\int_{-2}^2 \det \left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\, dv \\ &= \int_{-2}^2\int_{-2}^2 \det \begin{pmatrix} -2\left(u^2+v^2\right) - 1 & 1 & 1 \\ (u+v)^2 - 2(u+v) & -2u & 2v \\ 0 & 2u & 2v \end{pmatrix} du\, dv \\ &= \int_{-2}^2\int_{-2}^2 16u^3v + 2u^3 + 2u^2v - 4u^2 + 16uv^3 - 2uv^2 + 8uv - 2v^3 + 4v^2\, du\, dv \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec F$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec F \cdot \hat n\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec F \cdot \ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi\,(u,-2) = \big(u-2, 4-u^2, u^2+4\big)\,,\ u \in [-2,2],\\
\gamma_2(v) &:= \varphi\,(2,v) = \big(v+2, v^2-4, v^2+4\big)\,,\ v \in [-2,2],\\
\gamma_3(u) &:= \varphi\,(-u,2) = \big(2-u, 4-u^2, u^2+4\big)\,,\ u \in [-2,2],\\
\gamma_4(v) &:= \varphi\,(-2,-v) = \big(-v-2, v^2-4, v^2+4\big)\,,\ v \in [-2,2].
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (1,-2u,2u)\,,\ u \in]-2,2[,\\
\dot\gamma_2(v) &:= (1,2v,2v)\,,\ v \in]-2,2[,\\
\dot\gamma_3(u) &:= (-1,-2u,2u)\,,\ u \in]-2,2[,\\
\dot\gamma_4(v) &:= (-1,2v,2v)\,,\ v \in]-2,2[.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 := \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\gamma_1 &= \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_1(u)) \cdot \dot\gamma_1(u)\,du\\
&= \int_{-2}^{2} \Big((u-2)^2\left(u^2+4\right), \left(u^2+4\right)^2, 2(u-2)u\Big) \cdot (1,-2u,2u)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} -2u^5+u^4-16u^3-48u+16\,du\\
&= \frac{384}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 := \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\gamma_2 &= \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_2(v)) \cdot \dot\gamma_2(v)\,dv\\
&= \int_{-2}^{2} \Big((v+2)^2\left(v^2+4\right), \left(v^2+4\right)^2, 4(v+2)\Big) \cdot (1,2v,2v)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} 2v^5+v^4+20v^3+16v^2+64v+16\,du\\
&= \frac{2432}{15}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 := \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\gamma_3 &= \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_3(u)) \cdot \dot\gamma_3(u)\,du\\
&= \int_{-2}^{2} \Big((u-2)^2\left(u^2+4\right), \left(u^2+4\right)^2, 2(u-2)u\Big) \cdot (-1,-2u,2u)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} -2u^5-u^4-8u^3-16u^2-16u-16\,du\\
&= -\frac{2432}{15}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec{F}\cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_4(v))\cdot\dot{\gamma}_4(v)\,dv\\
&= \int_{-2}^{2} \Big((v+2)^2\left(v^2+4\right), \left(v^2+4\right)^2, 4(v+2)\Big)\cdot(-1,2v,2v)\;du\\
&= \int_{-2}^{2} 2v^5 - v^4 + 12v^3 + 32v - 16\,du\\
&= -\frac{384}{5}.
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 99). Posto $q(x,y) = -x^2\left(e^{xy}-2y\right)$ e $p(x,y) = e^{xy}(2-xy) - xy^2$ l'equazione si scrive nella forma di equazione totale:

$$\omega(x,y) := p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = -x^2\left(e^{xy}-2y\right)\,dx + \left(e^{xy}(2-xy)-xy^2\right)\,dy.$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{q(x,y)} = \frac{3x\left(e^{xy}-2y\right)}{q(x,y)} = -\frac{3}{x}.$$

Tale funzione è una funzione della sola variabile x, pertanto si ha il fattore integrante

$$h(x) = e^{-\int 3/x\,dx} = \frac{1}{|x|^3}.$$

Allora la forma $\frac{1}{|x|^3}\omega$ è esatta in $\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\}$, equivalentemente il campo

$$\vec{G}(x,y) = \left(\frac{p(x,y)}{|x|^3}, \frac{q(x,y)}{|x|^3}\right)$$

è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\}$. Determiniamone un potenziale. Studiamo dapprima il caso $x>0$. Scegliamo come punto base il punto $(1,0)$ e integriamo il campo lungo una spezzata γ con lati paralleli agli assi congiungente $(1,0)$ con il generico punto (x,y), $x>0$:

$$\begin{aligned}
V^+(x,y) &= \int_\gamma \vec{G}(x,y)\cdot d\vec{\ell} = \int_1^x \vec{G}(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^y \vec{G}(x,t)\cdot(0,1)\,dt\\
&= \int_1^x \frac{p(t,0)}{t^3}\,dt + \int_0^y \frac{q(x,t)}{x^3}\,dt = \int_1^x \frac{p(t,0)}{t^3}\,dt + \int_0^y \frac{q(x,t)}{x^3}\,dt\\
&= \int_1^x \frac{2}{t^3}\,dt - \int_0^y \frac{e^{xt}-2t}{x}\,dt = \left[-\frac{1}{t^2}\right]_{t=1}^{t=x} - \frac{1}{x}\left[\frac{e^{tx}}{x} - t^2\right]_{t=0}^{t=y}\\
&= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{yx}}{x} - y^2\right) = 1 - \frac{e^{xy}-xy^2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Verifichiamo il risultato ottenuto, per $x>0$:

$$\begin{aligned}
\partial_x V^+(x,y) &= \frac{e^{xy}(2-xy)-xy^2}{x^3} = \frac{p(x,y)}{|x|^3}\\
\partial_y V^+(x,y) &= -\frac{e^{xy}-2y}{x} = \frac{q(x,y)}{|x|^3}.
\end{aligned}$$

Studiamo ora il caso $x < 0$, scegliamo il punto base $(-1,0)$ e procediamo come nel caso precedente (questa volta con $x < 0$)

$$\begin{aligned}
V^-(x,y) &= \int_\gamma \vec{G}(x,y)\cdot d\vec{\ell} = \int_{-1}^x \vec{G}(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^y \vec{G}(x,t)\cdot(0,1)\,dt \\
&= \int_{-1}^x \frac{p(t,0)}{-t^3}\,dt + \int_0^y \frac{q(x,t)}{-x^3}\,dt = -\int_{-1}^x \frac{p(t,0)}{t^3}\,dt - \int_0^y \frac{q(x,t)}{x^3}\,dt \\
&= -\int_1^x \frac{2}{t^3}\,dt + \int_0^y \frac{e^{xt}-2t}{x}\,dt = -\left[-\frac{1}{t^2}\right]_{t=-1}^{t=x} + \frac{1}{x}\left[\frac{e^{tx}}{x} - t^2\right]_{t=0}^{t=y} \\
&= -1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{yx}}{x} - y^2\right) = -1 + \frac{e^{xy}-xy^2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Verifichiamo il risultato ottenuto, per $x < 0$:

$$\begin{aligned}
\partial_x V^-(x,y) &= -\frac{e^{xy}(2-xy)-xy^2}{x^3} = \frac{p(x,y)}{|x|^3} \\
\partial_y V^-(x,y) &= \frac{e^{xy}-2y}{x} = \frac{q(x,y)}{|x|^3}.
\end{aligned}$$

Trascurando le costanti additive, possiamo quindi definire un potenziale su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$:

$$V(x,y) = -\mathrm{sign}(x)\,\frac{e^{xy}-xy^2}{x^2} = -\frac{e^{xy}-xy^2}{x|x|}.$$

L'equazione $V(x,y) = c$ definisce implicitamente funzioni $y = y(x)$ soddisfacenti a:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x V(x,y)}{\partial_y V(x,y)} = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}.$$

nei punti dove $x \neq 0$ e $q(x,y) \neq 0$. In particolare, le soluzioni non sono mai definite su tutto $\mathbb{R}$. Sia $y = y(x)$ una soluzione definita in $]0,\varepsilon[$ per qualche $\varepsilon > 0$ e sia $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione in $]0,\varepsilon[$ con $x_i \to 0^+$ tale che $\{|y(x_i)|\}_{i\in\mathbb{N}}$ ammetta limite. Supponiamo per assurdo che tale limite sia finito e valga L. In particolare, a meno di sottosuccessioni ancora indicate con $\{y(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, si ha che $y(x_i)$ ammette limite finito uguale a $\pm L$. D'altra parte si ha $V(x_i, y(x_i)) = c \in \mathbb{R}$ costante per ogni $i \in \mathbb{N}$, pertanto si dovrebbe avere per ogni i

$$-cx_i^2 = e^{x_i y(x_i)} - x[y(x_i)]^2$$

da cui, al limite, si ottiene un assurdo sia nel caso $+L$ che in quello $-L$. Pertanto se $y(x_i)$ ammette limite, esso è $+\infty$ o $-\infty$, quindi se $|y(x_i)|$ ammette limite, allora $|y(x_i)| \to +\infty$. Si conclude che

$$\liminf_{x\to 0^+} |y(x)| = \lim_{x\to 0^+} |y(x)| = +\infty,$$

come voluto.

Svolgimento (Esercizio 100). Posto $f(x,y) := 4x^4 + 5x^2 - 6xy + 4y^4$, si osservi che $f(x,y) = f(-x,-y)$, quindi l'insieme è simmetrico rispetto all'origine. Si ha poi che $(0,0) \in \Gamma$ perché $f(0,0) = 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= 4\rho^4\sin^4\theta + 4\rho^4\cos^4\theta + 5\rho^2\cos^2\theta - 6\rho^2\sin\theta\cos\theta \\
&= \rho^2(4\rho^2\sin^4\theta + 4\rho^2\cos^4\theta + 5\cos^2\theta - 6\sin\theta\cos\theta) \\
&= \rho^2(4\rho^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 5\cos^2\theta - 6\sin\theta\cos\theta)
\end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$\Gamma = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) :\ \rho = \sqrt{\frac{\cos\theta(5\cos\theta - 6\sin\theta)}{4(\sin^4\theta + \cos^4\theta)}},\ \rho \geq 0, \theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

e tale scrittura comprende anche l'origine per $\theta = \pi/2$. Osserviamo che nell'espressione di ρ, il numeratore del radicando è limitato infatti $\cos\theta(5\cos\theta - 6\sin\theta) \le 11$, e al denominatore si ha sempre

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta) \ge 1/2.$$

Si ottiene quindi $\rho \le \sqrt{11/2}$, quindi l'insieme è limitato. Dato che f è continua e $\Gamma = f^{-1}(0)$, esso è anche chiuso e quindi essendo chiuso e limitato è compatto.

Consideriamo ora $f(x,x) = 0$. Si ottiene $x^2\left(8x^2 - 1\right) = 0$ da cui $x = \pm 1/\sqrt{8}$. Quindi $P_1 = -P_2 = (1/\sqrt{8}, 1\sqrt{8})$. Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = (16x^3 + 10x - 6y, 16y^3 - 6x).$$

La tangente r_i in P_i è data da $\nabla f(P_i) \cdot ((x,y) - P_i) = 0$, $i = 1,2$, ovvero $r_1 : y = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ e la retta r_2 è la simmetrica rispetto all'origine di r_1, quindi $r_2 : x = \dfrac{3y}{2} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$. In ambo i casi, tali rette non sono verticali, quindi $\partial_y f(P_i) \neq 0$, $i = 1,2$ e si può esplicitare $y = y(x)$ nell'intorno di P_1 e P_2.

Consideriamo l'intersezione di Γ con le rette $y = mx$. Da $f(x,mx) = 0$ si ottiene $x^2 = g_x(m) := \dfrac{1}{4}\dfrac{6m-5}{1+m^2}$. Sostituendo, si ha che

$$H(m) := h(x,y)_{|\Gamma} = \frac{6m-5}{m^4},\ m \ge 5/6.$$

Poiché $h(x,y) \ge 0$, se $m = 5/6$ si ha che h ha un minimo assoluto vincolato corrispondente al punto $x^2 = g(5/6) = 0$ e $y^2 = m^2x^2 = 0$, quindi a $(0,0)$ dove vale 0 Derivando, si ha $H'(m) = \dfrac{20-18m}{m^5}$, nulla solo per $m = 10/9 > 5/6$. Osservando che $H(5/6) = 0$ e $\lim_{m\to+\infty} H(m) = 0$, si ha che $m = 10/9$ è punto di massimo, da cui i punti di massimo $Q_1 = -Q_2 = (\sqrt{\frac{10935}{66244}}, \frac{10}{9}\sqrt{\frac{10935}{66244}})$ dove la funzione vale $H(10/9) = \frac{2187}{2000}$.

Svolgimento (Esercizio 101). In coordinate polari, si ha $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ e $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$.

$$R := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ \rho > 0,\ \theta \in [0,\pi/2],\ \cos\theta \le \rho \le 2\cos\theta\right\},$$

da cui, posto $z = \cos^2\theta$, $dz = -2\cos\theta\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \frac{2\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2(1+\rho^2)}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\frac{2\rho}{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta[\log(1+\rho^2)]_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta(\log(1+4\cos^2\theta) - \log(1+\cos^2\theta))\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^0(\log(1+4z) - \log(1+z))\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1(\log(1+4z) - \log(1+z))\,dz \\
&= \frac{1}{2}[z\log(1+4z) - \log(1+z)]_{z=0}^{z=1} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{4z}{1+4z} - \frac{z}{1+z}\right)dz \\
&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2) - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\left(1 - \frac{1}{1+4z}\right) - \left(1 - \frac{1}{1+z}\right)\right)dz \\
&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2) - \frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{1+4z} + \frac{1}{1+z}\right)dz
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\log(1+4z) - \log(1+z)\right]_{z=0}^{z=1}$$
$$= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\log 5 - \log 2\right) = \frac{5}{8}\log 5 - \log 2.$$

Svolgimento (Esercizio 102). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = yz + 1 + 2 = yz + 3.$$
$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & xyz \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y \\ \vec{e}_3 & \partial_z & 2z \end{pmatrix} = (0, xy, -xz)\,.$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-3\sin(t), 0, \cos(t))$ da cui la circuitazione:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (0,0,2\sin(t))\cdot(-3\sin(t),0,\cos(t))\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(2t)\,dt = 0.$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 2v \\ -2u & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| = \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{(-4uv-2u)^2 + (4uv+1)^2 + (4uv-2v)^2}\,du\,dv.$$
$$= \sqrt{(2v-4uv)^2 + 4(2uv+u)^2 + (4uv+1)^2}\,du\,dv.$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,0,0) = \varphi(u,v)$ solo se $u = 0$, $v = 0$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = (0,0,1)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) = \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma &:= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1\circ\varphi(u,v) & \\ F_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} \left(v-u^2\right)\left(v^2+u\right)\left(u^2+v^2\right) & 1 & 2v \\ v-u^2 & -2u & 1 \\ 2\left(u^2+v^2\right) & 2u & 2v \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 2(4uv+1)\left(u^2+v^2\right) - 2u\left(\left(v-u^2\right)\left(u+v^2\right)\left(u^2+v^2\right) - 2v\left(v-u^2\right)\right) + \\
&\quad + 2v\left(-2u\left(v-u^2\right)\left(u+v^2\right)\left(u^2+v^2\right) + u^2 - v\right) du\,dv \\
&= -\frac{7808}{105}.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) = \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma &:= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2v \\ \left(v-u^2\right)\left(v^2+u\right) & -2u & 1 \\ -\left(v^2+u\right)\left(u^2+v^2\right) & 2u & 2v \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} -8u^4v - 8u^3v^3 + 2u^3v - u^3 - 2u^2v^3 + 3u^2v^2 - 4uv^5 + 4uv^4 - 3uv^2 - 3v^4\,du\,dv \\
&= -\frac{1024}{15}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u,-2) = \left(u+4, -u^2-2, u^2+4\right), \ u\in[-2,2], \\
\gamma_2(v) &:= \varphi(2,v) = \left(v^2+2, v-4, v^2+4\right), \ v\in[-2,2], \\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u,2) = \left(4-u, 2-u^2, u^2+4\right), \ u\in[-2,2], \\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-2,-v) = \left(v^2-2, -v-4, v^2+4\right), \ v\in[-2,2].
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (1, -2u, 2u), \ u\in]-2,2[, \\
\dot\gamma_2(v) &:= (2v, 1, 2v), \ v\in]-2,2[, \\
\dot\gamma_3(u) &:= (-1, -2u, 2u), \ u\in]-2,2[, \\
\dot\gamma_4(v) &:= (2v, -1, 2v), \ v\in]-2,2[.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_1(u)) \cdot \dot{\gamma}_1(u)\, du \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-(u+4)\left(u^2+2\right)\left(u^2+4\right), -u^2-2, 2\left(u^2+4\right)\right) \cdot (1, -2u, 2u)\ du \\
&= \int_{-2}^{2} -u^5 - 4u^4 - 24u^2 + 12u - 32\, du \\
&= -\frac{1536}{5}. \\
I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_2(v)) \cdot \dot{\gamma}_2(v)\, dv \\
&= \int_{-2}^{2} \left((v-4)\left(v^2+2\right)\left(v^2+4\right), v-4, 2\left(v^2+4\right)\right) \cdot (2v, 1, 2v)\ du \\
&= \int_{-2}^{2} 2(v-4)\left(v^2+2\right)\left(v^2+4\right) v + 4\left(v^2+4\right) v + v - 4\, du \\
&= \frac{31088}{105}. \\
I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\gamma_3 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_3(u)) \cdot \dot{\gamma}_3(u)\, du \\
&= \int_{-2}^{2} \left((u-4)\left(u^2-2\right)\left(u^2+4\right), 2-u^2, 2\left(u^2+4\right)\right) \cdot (-1, -2u, 2u)\ du \\
&= \int_{-2}^{2} -u^5 + 4u^4 + 4u^3 + 8u^2 + 20u - 32\, du \\
&= -\frac{512}{15}. \\
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_4(v)) \cdot \dot{\gamma}_4(v)\, dv \\
&= \int_{-2}^{2} \left((v-4)\left(v^2-2\right)\left(v^2+4\right), v-4, 2\left(v^2+4\right)\right) \cdot (2v, -1, 2v)\ du \\
&= \int_{-2}^{2} 2(v-4)\left(v^2-2\right)\left(v^2+4\right) v + 4\left(v^2+4\right) v - v + 4\, du \\
&= -\frac{2416}{105}.
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\frac{1024}{15},$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 103). Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ottiene:

$$\frac{\ddot{T}(t) + 2\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) = \lambda X(x), \\ \ddot{T}(t) + 2\dot{T}(t) - \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Dalle condizioni iniziali si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ per ogni $t > 0$. Pertanto deve essere $X(0) = 0$. Analogamente, da $u(t,\pi) = 0$ per ogni $t > 0$ si ricava $X(\pi) = 0$. Pertanto risolviamo $\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$ soggetta a $X(0) = X(\pi) = 0$. Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - \lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = \lambda$.

Se $\Delta > 0$, le radici sono $\mu_1 = -\mu_2$ con $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, pertanto l'equazione ammette soluzioni

$$X(x) = c_{\lambda,1}e^{x\mu_1} + c_{\lambda,2}e^{x\mu_2}.$$

Sostituendo la condizioni al contorno $X(0) = 0$ si ha $c_{\lambda,1} = 0$ e sostituendo ancora $X(\pi) = 0$ si ottiene anche $c_{\lambda,1} = 0$. Quindi il caso $\Delta > 0$ non è accettabile.

Se $\Delta = 0$, le radici sono $\mu_1 = \mu_2 = 0$ con $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, pertanto l'equazione ammette soluzioni $X(x) = c_{\lambda,1} + c_{\lambda,2}x$. Sostituendo le condizioni al contorno $X(0) = X(\pi) = 0$ si ottiene ancora $c_{\lambda,1} = c_{\lambda,2} = 0$, quindi il caso $\lambda = 0$ non è accettabile.

Se $\Delta < 0$, il che si verifica per $\lambda < 0$, le radici sono $\mu_1 = -\mu_2$ con $\mu_1 = -\mu_2 = i\sqrt{|\lambda|} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pertanto l'equazione ammette soluzioni

$$X(x) = c_{\lambda,1}\cos(x\sqrt{|\lambda|}) + c_{\lambda,2}\sin(x\sqrt{|\lambda|}).$$

Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_{\lambda,1} = 1$. Sostituendo $X(\pi) = 0$ si trovano soluzioni non nulle solo se $\sqrt{\lambda} = n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Quindi si ha $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In tal caso le soluzioni sono tutte della forma $X_n(x) := a_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Consideriamo ora l'equazione per $T(t)$ relativa a questi valori di λ, ossia $\ddot{T}_n(t) + 2\dot{T}_n(t) + n^2T_n(t) = 0$. Il polinomio caratteristico di questa equazione è $\mu^2 + 2\mu + n^2 = 0$ le cui radici sono date da $\mu_1 = \mu_2 = -1$ se $n = 1$, altrimenti $\mu_1 = -1 - i\sqrt{|1-n^2|}$ e $\mu_2 = -1 + i\sqrt{|1-n^2|}$. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= d_{1,1}e^{-t} + d_{2,1}te^{-t} = e^{-t}(d_{1,1} + d_{2,1}t), \\ T_n(t) &= e^{-t}(d_{1,n}\cos(t\sqrt{n^2-1}) + d_{2,n}\sin(t\sqrt{n^2-1})). \end{aligned}$$

Dalla condizione $\partial_t u(0,x) = 0$, si ha $\dot{T}(0)X(x) = 0$ da cui $\dot{T}(0) = 0$, pertanto sostituendo nelle espressioni

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(t) &= -\, e^{-t}(d_{1,1} + d_{2,1}t) + d_{2,1}e^{-t}, \\ \dot{T}_n(t) &= -\, e^{-t}(d_{1,n}\cos(t\sqrt{n^2-1}) + d_{2,n}\sin(t\sqrt{n^2-1})) + \\ &\quad + e^{-t}(-d_{1,n}\sin(t\sqrt{n^2-1}) + d_{2,n}\cos(t\sqrt{n^2-1})), \end{aligned}$$

si ricava $0 = \dot{T}_1(0) = -d_{1,1} + d_{2,1}$ e $0 = \dot{T}_n(t) = -d_{1,n} + d_{2,n}$. Quindi, si ha

$$T_1(t) = e_1(1+t)e^{-t}, \qquad T_n(t) = e_n e^{-t}(\cos(t\sqrt{n^2-1}) + \sin(t\sqrt{n^2-1})).$$

Costruiamo quindi la serie delle soluzioni elementari $u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x)$ ponendo $b_n = a_ne_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(t,x) =& T_1(t)X_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)X_n(x) = b_1(1+t)e^{-t}\sin x + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{-t}(\cos(t\sqrt{n^2-1}) + \sin(t\sqrt{n^2-1}))\sin nx. \end{aligned}$$

Sostituendo la condizione a $t = 0$ si ha

$$u(0,x) = x = b_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Quindi i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione $g(x) = x$ in $[0, \pi]$. Per calcolarli, consideriamo il prolungamento dispari di g a $[-\pi, \pi]$. Esso coincide con g e si ha:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Si ottiene pertanto la soluzione (ricordando che $b_1 = 2$)

$$u(t, x) = 2(1 + t)e^{-t} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-t} (\cos(t\sqrt{n^2 - 1}) + \sin(t\sqrt{n^2 - 1})) \sin nx.$$

Tale serie converge uniformemente, pertanto definisce una funzione continua. Tuttavia derivando due volte in x sotto il termine generale della serie si ottiene in modulo $|ne^{-t}(\cos(t\sqrt{n^2 - 1}) + \sin(t\sqrt{n^2 - 1})) \sin nx|$ che diverge lungo successioni opportune $x_n = 1/n$, $t_n = \sqrt{2}/\sqrt{n^2 - 1}$. Quindi la serie trovata non è una soluzione classica del problema.

Svolgimento (Esercizio 104). Poniamo $f(x, y) := x^3 - 3x^2y + xy^2 - \dfrac{1}{6\sqrt{6}}$. Si ha

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^3 \cos \theta(1 - 3 \sin \theta \cos \theta) - \frac{1}{6\sqrt{6}}.$$

I punti con $\cos \theta = 0$, cioé $\theta = \pi/2$, $3\pi/2$ non appartengono a Γ. Quindi non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate. Analogamente quelli con $1 - 3 \sin \theta \cos \theta = 0$, cioè $1 - 3 \sin(2\theta)/2 = 0$ ovvero $\sin 2\theta = 2/3$, quindi

$$\theta \in \left\{ \arcsin \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin \frac{2}{3} \right), \pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} \right\},$$

non appartengono a Γ, pertanto, dividendo per tali espressioni, possiamo scrivere:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt[3]{\cos \theta(1 - 3 \sin \theta \cos \theta)}}, \qquad \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Per rispettare la condizione $\rho > 0$ studiamo il segno del membro di destra. Esso è positivo se $\theta \in I$ con

$$I := \left[0, \arcsin \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\left(\pi - \arcsin \frac{2}{3}\right), \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[.$$

$$\Gamma = \left\{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt[3]{\cos \theta(1 - 3 \sin \theta \cos \theta)}}, \theta \in I \right\}.$$

Poiché

$$\lim_{\substack{\theta \to \partial I \setminus \{0, 2\pi\} \\ \theta \in I}} \rho(\theta) = +\infty,$$

l'insieme può ammettere asintoti di coefficiente angolare $\tan \theta$ con $\theta \in \partial I \setminus \{0, 2\pi\}$. Da $f(x, mx) = 0$ si ricava

$$x(m) = \frac{1}{\sqrt{6}(m^2 - 3m + 1)^{1/3}}, \qquad y(m) = mx(m) = \frac{m}{\sqrt{6}(m^2 - 3m + 1)^{1/3}}$$

Da queste relazioni si ritrova che $|x(m)| \to \infty$ se $m \to m^* = (3 \pm \sqrt{5})/2$. In entrambi i casi $\lim_{m \to m^*} y(m) - mx(m) = 0$, pertanto si ha $q^* = 0$ in entrambi i casi. Quindi $y = (3 \pm \sqrt{5})x/2$

sono asintoti dell'insieme. Rimane da controllare il candidato corrispondente a $\cos\theta = 0$, ovvero alla retta verticale $x = 0$. Da $f(py, y) = 0$ si ricava

$$y(p) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt[3]{p^3 - 3p^2 + p}}, \qquad x(p) = py(p) = \frac{p^{2/3}}{\sqrt{6}\sqrt[3]{p^2 - 3p + 1}},$$

da controllare per $p \to 0$. Si ha $\lim_{p\to 0} px(p) - y(p) = 0$, da cui $x = 0$ è asintoto per l'insieme. Poiché l'insieme ammette asintoti, non può essere compatto.

Per determinare le intersezioni con gli assi, studiamo $f(0, y) = 0$. Tale equazione non ha soluzione, come già visto, quindi non vi sono intersezioni con l'asse y. Invece $f(x, 0) = 0$ ammette $x = 1/\sqrt{6}$ come soluzione. Pertanto si ottiene l'unica intersezione $P(1/\sqrt{6}, 0)$. La tangente in tale punto è data da $\langle \nabla f(P), (x - 1/\sqrt{6}, y) = 0$, ovvero $y = x - 1/\sqrt{6}$. Poiché $\partial_y f(P) \neq 0$, si ha che Γ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di tale punto.

L'insieme non è compatto, quindi non è garantita l'esistenza di massimi e minimi assoluti di h vincolati a Γ.

Utilizziamo la parametrizzazione $h(x, y)_\Gamma$ si esprime in coordinate polari come:

$$\begin{aligned} g(\theta) :=& \rho^2(\theta)\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin\theta\cos\theta}{6(\cos\theta(1 - 3\sin\theta\cos\theta))^{2/3}} \\ =& \frac{\sin 2\theta}{3\left(\cos\theta\left(1 - \frac{3}{2}\sin 2\theta\right)\right)^{2/3}}, \qquad \rho \geq 0,\ \theta \in I. \end{aligned}$$

È evidente come se $\sin 2\theta \to 2/3$, $\theta \in I$, ovvero lungo uno degli asintoti, si abbia $g(\theta) \to +\infty$, quindi non vi sono massimi assoluti. Se $\theta \to 3\pi/2^+$, ovvero lungo l'altro asintoto, si ha:

$$g(\theta) = \frac{\sin\theta\cos^{1/3}\theta}{6(1 - 3\sin\theta\cos\theta)^{2/3}} \to 0.$$

Pertanto dato $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale per cui se $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \Gamma$ con $\rho > R$, allora

$$h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) > -\varepsilon.$$

Studiamo a parte il caso $\nabla f(x, y) = 0$: si ha necessariamente $x = y = 0$ ma $(0, 0) \notin \Gamma$. Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo $L(x, y, \lambda) := h(x, y) + \lambda f(x, y)$, risolviamo $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$.

$$\begin{cases} \lambda\left(3x^2 - 6xy + y^2\right) + y = 0, \\ \lambda\left(2xy - 3x^2\right) + x = 0, \\ x^3 - 3x^2y + xy^2 - \frac{1}{6\sqrt{6}} = 0. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ si ottiene dalle prime due equazioni $x = y = 0$, ma la terza non è soddisfatta, quindi $\lambda \neq 0$. Si ha necessariamente $x \neq 0$ perché Γ non interseca l'asse delle ordinate. Se $y = 0$ si ottiene $x = 1/\sqrt{6}$ dalla terza equazione. Sostituendo nella prima si ottiene però $x = 0$, contraddizione. Quindi si ha $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\lambda \neq 0$ e quindi è possibile esplicitare $1/\lambda$ dalle prime due equazioni e uguagliarle: si ottiene

$$\frac{3x^2 - 6xy + y^2}{y} = 2y - 3x,$$

da cui $y_\pm = x\left(\pm\sqrt{21} - 3\right)/2$. Si ha poi:

$$0 = f(x, y_\pm) = \left(13 \mp 3\sqrt{21}\right)x^3 - \frac{1}{6\sqrt{6}}$$

e quindi si hanno le soluzioni:

$$P_- = \left(\frac{1}{\sqrt{6}(13 + 3\sqrt{21})^{1/3}}, -\frac{\sqrt{21} + 3}{2\sqrt{6}(13 + 3\sqrt{21})^{1/3}} \right),$$

$$P_+ = \left(\frac{1}{\sqrt{6}(13 - 3\sqrt{21})^{1/3}}, \frac{\sqrt{21} - 3}{2\sqrt{6}(13 - 3\sqrt{21})^{1/3}} \right),$$

cui corrispondono:

$$h(P_-) = -\frac{\sqrt{21} + 3}{12(13 + 3\sqrt{21})^{2/3}} < 0, \qquad h(P_+) = \frac{\sqrt{21} - 3}{12(13 - 3\sqrt{21})^{2/3}} > 0.$$

Quindi il punto di minimo assoluto è quello corrispondente al valore strettamente negativo, ovvero P_-. Non vi sono massimi assoluti.

Altro modo: poniamo

$$k(m) := x(m)y(m) = mx^2(m) = \frac{m}{6(m^2 - 3m + 1)^{2/3}}$$

$$k'(m) = \frac{1}{6\,(m^2 - 3m + 1)^{2/3}} - \frac{m(2m - 3)}{9\,(m^2 - 3m + 1)^{5/3}} = \frac{-m^2 - 3m + 3}{18\,(m^2 - 3m + 1)^{5/3}}$$

la derivata è nulla per $m_- = \frac{1}{2}\big(-3 - \sqrt{21}\big)$, $m_+ = \frac{1}{2}\big(\sqrt{21} - 3\big)$. Si ha $k(m_-) < 0$, $k(m_+) > 0$, quindi il punto di minimo è $P_- = (x(m_-), y(m_-))$.

Svolgimento (Esercizio 105). In coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$, si ha $\pi/6 < \theta < \pi/3$, $\rho > 0$, $1 < \rho < 3$.

$$I = \int_1^3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2\theta(\rho\log\rho)\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} ((\tan^2\theta + 1) - 1)\,d\theta \cdot \int_1^3 \rho^2\log\rho\,d\rho$$

$$= [-\theta + \tan\theta]_{\theta=\pi/6}^{\theta=\pi/3} \left(\left[\frac{\rho^3}{3}\log\rho \right]_{\rho=1}^{\rho=3} - \frac{\pi}{3}\int_1^3 \rho^2\,d\rho \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)\left(9\log 3 - \frac{26}{9} \right).$$

Svolgimento (Esercizio 106). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = z + 1 + 0 = z + 1.$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & xz \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y+z \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = (-2y - 1, -x, 0)\,.$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), 3\cos(t) + 1, 0)$ da cui:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, t + 3\sin(t), \cos^2(t) - (t + 3\sin(t))^2)\cdot(-\sin(t), 3\cos(t) + 1, 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t + 3\sin t)(3\cos t + 1)\,dt = 2\pi^2.$$

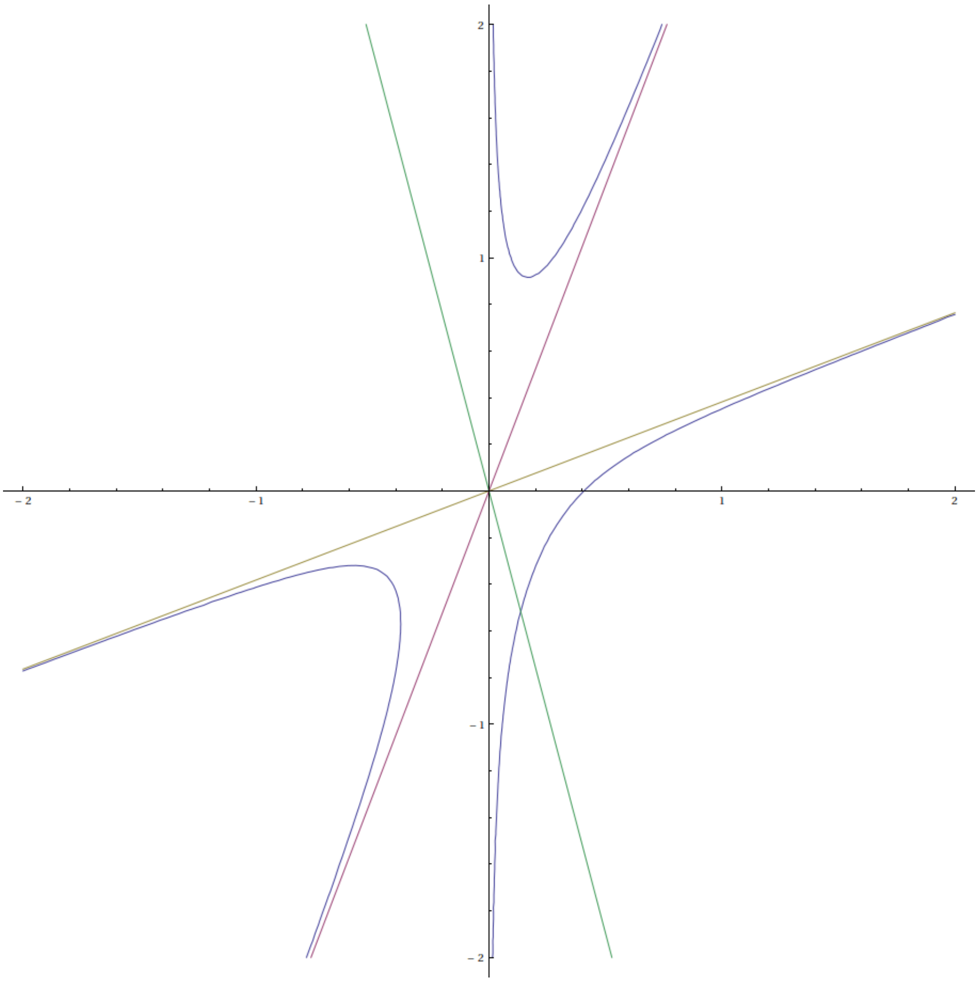


FIGURA 14. L'insieme definito da $x^3 - 3x^2y + xy^2 = \dfrac{1}{6\sqrt{6}}$, i suoi asintoti $x = 0$ e $y = (3 \pm \sqrt{5})x/2$, e la retta che lo interseca nel punto P_- di minimo vincolato per xy.

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)\| = \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-2u-2v)^2 + (2u-2v)^2 + 4}\,du\,dv = 2\sqrt{2u^2+2v^2+1}\,du\,dv. \end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $u = 0$, $v = 1$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) = \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma &:= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} -2(v-u)-1 & 1 & 1 \\ -u-v & -1 & 1 \\ 0 & 2u & 2v \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (-6u^2 + 2u + 6v^2 + 2v)\,du\,dv = 0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u,-2) = \left(u-2, -u-2, u^2+4\right), \ u \in [-2,2], \\
\gamma_2(v) &:= \varphi(2,v) = \left(v+2, v-2, v^2+4\right), \ v \in [-2,2], \\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u,2) = \left(2-u, u+2, u^2+4\right), \ u \in [-2,2], \\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-2,-v) = \left(-v-2, 2-v, v^2+4\right), \ v \in [-2,2].
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(u) &:= (1,-1,2u), \ u \in]-2,2[, \\
\dot{\gamma}_2(v) &:= (1,1,2v), \ v \in]-2,2[, \\
\dot{\gamma}_3(u) &:= (-1,1,2u), \ u \in]-2,2[, \\
\dot{\gamma}_4(v) &:= (-1,-1,2v), \ v \in]-2,2[.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$I_1 := \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_1(u)) \cdot \dot{\gamma}_1(u)\, du$$
$$= \int_{-2}^{2} \left((u-2)\left(u^2+4\right), u^2-u+2, -8u\right) \cdot (1,-1,2u)\, du$$
$$= \int_{-2}^{2} u^3 - 19u^2 + 5u - 10\, du = -\frac{424}{3}.$$

$$I_2 := \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_2(v)) \cdot \dot{\gamma}_2(v)\, dv$$
$$= \int_{-2}^{2} \left((v+2)\left(v^2+4\right), v^2+v+2, 8v\right) \cdot (1,1,2v)\, du$$
$$= \int_{-2}^{2} v^3 + 19v^2 + 5v + 10\, du = \frac{424}{3}.$$

$$I_3 := \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\gamma_3 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_3(u)) \cdot \dot{\gamma}_3(u)\, du$$
$$= \int_{-2}^{2} \left(-(u-2)\left(u^2+4\right), u^2+u+6, -8u\right) \cdot (-1,1,2u)\, du$$
$$= \int_{-2}^{2} u^3 - 17u^2 + 5u - 2\, du = -\frac{296}{3}.$$

$$I_4 := \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_4(v)) \cdot \dot{\gamma}_4(v)\, dv$$
$$= \int_{-2}^{2} \left(-(v+2)\left(v^2+4\right), v^2+v+6, 0\right) \cdot (-1,-1,2v)\, du$$
$$= \int_{-2}^{2} v^3 + 17v^2 + 3v + 6\, du = \frac{296}{3}.$$

Sommando i quattro contributi si ottiene $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 107). Scriviamo il sistema nella forma $\dot{z} = Az + B$ ponendo

$$z = (x,y), \qquad A = \begin{pmatrix} -20 & -72 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{-2t} \\ \dfrac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}.$$

Essendo l'equazione in z un'equazione lineare, la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Derivando la prima equazione si ha $\ddot{x} = -20\dot{x} - 72\dot{y} + 3e^{-2t}$. Sostituendo la seconda si ottiene

$$\ddot{x} = -20\dot{x} - 72\left(6x + 22y + \frac{e^{-2t}}{2}\right) + 3e^{-2t}.$$

Esplicitando y dalla prima si ha:

$$72y = -\dot{x} - 20x - \frac{3e^{-2t}}{2}.$$

Sostituendo nella relazione precedente:

$$\ddot{x} = -20\dot{x} - 72 \cdot 6x - 36e^{-2t} - 22\left(-\dot{x} - 20x - \frac{3e^{-2t}}{2}\right) + 3e^{-2t} = 2\dot{x} + 8x.$$

Si ottiene quindi l'equazione per $x(\cdot)$:

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 8x(t) = \ddot{x}(t) - \mathrm{Tr}(A)\,\dot{x} + \det(A)\,x = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 8$ le cui radici sono $\lambda = 4$ e $\lambda = -2$. Pertanto la soluzione generale per $x(\cdot)$ è $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$, quindi $\dot{x} = 4c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{-2t}$. Sostituendo nella prima equazione e risolvendo in y si ha:

$$72y(t) = -24c_1 e^{4t} - \frac{3}{2}\,(12c_2 + 1)\,e^{-2t}.$$

Riassumendo, la soluzione generale del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) & = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}, \\ \\ y(t) & = -\dfrac{1}{3} c_1 e^{4t} - \dfrac{1}{48}\,(12c_2 + 1)\,e^{-2t} \end{cases}$$

Sostituendo la condizione

$$P = (1,0) = (x(0), y(0)) = \left(c_1 + c_2, \frac{1}{48}(-12c_2 - 1) - \frac{c_1}{3}\right),$$

si ottiene $c_1 = -13/4$ e $c_2 = 17/4$. Poiché $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$, la soluzione $\gamma_P(\cdot)$ non è limitata per $t > 0$. Per avere soluzioni limitate è necessario e sufficiente che $c_1 = 0$, ovvero che

$$y(0) = -\frac{1}{48}(12x(0) + 1).$$

Pertanto tutte le soluzioni che al tempo $t = 0$ partono dalla retta $12x + 48y + 1 = 0$ sono limitate e inoltre per $t \to +\infty$ tendono asintoticamente all'origine.

Svolgimento (Esercizio 108). Osserviamo che, per n sufficientemente grande si ha:

$$\left|\frac{e^{-n} + n^2 - \log n}{n^5 + e^{-2n} + 1}\cos(nx)\right| \leq \left|\frac{n + n^2 + n}{n^5}\right| \leq \frac{3n^2}{n^5} \leq \frac{3}{n^3},$$
$$\left|\frac{\arctan n + n - \log 6n}{n^6 + e^{-5n} + 3}\cos(nx)\right| \leq \left|\frac{n + n + 6n}{n^6}\right| \leq \frac{8}{n^5}.$$

pertanto esiste $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che

$$\sum_{n=M}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{e^{-n} + n^2 - \log n}{n^4 + e^{-2n} + 1}\cos(nx)\right| \leq 3\sum_{n=M}^{\infty}\frac{1}{n^3} < +\infty,$$
$$\sum_{n=M}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\arctan n + n - \log 6n}{n^6 + e^{-5n} + 3}\cos(nx)\right| \leq 8\sum_{n=M}^{\infty}\frac{1}{n^5} < +\infty,$$

quindi la serie converge totalmente, uniformemente, puntualmente e in $L^2(-\pi,\pi)$. Si può quindi integrare termine a termine, osservando che, essendo l'intervallo di integrazione pari al doppio del periodo, tutti i termini in coseno non danno contributo:

$$\int_{-\pi}^{3\pi} S(x)\,dx = \int_{-\pi}^{3\pi} \frac{5}{2} = 10\pi.$$

Avendo convergenza totale, in particolare uniforme, ed essendo le somme parziali continue, si ha che $S(\cdot)$ è continua. Poiché il coseno è pari, si ha che è anche pari. La serie delle derivate ha come termine generale:

$$\left|\frac{e^{-n}+n^2-\log n}{n^5+e^{-2n}+1}(-n\sin(nx))\right| \leq \left|\frac{n(n+n^2+n)}{n^5}\right| \leq \frac{3n^2}{n^4} \leq \frac{3}{n^2},$$
$$\left|\frac{\arctan n+n-\log 6n}{n^6+e^{-5n}+3}(-n\sin(nx))\right| \leq \left|\frac{n+n+6n}{n^5}\right| \leq \frac{8}{n^4},$$

pertanto anch'essa converge totalmente ad una funzione continua. Si conclude che $S(x)$ è di classe C^1. Dall'uguaglianza di Parseval, si ha:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2 \geq \frac{a_0^2}{2},$$

dove

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\,dx=5,\ a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos(nx)\,dx,\ b_n=0.$$

quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S(x)|^2\,dx \geq 25\pi/2.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se $a_n=0$ per ogni n, ma ciò è falso perché $S(\cdot)$ non è costante, quindi la disuguaglianza è stretta.

Svolgimento (Esercizio 109). Poniamo $f(x,y)=(x^2+y^2)^4+2xy-(x^2+y^2)^2$. Si ha che $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Poiché $f(x,y)=f(-x,-y)$, l'insieme è simmetrico rispetto all'origine, e poiché $f(x,y)=f(y,x)$ esso è simmetrico anche rispetto alla bisettrice del I-III quadrante. Si ha $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2(\rho^6-\rho^2+\sin(2\theta))$. Per $\theta=\pi/2$ si ottiene che $\rho^6-\rho^2+\sin(2\theta)=0$ ammette come soluzione $\rho=0$, pertanto:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\ \rho^6-\rho^2+\sin(2\theta)=0,\ \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

Poiché f è continua, $\Gamma=f^{-1}(0)$ è chiuso. Dall'espressione in coordinate polari si ha che $|\rho^6-\rho^2|=|\sin 2\theta|\leq 1$. Poiché $\lim\limits_{\rho\to+\infty}|\rho^6-\rho^2|=+\infty$, si ha che non possono esistere successioni di punti $(x_n,y_n)=(\rho_n\cos\theta_n,\rho_n\sin\theta_n)$ tale che $\rho_n\to+\infty$, altrimenti la relazione $|\rho^6-\rho^2|\leq 1$ verrebbe violata. Quindi Γ è limitato. Essendo anche chiuso perché $\Gamma=f^{-1}(0)$, controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso, Γ è compatto. Si ha $f(x,0)=x^8-x^4=x^4(x-1)(x+1)$, pertanto le intersezioni di Γ con l'asse delle ascisse sono date da $P_5(0,0)$, $P_1(1,0)$, $P_2(-1,0)$. Applichiamo la simmetria rispetto alla bisettrice per determinare le intersezioni con l'asse delle ordinate: $P_5(0,0)$, $P_3(0,1)$, $P_4(0,-1)$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y)=\left(8x\left(x^2+y^2\right)^3-4x\left(x^2+y^2\right)+2y, 8y\left(x^2+y^2\right)^3-4y\left(x^2+y^2\right)+2x\right),$$

si ha quindi $\nabla f(P_1)=-\nabla f(P_2)=(4,2)$, $\nabla f(P_3)=-\nabla f(P_4)=(2,4)$. Essendo $\partial_y f(P_i)\neq 0$, $i=1,2,3,4$, l'insieme definisce implicitamente funzioni $y=\varphi_i(x)$ di classe C^1 in un intorno di ciascun P_i, $i=1,2,3,4$. L'equazione della tangente in un punto $P(x_0,y_0)$ è data da $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$. Nel nostro caso, la tangente in P_1 è data da $y=-2x+2$, la tangente in P_2, simmetrico rispetto all'origine di P_1 è data da $-y=2x+2$, ovvero $y=-2x-2$. La tangente in P_3, simmetrico di P_1 rispetto alla bisettrice, è data da $x=-2y+2$, ovvero $y=1-x/2$. La tangente in P_4, simmetrico di P_3 rispetto all'origine, è data da $-y=1+x/2$, ovvero $y=-1-x/2$.

Si ha $h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2\geq 0$. Si ha che $h(0,0)=0$ e $(0,0)\in\Gamma$, quindi è punto di minimo assoluto di Γ. Dobbiamo studiare quindi i massimi e minimi di ρ^2 vincolati $\rho^6-\rho^2=-\sin(2\theta)$. In altre parole, dobbiamo studiare i massimi e minimi di h vincolati da $h^3-h+\sin(2\theta)=0$ e da $h\geq 0$. Questa equazione definisce implicitamente h in funzione di θ se la derivata parziale rispetto ad h è non nulla. La derivata è nulla per $h=\pm 1/\sqrt{3}$, di questi solo il valore positivo è accettabile e andrà studiato a parte. Negli altri punti h può essere esplicitato in funzione di θ. La derivata di h rispetto a θ è nulla se $\theta = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tali valori di θ si hanno quindi gli estremali cercati. Osserviamo infine che per $\theta = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{R}$ si ottiene l'equazione $h^3 - h = -1$. Poiché il minimo di $h^3 - 1$ su $[0, +\infty[$ è raggiunto solo in $1/\sqrt{3}$ e vale $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, tale equazione non ha soluzioni accettabili. Pertanto i massimi (tra loro simmetrici rispetto all'origine) sono raggiunti per $\theta = 3\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi nell'intersezione di Γ con la retta $y = -x$.

Altro modo: dobbiamo studiare i massimi e minimi di $\rho^2 \geq 0$ vincolati dalla relazione $\rho^6 - \rho^2 = -\sin(2\theta)$. Si ha che $(0,0) \in \Gamma$ e $h(0,0) = 0$, quindi l'origine è il minimo assoluto di h vincolato a Γ. Studiamo preliminarmente la funzione $g(\rho) = \rho^6 - \rho^2$ per $\rho \in \mathbb{R}$. Si ha $g'(\rho) = 6\rho^5 - 2\rho = 2\rho(3\rho^4 - 1)$. La derivata si annulla per $\rho = 0, \pm 3^{-1/4}$. La funzione g è strettamente decrescente in $]-\infty, -3^{-1/4}[$, strettamente crescente in $]-3^{-1/4}, 0[$, strettamente decrescente in $]0, 3^{-1/4}[$ e strettamente crescente in $]3^{-1/4}, +\infty[$. Riducendo lo studio a $[0, +\infty[$, osserviamo che 0 è di massimo relativo per g, con $g(0) = 0$, mentre $3^{-1/4}$ è di minimo relativo e assoluto per g con $g(3^{-1/4}) = -2/(3\sqrt{3})$. Per $\rho > 3^{-1/4}$ è possibile considerare l'inversa g^{-1} di g. Essa è strettamente crescente da $-2/(3\sqrt{3})$ a $+\infty$. Si ha quindi $\rho = g^{-1}(-\sin 2\theta)$ sotto la condizione $-\sin 2\theta > -2/(3\sqrt{3})$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Il massimo di ρ è raggiunto per $-\sin(2\theta) = 1$, ovvero $\theta = 3\pi/4, 7\pi/4$. Quindi i punti di Γ dove ρ (e ρ^2, in quanto composizione di ρ con una funzione strettamente crescente su $[0, +\infty[$) raggiungono il loro massimo sono dati dall'intersezione di Γ con la bisettrice del $II - IV$ quadrante.

Altro modo: utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definiamo $L(x, y, \lambda) = h(x, y) + \lambda f(x, y)$ e consideriamo l'equazione $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$. I punti dove $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ vanno studiati a parte. Si ha allora:

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^4 - \left(x^2 + y^2\right)^2 + 2xy = 0, \\ \lambda \left(8x\left(x^2 + y^2\right)^3 - 4x\left(x^2 + y^2\right) + 2y\right) + 2x = 0, \\ \lambda \left(8y\left(x^2 + y^2\right)^3 - 4y\left(x^2 + y^2\right) + 2x\right) + 2y = 0. \end{cases}$$

Posto $y = -x$, si ha che le ultime due equazioni sono risolte, pertanto effettivamente vi sono estremali vincolati a Γ che giacciono sulla bisettrice del $II - IV$ quadrante. Si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$, quindi $(0,0)$ va studiato a parte: $h(0,0) = 0$, pertanto h raggiunge il suo minimo assoluto vincolato nell'origine. Con questo metodo risulta difficoltoso determinare se vi siano altri punti di Γ soddisfacenti a $\nabla f(x, y) = 0$ e diversi dall'origine oppure altri estremali.

Altro modo: utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrande in coordinate polari, osservando che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2$ e che il vincolo è $\rho^6 - \rho^2 + \sin(2\theta) = 0$ definiamo

$$\mathcal{L}(\rho, \theta, \mu) = \rho^2 + \mu(\rho^6 - \rho^2 + \sin(2\theta)),$$

e studiamo $\nabla\mathcal{L}(\rho, \theta, \mu) = 0$. L'origine va studiata a parte, così come i punti dove le derivate parziali di $\rho^6 - \rho^2 + \sin(2\theta)$ siano entrambe nulle. La derivata parziale rispetto a θ è nulla in $[0, 2\pi]$ solo per $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, mentre quelle in ρ per $\rho > 0$ si annullano solo in $3^{-1/4}$. Tuttavia i punti con $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ e $\rho = 3^{-1/4}$ non appartengono a Γ, infatti in essi si ha $\sin 2\theta = \pm 1$ ma $\rho^6 - \rho^2 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Quindi l'unico punto da studiare a parte è l'origine, dove $h(0,0) = 0$ ed è punto di minimo assoluto. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange diventa:

$$\begin{cases} 2\rho\left(-3\mu\rho^4 + \mu + 1\right) = 0, \\ -2\mu\cos(2\theta) = 0, \\ \rho^6 - \rho^2 + \sin(2\theta) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $\mu = 0$ oppure $\theta \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$. Se $\mu = 0$ si ha $\rho = 0$ dalla prima. Altrimenti, sostituendo nella terza, si ottiene $\rho^6 - \rho^2 = -1$ per $\theta = \pi/4, 5\pi/4$, e $\rho^6 - \rho^2 = 1$ per $\theta = 3\pi/4, 7\pi/4$. Quindi gli estremali si trovano sulle bisettrici. Osservato che il minimo assoluto di $\rho \mapsto \rho^6 - \rho^2$ su $\mathbb{R}$ è raggiunto in $\pm 3^{-1/4}$ ed è strettamente maggiore di -1, quindi l'equazione

$\rho^6 - \rho^2 = -1$ non ha soluzione, si conclude che gli estremali sono caratterizzati dall'essere gli unici punti di Γ con $\theta = 3\pi/4$ e $7\pi/4$, ovvero le intersezioni di Γ con la bisettrice del $II - IV$ quadrante.

Pur se non richiesto dal testo dell'esercizio, diamo alcuni suggerimenti per tracciare un grafico qualitativo di Γ. Con uno studio della funzione $p(\rho) = \rho^6 - \rho^2$ per $\rho \geq 0$, si ha $p(0) = 0$, $p(\cdot)$ è strettamente decrescente per $0 \leq \rho \leq 3^{1/4}$ e strettamente crescente per $\rho \geq 3^{1/4}$. Il minimo assoluto per $\rho \geq 0$ è raggiunto in $\rho = 3^{1/4}$ e vale $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Pertanto $p^{-1} : [-2/(3\sqrt{3}), +\infty[\to [3^{1/4}, +\infty[$ è strettamente monotona. Quindi l'equazione $\rho^6 - \rho^2 = -k$ non ammette soluzione se $k > \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ammette una soluzione per $k = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, ammette due soluzioni per $0 \leq k \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e una sola soluzione per $k < 0$. Pertanto si ha che per $\sin 2\theta < 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ esiste una sola intersezione della retta $y = \tan\theta\, x$ con Γ. Ciò avviene per $\theta \in [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi]$. In questi intervalli, il massimo assoluto di ρ è raggiunto per i θ dove $-\sin 2\theta$ raggiunge il massimo, vista la stretta crescenza di p^{-1} in $[0, +\infty[$. Quindi è raggiunto nell'intersezione con $y = -x$, ovvero $\theta = 3\pi/4, 7\pi/4$. Per $0 < \theta < \frac{1}{2}\arcsin(2/(3\sqrt{3}))$ ci sono due intersezioni con l'insieme diverse dall'origine, che confluiscono per $\theta^* = \frac{1}{2}\arcsin(2/(3\sqrt{3}))$, quindi la retta $y = mx$ con $0 < m < \tan\theta^*$ interseca l'insieme nel primo quadrante in tre punti di cui uno è l'origine. D'altra parte da $\rho^6 - \rho^2 = \sin 2\theta$ si ricava che se $\rho \to 0^+$ necessariamente θ tende ad uno tra $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, pertanto nell'origine confluiscono quattro rami di tangenti rispettivamente orizzontale ($\theta = 0, \pi$) e verticale ($\theta = \pi/2, 3\pi/2$).

Per determinare il valore di $\tan\theta^*$, consideriamo ora:

$$f(x, mx) = x^2(\left(m^2+1\right)^4 x^6 - \left(m^2+1\right)^2 x^2 + 2m) =: x^2 p(x, m).$$

Per $x \neq 0$, l'insieme è rappresentato da $p(x, m) = 0$. Andiamo a studiare i massimi delle funzioni $m = m(x)$ implicitamente definiti da tale equazione. Dobbiamo vedere i punti in cui $\partial_x p(x, m) = 0$, ovvero

$$0 = \partial_x[\left(m^2x^2 + x^2\right)^4 - \left(m^2x^2 + x^2\right)^2 + 2mx^2] = 2\left(m^2+1\right)^2 x \left(3\left(m^2+1\right)^2 x^4 - 1\right),$$

quindi $\bar{x} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3m^4+6m^2+3}}$. Sostituendo nell'equazione di Γ si ha

$$0 = f(\bar{x}, \bar{m}\bar{x}) = -\frac{2\left(\bar{m}^4 + 2\bar{m}^2 - 3\sqrt{3}\left(\bar{m}^2+1\right)\bar{m} + 1\right)}{9\left(\bar{m}^2+1\right)^2},$$

da cui

$$0 = \bar{m}^4 + 2\bar{m}^2 - 3\sqrt{3}\left(\bar{m}^2+1\right)\bar{m} + 1 = (\bar{m}^2+1)(\bar{m}^2+1-3\sqrt{3}\bar{m}),$$

ovvero $\bar{m}_{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} \pm \sqrt{23}\right)$. Pertanto $\tan\theta^* = m_-$, perché $0 < \theta^* < \pi/4$ e $m_- < 1 < m_+$. Riproducendo per simmetria rispetto all'origine e bisettrice, lo studio qualitativo è completo.

Svolgimento (Esercizio 110).

a. Poiché è un polinomio, la funzione g_α è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Calcoliamone il gradiente:

$$\nabla g_\alpha(x, y) = \left(2\alpha x + 6(2x+y)^2 + 4y, 2(\alpha-3)y + 3(2x+y)^2 + 4x\right).$$

I punti critici risolvono l'equazione $\nabla g_\alpha(x, y) = (0, 0)$, pertanto si ha il sistema:

$$\begin{cases} \alpha x + 3(2x+y)^2 + 2y = 0, \\ 2(\alpha-3)y + 3(2x+y)^2 + 4x = 0. \end{cases}$$

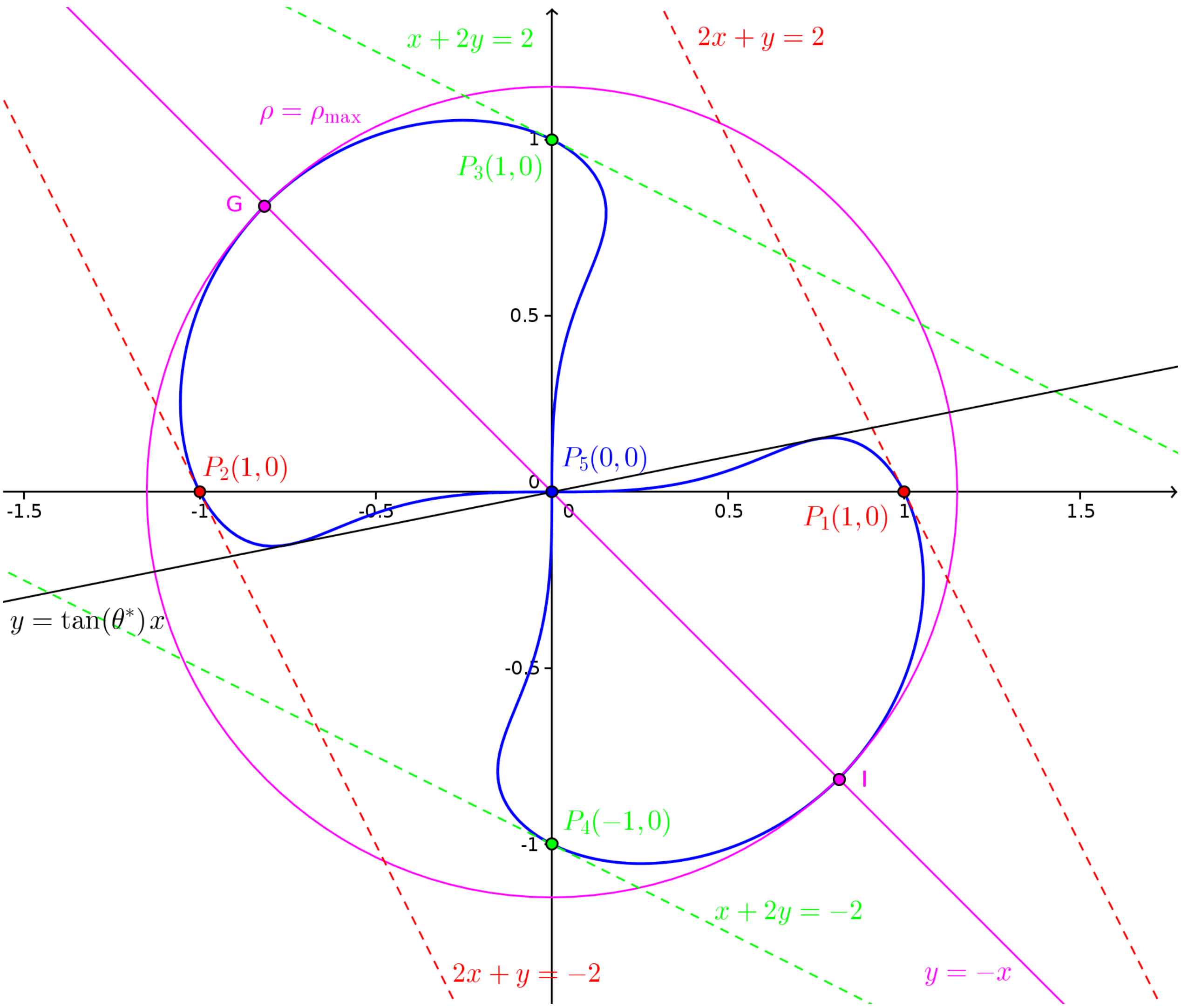


FIGURA 15. La curva $(x^2 + y^2)^4 + 2xy - (x^2 + y^2)^2 = 0$ e alcune curve significative.

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ha $2(\alpha-4)y+(4-\alpha)x = 0$. Supposto $\alpha \neq 4$, si ha

$$\begin{cases} y = x/2 \\ (1+\alpha)x + \frac{75}{4}x^2 = x\left(1+\alpha+\dfrac{75}{4}x\right) = 0, \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti critici $O := (0, 0)$ e $P_\alpha := \left(-\dfrac{4}{75}(1+\alpha), -\dfrac{2}{75}(1+\alpha)\right)$. Per $\alpha = 4$ entrambe le equazioni del sistema dei punti critici si riducono a $3(2x + y)^2 + 4x + 2y = 0$, ovvero $3(2x + y)^2 + 2(2x + y) = 0$ quindi $(2x + y)(3(2x + y) + 2) = 0$. Si ottengono due rette di punti critici: la retta $y = -2x$ e la retta $6x + 3y + 2 = 0$. L'origine appartiene alla prima di esse. Quindi anche per $\alpha = 4$ si ha che O è punto critico.

La matrice Hessiana di g_α è data da:

$$\operatorname{Hess} g_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 2a+24(2x+y) & 12(2x+y)+4 \\ 12(2x+y)+4 & 2(a-3)+6(2x+y) \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} g_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 4 \\ 4 & 2(a-3) \end{pmatrix}.$$

Il determinante di tale matrice è $\operatorname{Hess} g_\alpha(0,0) = 4\left(a^2-3a-4\right) = 4(a+1)(a-4)$. Tale determinante è pari al prodotto degli autovalori di tale matrice.

(a) Se il determinante è negativo, gli autovalori sono discordi e si ha una sella nell'origine. Ciò avviene per $-1 < a < 4$.

(b) Se $a > 4$ si ha che tutti i minori della matrice sono strettamente positivi, quindi entrambi gli autovalori sono positivi e l'origine è di minimo relativo.

(c) Se $a < -1$, allora il primo minore della diagonale principale è negativo e il secondo è positivo, quindi entrambi gli autovalori sono negativi e l'origine è di massimo relativo.

(d) Per $a = 4$ si ha $g_4(x,y) = 2+4x^2+4xy+y^2+(2x+y)^3 = 2+(2x+y)^2+(2x+y)^3$. Per (x,y) sufficientemente vicini all'origine, si ha che $(2x+y)^2 > (2x+y)^3$, pertanto $g_4(x,y) \geq g_4(0,0) = 2$ e l'origine è ancora un minimo relativo.

(e) Per $\alpha = -1$ si ha $g_{-1}(x,y) = 2-x^2+4xy-4y^2+(2x+y)^3 = 2-(x-2y)^2+(2x+y)^3$. In tal caso, se x_2 è sufficientemente vicino a 0 si ha $g_{-1}(x_2, x_2/2) = 2+(2x_2+x_2/2)^3 = 2+125y^3/8$. Tale espressione è maggiore di $g_{-1}(0,0) = 2$ se $x_2 > 0$ e minore di 2 se $x_2 < 0$, quindi O è di sella.

b. La funzione del punto b. è la simmetrica del punto a. rispetto alla bisettrice del I-III quadrante, pertanto per $\alpha \neq 4$ si ottengono i punti critici

$$O := (0,0), \qquad P_\alpha := \left(-\frac{2}{75}(1+\alpha), -\frac{4}{75}(1+\alpha)\right),$$

mentre per $\alpha = 4$ si ottengono due rette di punti critici: la retta $x = -2y$ e la retta $6y+3x+2 = 0$. L'origine appartiene alla prima di esse. Infine:

(a) per $-1 \leq a < 4$, si ha una sella nell'origine.

(b) Se $a \geq 4$ l'origine è di minimo relativo.

(c) Se $a < -1$, l'origine è di massimo relativo.

Svolgimento (Esercizio 111).

a. In coordinate polari si ha $\Omega := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [0,\pi/2], 0 \leq r \leq \sin\theta\}$, da cui, ricordando che $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$:

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho^4\sin^4\theta}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} \cos\theta\sin^4\theta\rho^4\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sin\theta} \cos\theta\sin^4\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^9\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\left[\frac{\sin^{10}\theta}{10}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{50}. \end{aligned}$$

b. Consideriamo la mappa $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x,y) = (x-y, x+y)$. Lo Jacobiano di tale mappa è

$$\operatorname{Jac}\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è 2. Poiché esso è diverso da zero, la trasformazione è invertibile, sia $\psi = \varphi^{-1}$. Poniamo $D = \varphi(\Omega)$. Si ha $D = [-\pi,\pi]\times[-1,1]$ dalla definizione di Ω e di φ, inoltre $\Omega = \psi(D)$ e

$$\operatorname{Jac}\psi(u,v) = [\operatorname{Jac}\varphi]^{-1}(\varphi(u,v))$$

da cui $\det\operatorname{Jac}\psi(u,v) = 1/2$, pertanto

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f\circ\psi(u,v)|\operatorname{Jac}\psi(u,v)|\,du\,dv.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\iint_{\Omega} \frac{(x-y)e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{ue^{-u^2}}{1+v^2}\,du\,dv = 0,$$

in quanto l'integrale in u è l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico.

Svolgimento (Esercizio 112). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = yz + 2yz^2 + 0 = 2yz^2 + yz.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & xyz \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y^2z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2 \end{pmatrix} = \left(-2y^2z, xy-2x, -xz\right).
\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), 0, 4\cos(2t))$ da cui la circuitazione:

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} ((2\sin(2t)+1)\cos(t), (2\sin(2t)+1)^2, \cos^2(t))\cdot(-\sin(t), 0, 4\cos(2t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos(t)(-\sin(t)+\cos(t)+3\cos(3t)))\;dt \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Jac}\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{4u^2 + (2v-2u)^2 + 1}\,du\,dv. \\
&= \sqrt{8u^2 - 8uv + 4v^2 + 1}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(1,2,1)=\varphi(u,v)$ solo se $u=0$, $v=1$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P)=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Pur se non richiesto, non è difficile vedere che il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{F},\Sigma)=\int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma &:= \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c}F_1\circ\varphi(u,v)&\\F_2\circ\varphi(u,v)&\operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\F_3\circ\varphi(u,v)&\end{array}\right)du\,dv\\
&=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix}v(u+v)\left(u^2+v^2+1\right)&1&1\\v^2\left(u^2+v^2+1\right)^2&2u&2v\\(u+v)^2&0&1\end{pmatrix}du\,dv\\
&=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}2uv\left(u^2+v^2+1\right)(u+v)-v^2\left(u^2+v^2+1\right)^2+(2v-2u)(u+v)^2\,du\,dv\\
&=-\frac{50816}{315}.\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G}=\operatorname{rot}\vec{F}=(G_1,G_2,G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{G},\Sigma)=\int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma &:= \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c}G_1\circ\varphi(u,v)&\\G_2\circ\varphi(u,v)&\operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\G_3\circ\varphi(u,v)&\end{array}\right)du\,dv\\
&=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix}-2v\left(u^2+v^2+1\right)^2&1&1\\(u+v)\left(u^2+v^2+1\right)-2(u+v)&2u&2v\\-v(u+v)&0&1\end{pmatrix}du\,dv\\
&=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}-4u^5v-8u^3v^3-8u^3v-u^3+u^2v-4uv^5-8uv^3-uv^2-4uv+u-3v^3+v\,du\,dv\\
&=0.\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1,1]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}\gamma_1(u)&:=\varphi(u,-2)=\left(u-2,u^2+5,-2\right),\ u\in[-1,1],\\
\gamma_2(v)&:=\varphi(1,v)=\left(v+1,v^2+2,v\right),\ v\in[-2,2],\\
\gamma_3(u)&:=\varphi(-u,2)=\left(2-u,u^2+5,2\right),\ u\in[-1,1],\\
\gamma_4(v)&:=\varphi(-1,-v)=\left(-v-1,v^2+2,-v\right),\ v\in[-2,2].\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}\dot\gamma_1(u) &:= (1, 2u, 0)\,,\ u \in]-1, 1[,\\ \dot\gamma_2(v) &:= (1, 2v, 1)\,,\ v \in]-2, 2[,\\ \dot\gamma_3(u) &:= (-1, 2u, 0)\,,\ u \in]-1, 1[,\\ \dot\gamma_4(v) &:= (-1, 2v, -1)\,,\ v \in]-2, 2[.\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\gamma_1 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_1(u)) \cdot \dot\gamma_1(u)\, du\\ &= \int_{-1}^{1} \left(-2(u-2)\left(u^2+5\right), 4\left(u^2+5\right)^2, (u-2)^2\right) \cdot (1, 2u, 0)\ du\\ &= \int_{-1}^{1} 2\left(u^2+5\right)\left(4u^3+19u+2\right)\ du = \frac{128}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\gamma_2 = \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_2(v)) \cdot \dot\gamma_2(v)\, dv\\ &= \int_{-2}^{2} \left(v(v+1)\left(v^2+2\right), v^2\left(v^2+2\right)^2, (v+1)^2\right) \cdot (1, 2v, 1)\ du\\ &= \int_{-2}^{2} 2v^7+8v^5+v^4+9v^3+3v^2+4v+1\, du = \frac{164}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\gamma_3 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_3(u)) \cdot \dot\gamma_3(u)\, du\\ &= \int_{-1}^{1} \left(-2(u-2)\left(u^2+5\right), 4\left(u^2+5\right)^2, (u-2)^2\right) \cdot (-1, 2u, 0)\ du\\ &= \int_{-1}^{1} 2\left(u^2+5\right)\left(4u^3+21u-2\right)\ du = -\frac{128}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec F \cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_4(v)) \cdot \dot\gamma_4(v)\, dv\\ &= \int_{-2}^{2} \left(v(v+1)\left(v^2+2\right), v^2\left(v^2+2\right)^2, (v+1)^2\right) \cdot (-1, 2v, -1)\ du\\ &= \int_{-2}^{2} 2v^7+8v^5-v^4+7v^3-3v^2-4v-1\, du = -\frac{164}{5}.\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 113). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{4X(x)T'(t) - 2T(t)X''(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{4T'(t)}{T(t)} - \frac{2X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{4T'(t)}{T(t)} = -\frac{2X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 4T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ -2X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$. Il polinomio caratteristico è $p(\mu) = -\lambda - 2\mu^2$, il cui discriminante è $\Delta_x(\lambda) = -8\lambda$.

Se $\Delta_x(\lambda) > 0$, le soluzioni sono date da:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} e^{\frac{1}{4}x\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} + c_{2,\lambda} e^{-\frac{1}{4}x\sqrt{\Delta_x(\lambda)}}.$$

Dalle condizioni al contorno, si ottiene $c_{1,\lambda} + c_{2,\lambda} = 0$ da $X(0) = 0$, quindi $c_{1,\lambda} = -c_{2,\lambda}$. Da $X(\pi) = 0$ si ha:

$$c_{1,\lambda} e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} + c_{2,\lambda} e^{-\frac{1}{4}\pi\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} = 0,$$

da cui $c_{1,\lambda} = c_{2,\lambda} = 0$ essendo $\Delta_x(\lambda) \neq 0$. Questo caso non è accettabile.

Se $\Delta_x(\lambda) = 0$, le soluzioni sono date da:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} + x c_{2,\lambda}.$$

Sostituendo le condizioni si ha $c_{1,\lambda} = 0$ da $X(0) = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene ancora $c_{2,\lambda} = 0$. Quindi anche questo caso non è accettabile.

Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ le soluzioni sono:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} \cos\left(\frac{1}{4}x\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) - c_{2,\lambda} \sin\left(\frac{1}{4}x\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right).$$

Sostituendo $X(0) = 0$ si ha $c_{1,\lambda} = 0$. Sostituendo $X(\pi) = 0$ si ha

$$c_{1,\lambda} \cos\left(\frac{1}{4}\pi\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) - c_{2,\lambda} \sin\left(\frac{1}{4}\pi\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) = 0.$$

Dovendosi avere $c_{2,\lambda} \neq 0$, e poiché $\Delta_x(\lambda) < 0$, necessariamente $-\dfrac{1}{4}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, quindi

$$\lambda_n = 2n^2,\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0.$$

Questo caso è accettabile.

Si ha $\Delta_x(\lambda) < 0$ se e solo se $\lambda > 0$. Si ottengono quindi le soluzioni relative a λ_n (il segno di n è assorbito nella costante moltiplicativa):

$$X_n(x) := c_n \sin(nx), \qquad c_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo i valori accettabili di λ_n nell'equazione per $T(t)$ si ottiene:

$$2n^2 T_n(t) + 4T_n'(t) = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $q(\mu) = 4\mu + 2n^2$.Tale polinomio si annulla per $\mu = -\frac{n^2}{2}$, quindi si hanno le soluzioni:

$$T_n(t) := d_n e^{-\frac{n^2 t}{2}},\ d_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Posto $b_n = c_n d_n$, si hanno le soluzioni elementari:

$$u_n(t,x) := T_n(t)X_n(x) = b_n e^{-\frac{n^2 t}{2}} \sin(nx),\ b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo di ottenere il dato iniziale con una sovrapposizione di soluzioni elementari:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x),$$

ovvero

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli seni di x^2. Ciò vuol dire prolungare per disparità tale funzione da $[0,\pi]$ a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{2\left(\pi^2(-1)^n n^2 - 2(-1)^n + 2\right)}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

La soluzione risulta quindi:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\left(\pi^2(-1)^n n^2 - 2(-1)^n + 2\right)e^{-\frac{n^2 t}{2}}\sin(nx)}{\pi n^3}.$$

Per $t > 0$ si ottiene che il termine generale della serie e le sue derivate rispetto a t e x si maggiorano con $p(n)e^{-n^2t/2}$, dove $p(n)$ è un polinomio opportuno. Essendo $t > 0$, per n sufficientemente grande si ha $p(n)e^{-n^2t/2} < 1/n^2$ termine generale di una serie convergente, quindi la serie delle derivate converge e pertanto u è soluzione classica del problema.

Svolgimento (Esercizio 114). Osserviamo che $f_\varepsilon(0,y) = 0$ e che $f_\varepsilon(x,y) = 0$ per ogni $x < 0$ e per ogni ε. Inoltre se $x > 0$, per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_x = 4x/\pi$ vale $x > \varepsilon\pi/4$, quindi $f_\varepsilon(x,y) = 0$ per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_x = 4x/\pi$, perciò il limite puntuale è nullo per ogni x:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x,y) = 0,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. In particolare:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x,y)\,dx = 0.$$

Si ha, posto $t = x/\varepsilon$, $\varepsilon\,dt = dx$:

$$\begin{aligned} F(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x,y)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\varepsilon\pi/4} f_\varepsilon(x,y)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\pi/4} \tan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cos\left(y-x\right)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\pi/4} \tan t\cos\left(y-\varepsilon t\right)\,dt \end{aligned}$$

L'intervallo di integrazione è compatto e la funzione integranda è limitata. Per il teorema della Convergenza Dominata:

$$\begin{aligned} F(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\pi/4} \tan t\cos\left(y-\varepsilon t\right)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \tan t\cos\left(y-\varepsilon t\right)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan t\cos y\,dt = \cos y[\log|\cos t|]_{t=0}^{t=\pi/4} = \frac{\log 2}{2}\cos y. \end{aligned}$$

In particolare non vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(x,y)\,dx = 0 \neq \frac{\log 2}{2}\cos y = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x,y)\,dx.$$

Svolgimento (Esercizio 115). Si veda la soluzione dell'Esercizio 22.

Svolgimento (Esercizio 116). Si ha che se $(x,y,z)\in V$ si deve avere $z\geq 0$ e $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2}$. In particolare $x^2+y^2\leq 1-x^2-y^2$ ovvero $x^2+y^2\leq 1/2$. Quindi:

$$V := \{(x,y,z):\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2\leq 1/2\}.$$

In coordinate cilindriche si ha $\varphi(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$. L'elemento di volume della trasformazione è $dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$
se poniamo

$$D := \{(\rho,\theta,z):\ 0\leq\rho\leq\sqrt{1/2},\ \theta\in[0,2\pi],\ \rho\leq z\leq\sqrt{1-\rho^2}\},$$

si ha che $V=\varphi(D)$. Quindi ($t=1-\rho^2$, $dt=-2\rho\,d\rho$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) :&= \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_D \rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1/2}}\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta\\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{1/2}}\left(\sqrt{1-\rho^2}-\rho\right)\rho\,d\rho = \pi\int_0^{\sqrt{1/2}} 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho - 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1/2}}\\
&= -\pi\int_1^{1/2}\sqrt{t}\,dt - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \frac{2}{3}\pi[t^{3/2}]_{1/2}^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 117). Si veda la soluzione dell'Esercizio 112.

Svolgimento (Esercizio 118). Si veda la soluzione dell'Esercizio 113.

Svolgimento (Esercizio 119). Poniamo $f(x,y)=x^4+2y^2+4y-2$. Osserviamo che $f(x,y)=f(-x,y)$, quindi l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Inoltre f è continua, quindi $\Gamma=f^{-1}(0)$ è chiuso. Si ha che se $(x,y)\in\Gamma$ con $|y|>4$ allora $4y>-y^2$ e quindi $0=f(x,y)>x^4+2y^2-y^2-2$. Ne segue che se $(x,y)\in\Gamma$ con $|y|>4$ si deve avere $x^4+y^2\leq 2$ da cui $y^2\leq 2$. Pertanto $|y|<4$. Ma dato che $x^4=2-y^2-4y$, questo implica che anche $|x|$ è limitato. Pertanto Γ è chiuso e limitato e quindi compatto. In coordinate polari si ha:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^4\cos^4(\theta)+2\rho^2\sin^2(\theta)+4\rho\sin(\theta)-2,$$

quindi l'insieme è rappresentato da:

$$\Gamma=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in\mathbb{R}^2:\ \rho^4\cos^4\theta+2\rho^2\sin^2\theta+4\rho\sin\theta-2=0\right\}.$$

Si ha $f(x,0)=x^4-2$ per cui le intersezioni di Γ con l'asse delle ascisse sono date da $P_1(-\sqrt[4]{2},0)$ e $P_2(\sqrt[4]{2},0)$. Si ha $f(0,y)=2y^2+4y-2$ per cui le intersezioni di Γ con l'asse delle ordinate sono date da $P_3(0,-1-\sqrt{2})$ e $P_4(0,-1+\sqrt{2})$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y)=\left(4x^3,4y+4\right).$$

Qualora $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$, la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data da $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$. Il gradiente di f è identicamente nullo in $(0,-1)\notin\Gamma$ perché $f(0,-1)=-4$. Nel nostro caso le tangenti sono:

$$\begin{aligned}
r_{P_1} &: y = 2^{3/4}\left(x + \sqrt[4]{2}\right),\\
r_{P_2} &: y = 2^{3/4}\left(-x + \sqrt[4]{2}\right),\\
r_{P_3} &: y = -\sqrt{2} - 1,\\
r_{P_4} &: y = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Nessuna di tali tangenti è verticale, quindi per il teorema di Dini Γ definisce una funzione $y = y(x)$ di classe C^1 in un intorno di tutti questi punti. La funzione h è continua e il vincolo è compatto, quindi h ammette massimi e minimi assoluti vincolati a Γ. Poiché $\nabla f \neq 0$ su Γ, applichiamo quindi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: sia $L(x, y, \lambda) = h(x, y) + \lambda f(x, y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$. Si ha:

$$\begin{cases} 4\lambda x^3 + 2x = 0,\\ \lambda(4y + 4) + 1 = 0,\\ x^4 + 2y^2 + 4y - 2 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x = 0$, cui corrispondono P_3 e P_4, oppure $2\lambda x^2 + 1 = 0$ e $x \neq 0$. Dalla seconda equazione si ricava $\lambda \neq 0$ e $y \neq -1$. Esplicitando λ dalle prine due equazioni, si ha $x^2 = 2y+2$. Sostituendo nella terza equazione si ottiene $3y^2+6y+1 = 0$. Risolvendo tale equazione si ha $y_\pm = \frac{1}{3}\left(-3 \pm \sqrt{6}\right)$ tuttavia $x^2 = 2y_- + 2 < 0$ è impossibile, quindi y_- non è accettabile. Si hanno quindi le soluzioni

$$Q_1 = \left(-\frac{2^{3/4}}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{3}\left(-3 + \sqrt{6}\right)\right), \; Q_2 = \left(\frac{2^{3/4}}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{3}\left(-3 + \sqrt{6}\right)\right).$$

Valutando h sulle soluzioni trovate si ottiene

$$h(P_3) = -1 - \sqrt{2} < h(P_4) = -1 + \sqrt{2} < h(Q_1) = h(Q_2) = \sqrt{6} - 1,$$

Quindi P_3 è di minimo assouto e Q_1, Q_2 sono di massimo assoluto per h vincolata a Γ.

Svolgimento (Esercizio 120). La superficie del paraboloide P è parametrizzata da $\varphi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$ con la condizione $z(x, y) > 0$, quindi $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\operatorname{Jac}\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x & -2y \end{pmatrix}.$$

L'elemento d'area della parametrizzazione, calcolato mediante la regola di Binet oppure prendendo il modulo del prodotto vettoriale delle colonne di tale Jacobiano è:

$$d\sigma = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy.$$

L'area cercata è quindi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(P) &= \iint_P d\sigma = \int_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4\rho^2 + 1}\, \rho\, d\rho\, d\theta\\
&= 2\pi \int_0^2 \sqrt{4\rho^2 + 1}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^2 \sqrt{4\rho^2 + 1}\, 8\rho\, d\rho = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4\rho^2 + 1)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=2}\\
&= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 121). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 0+0+0=0.\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & y^2+z^2\\ \vec{e}_2 & \partial_y & x^3+z^2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x+y^2\end{pmatrix} = \big(2y-2z, 2z-1, 3x^2-2y\big)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F}\neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot\gamma(t) = (\cos(t), 0, 1)$ da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} (t^2, t^2+\sin^3(t), \sin(t))\cdot(\cos(t),0,1)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} \big(t^2\cos(t)+\sin(t)\big)\,dt\\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v)\\ \nabla\varphi_2(u,v)\\ \nabla\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v))\\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1\\ -2u & 2v\\ 2u & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| = \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3\end{pmatrix}\right|\\
&= \sqrt{16u^2v^2+4u^2+(2u-2v)^2}\,du\,dv.\\
&= 2\sqrt{u^2\left(4v^2+2\right)-2uv+v^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(0,0,1)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=\pm(1,1)$. Il punto P è un punto di autointersezione della superficie. La matrice Jacobiana di φ in P scelti $(u,v)=(-1,-1)$ è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P scelti $(u,v)=(-1,-1)$ è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right).$$

La matrice Jacobiana di φ in P scelti $(u,v)=(1,1)$ è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P scelti $(u,v)=(1,1)$ è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma)&=\int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma:=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c}F_1\circ\varphi(u,v) & \\ F_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\ F_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right)du\,dv\\
&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix}u^4+\left(v^2-u^2\right)^2 & -1 & 1\\ u^4+(v-u)^3 & -2u & 2v\\ \left(v^2-u^2\right)^2-u+v & 2u & 0\end{pmatrix}du\,dv\\
&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}-8u^5v+4u^5-2u^4v-2u^4+8u^3v^3-4u^3v^2+6u^3v\,du\,dv+\\
&+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}4u^2v^3-6u^2v^2-2u^2-4uv^5+2uv^4+2uv^3+4uv-2v^5-2v^2\,du\,dv\\
&=-\frac{48}{5}.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G}=\operatorname{rot}\vec{F}=(G_1,G_2,G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma)&=\int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma:=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c}G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right)du\,dv\\
&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix}2\left(v^2-u^2\right)-2u^2 & -1 & 1\\ 2u^2-1 & -2u & 2v\\ 3(v-u)^2-2\left(v^2-u^2\right) & 2u & 0\end{pmatrix}du\,dv\\
&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}16u^3v+14u^3-22u^2v-8uv^3+14uv^2-2u-2v^3\,du\,dv\\
&=0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=\int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u,-1) = \left(-u-1, 1-u^2, u^2\right),\ u \in [-1,1],\\
\gamma_2(v) &:= \varphi(1,v) = \left(v-1, v^2-1, 1\right),\ v \in [-1,1],\\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u,1) = \left(u+1, 1-u^2, u^2\right),\ u \in [-1,1],\\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-1,-v) = \left(1-v, v^2-1, 1\right),\ v \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

Le derivate sono date da:

$$
\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (-1,-2u,2u),\ u \in]-1,1[,\\
\dot\gamma_2(v) &:= (1,2v,0),\ v \in]-1,1[,\\
\dot\gamma_3(u) &:= (1,-2u,2u),\ u \in]-1,1[,\\
\dot\gamma_4(v) &:= (-1,2v,0),\ v \in]-1,1[.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\gamma_1 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_1(u)) \cdot \dot\gamma_1(u)\,du\\
&= \int_{-1}^{1} \left(2u^4-2u^2+1, u^4-(u+1)^3, u\left(u^3-2u-1\right)\right) \cdot (-1,-2u,2u)\ du\\
&= \int_{-1}^{1} 2u^3+6u^2+2u-1\,du\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\gamma_2 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_2(v)) \cdot \dot\gamma_2(v)\,dv\\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left(v^2-1\right)^2+1, (v-1)^3+1, v\left(v^3-2v+1\right)\right) \cdot (1,2v,0)\ du\\
&= \int_{-1}^{1} 3v^4-6v^3+4v^2+2\,du\\
&= \frac{118}{15}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\gamma_3 = \int_{-1}^{1} \vec F(\gamma_3(u)) \cdot \dot\gamma_3(u)\,du\\
&= \int_{-1}^{1} \left(2u^4-2u^2+1, u^4+(u+1)^3, u^4-2u^2+u+2\right) \cdot (1,-2u,2u)\ du\\
&= \int_{-1}^{1} -10u^3-6u^2+2u+1\,du\\
&= -2.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\gamma_4 = \int_{-1}^{1} \vec{F}(\gamma_4(v)) \cdot \dot{\gamma}_4(v)\, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left(v^2-1\right)^2 + 1, (1-v)^3 + 1, \left(v^2-1\right)^2 - v + 1 \right) \cdot (-1, 2v, 0)\ du \\
&= \int_{-1}^{1} -3v^4 + 6v^3 - 4v^2 + 4v - 2\, du \\
&= -\frac{118}{15}.
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 122). L'equazione totale associata all'equazione data è:

$$\omega(x,y) := p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = y\left(y^3+3\right)\, dx + \left(x\left(y^3-6\right) - 2\right)\, dy = 0.$$

La forma ω non è esatta, infatti:

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 3(3+y^3) \neq 0.$$

Si ha tuttavia che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)} = -\frac{3}{y},$$

che è una funzione della sola y, pertanto l'equazione ammette fattore integrante:

$$h(y) := e^{-\int 3/y\, dy} = e^{-3\log|y|} = 1/|y|^3, \qquad\qquad y \neq 0.$$

Studiamo il caso $y > 0$: la forma $h(y)\omega(x,y)$ è chiusa nel semipiano $\{y > 0\}$, che è convesso, quindi è ivi esatta. Si ha:

$$\begin{aligned}
h(y)\omega(x,y) &= \frac{1}{y^2}\left(y^3+3\right)\, dx + \frac{1}{y^3}\left(x\left(y^3-6\right)-2\right)\, dy \\
&= \left(y + \frac{3}{y^2}\right)\, dx - \frac{2}{y^3}\, dy + x\left(1 - \frac{6}{y^3}\right)\, dy.
\end{aligned}$$

Per determinare un potenziale, scegliamo un punto nel dominio, ad esempio $P = (0,1)$, e integriamo tale forma da P al generico punto (x_0, y_0) del dominio integrando prima sul segmento γ_1 congiungente P a $(x_0, 1)$ e poi su γ_2, quello congiungente $(x_0, 1)$ a (x_0, y_0). Si ha:

$$\begin{aligned}
V(x_0,y_0) &= \int_{\gamma_1} h\omega + \int_{\gamma_2} h\omega = \int_0^{x_0} 4\, dx + \int_1^{y_0} \frac{2}{y^3}\, dy - x_0\left(1 - \frac{6}{y^3}\right)\, dy \\
&= 4x_0 + \left[\frac{1}{y^2}\right]_{y=1}^{y=y_0} + x_0\left[y + \frac{3}{y^2}\right]_{y=1}^{y=y_0} \\
&= 4x_0 + \frac{1}{y_0^2} - 1 + x_0 y_0 + \frac{3x_0}{y_0^2} - x_0 - 3x_0 = \frac{1}{y_0^2} + x_0 y_0 + \frac{3x_0}{y_0^2} - 1
\end{aligned}$$

Trascurando la costante, un potenziale per $y > 0$ è dato da $V(x,y) = \frac{1}{y^2} + xy + \frac{3x}{y^2}$. Si può provare per calcolo diretto che tale potenziale va bene anche per $y < 0$, quindi la soluzione dell'equazione totale può essere scritta come $V(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Riscrivendo, si ha $1 + xy^3 + 3x = cy^2$, $c \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. La soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$ è quella per cui $c = 1$, quindi è data da $1 + xy^3 + 3x = y^2$, $y \neq 0$. Esplicitando x in funzione di y si ottiene $x(y) = \frac{y^2-1}{y^3+3}$. Si ha che $x(0) = -1/3$, pertanto per $x = -1/3$, l'insieme $V(x,y) = 1$ taglia l'asse delle ascisse e pertanto la soluzione cessa di esistere.

Quindi il dominio massimale della soluzione $y(\cdot)$ è inferiormente limitato. Proviamo che è anche superiormente limitato. Se così non fosse, si avrebbe una successione di punti $x_i \to +\infty$ tali che $x(y(x_i)) \to +\infty$. Tuttavia si che $x(y) \to +\infty$ se e solo se $y \to -\sqrt[3]{3}$, ma una soluzione che parta da una condizione iniziale positiva non può diventare negativa perché dovrebbe attraversare l'asse delle ascisse, cessando così di esistere.

Allora il dominio massimale della soluzione è anche superiormente limitato, pertanto la soluzione non può ammettere asintoti.

Nel suo intervallo di esistenza, la soluzione deve soddisfare

$$\partial_y V(x, y(x)) \neq 0,$$

pertanto il segno di $\partial_y V(x, y(x))$ è costante. D'altra parte la soluzione è positiva, pertanto anche $\partial_x V(x, y) = \dfrac{1}{y^2}\left(y^3 + 3\right)$ è positivo. Ma allora il segno di

$$\dot{y}(x) = -\frac{\partial_x V(x, y(x))}{\partial_y V(x, y(x))}$$

è costante, quindi la soluzione è strettamente monotona nel suo intervallo massimale di esistenza.

Svolgimento (Esercizio 123). Poniamo $f(x, y) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + y^4$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\sin^4(\theta) + \rho^4\cos^4(\theta) + 2\rho^3\cos^3(\theta) - 2\rho^2\cos^2(\theta),$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^4\sin^4(\theta) + \rho^4\cos^4(\theta) + 2\rho^3\cos^3(\theta) - 2\rho^2\cos^2(\theta) = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Per la compattezza, osserviamo che se $(x, y) \in \Gamma$ vale

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 \leq f(x, y) = 0.$$

Si ha quindi $x^2(x^2 + 2x - 2) \leq 0$, da cui $-1 - \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} - 1$. Questo implica che le ascisse dei punti dell'insieme sono limitate. Ma allora $x^2(x^2 + 2x - 2)$ è limitata, quindi in particolare esiste $C > 0$ tale che $0 = f(x, y) = x^2(x^2 + 2x - 2) + y^4 \geq -C + y^4$ e quindi anche le ordinate devono essere limitate. Pertanto Γ è limitato. Essendo f continua, $\Gamma = f^{-1}(0)$ è anche chiuso, quindi compatto.

Per determinare le intersezioni con l'asse delle ascisse, studiamo $f(x, 0) = 0$, ovvero l'equazione $x^4 + 2x^3 - 2x^2 = 0$, le cui soluzioni sono 0, $-1 - \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - 1$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = \left(-1 - \sqrt{3}, 0\right)$, $P_3 = \left(\sqrt{3} - 1, 0\right)$. Per determinare le intersezioni con l'asse delle ordinate, studiamo $f(0, y) = 0$, ovvero l'equazione $y^4 = 0$, la cui soluzione è $y = 0$. Le intersezioni con l'asse delle ordinate si riducono a $P_1 = (0, 0)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(4x^3 + 6x^2 - 4x, 4y^3\right).$$

Nel nostro caso, nei punti P_2, P_3 il gradiente di f è diverso da $(0, 0)$, quindi le rette tangenti in tali punti sono:

$$r_{P_2} : x = -1 - \sqrt{3},$$
$$r_{P_3} : x = \sqrt{3} - 1.$$

Si ha $\partial_x f(P_2) = -4\left(-1 - \sqrt{3}\right) + 6\left(-1 - \sqrt{3}\right)^2 + 4\left(-1 - \sqrt{3}\right)^3 \neq 0$, $\partial_x f(P_3) = -4\left(\sqrt{3} - 1\right) + 6\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + 4\left(\sqrt{3} - 1\right)^3 \neq 0$ quindi le tangenti in tali punti non sono orizzontali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$.

Osserviamo che $f(x,y) = h(x,y) + 2x^3 - 2x^2$ e $h(x,y) \geq 0$. Pertanto se $(x,y) \in \Gamma$ si ottiene $g(x) := h_\Gamma(x,y) = 2x^2 - 2x^3$ con la limitazione $-1-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}-1$.

Tale funzione della sola x ha derivata $g'(x) = 6x^2 - 4x$, nulla per $x = 0$ e $x = 2/3$. Per $x = 0$ si ottiene $P_1(0,0)$ e $h(P_1) = 0$, quindi questo punto è di minimo assoluto vincolato.

Per $x = 2/3$ si ha l'equazione $f(2/3, y) = 0$ ovvero $y^4 = 8/81$, da cui $y = \pm 2^{3/4}/3$. Sui punti $(2/3, \pm 2^{3/4}/3)$, la funzione h vale $8/27$.

Agli estremi, si ha $f(-1-\sqrt{3}, y) = 0$ se e solo se $y = 0$ e $f(\sqrt{3}-1, y) = 0$ se e solo se $y = 0$. Quindi $h(-1-\sqrt{3}, 0) = (1+\sqrt{3})^4 > 1 > 8/27$ e $h(-1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^4 < 1$. Pertanto $(-1-\sqrt{3}, 0)$ è di massimo assoluto vincolato.

Svolgimento (Esercizio 124). In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$, si ottiene

$$\Omega := \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^2 \leq 2\rho(\cos\theta - \sin\theta),\, \theta \in [0, 2\pi],\, \rho \geq 0\}.$$

Essendo $\rho \geq 0$ si ha $0 \leq \rho \leq 2(\cos\theta - \sin\theta)$. Pertanto si deve avere $\cos\theta \geq \sin\theta$, quindi

$$\theta \in J := [0, \pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi].$$

Perciò

$$\Omega = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho \leq 2(\cos\theta - \sin\theta),\, \theta \in J,\, \rho \geq 0\}.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}
I &:= \int_J \int_0^{2(\cos\theta - \sin\theta)} \frac{\rho^2}{\rho(\cos\theta - \sin\theta)}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_J \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}\left(\int_0^{2(\cos\theta - \sin\theta)} \rho^2\,d\rho\right) d\theta \\
&= \int_J \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2(\cos\theta - \sin\theta)} d\theta = \frac{8}{3}\int_J (\cos\theta - \sin\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_J (1 - 2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}\int_J (1 - \sin 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\int_J \sin 2\theta\,d\theta = \frac{8}{3} + \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta\,d\theta + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \sin 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\int_J \sin 2\theta\,d\theta = \frac{8}{3} + \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta\,d\theta + \int_{-\pi/4}^{0} \sin 2\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 125). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 0 + 0 + 1 = 1. \\
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & y^2z^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x - y + z \end{pmatrix} = \left(-1, 2y^2z - 1, 1 - 2yz^2\right).
\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.

Si ha $\dot\gamma(t) = (\cos(t) - t\sin(t), 0, \cos(t))$ da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (0, t\cos(t), \sin(t)+t\cos(t))\cdot(\cos(t)-t\sin(t), 0, \cos(t))\ dt\\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(t)(\sin(t)+t\cos(t)))\ dt\\ &= \pi^2.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v)\\ \nabla\varphi_2(u,v)\\ \nabla\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v))\\ &= \begin{pmatrix} 2u+v & u\\ v & u-2v\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{(2u^2-4uv-2v^2)^2+(-u-v)^2+(3v-u)^2}\,du\,dv.\\ &= \left(\sqrt{4\left(-u^2+2uv+v^2\right)^2+(u-3v)^2+(u+v)^2}\right)\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,-1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) = \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma &:= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} F_1\circ\varphi(u,v) \\ F_2\circ\varphi(u,v) \\ F_3\circ\varphi(u,v)\end{matrix} & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} (u-v)^2v^2(u+v)^2 & 2u+v & u \\ u(u+v) & v & u-2v \\ (u+v)u+u-(u-v)v+v & 1 & 1 \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \big(-u^5v^2+3u^4v^3+2u^4+2u^3v^4-4u^3v+ \\
&\quad +u^3-6u^2v^5-4u^2v-uv^6-4uv^3-7uv^2+3v^7-2v^4-2v^3\big)\,du\,dv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 126). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $3y'(t) = x''(t) - x'(t) - 2t$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$3(2x(t)+2y(t)) = x''(t) - x'(t) - 2t.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - x'(t) - 6x(t) - 6y(t) - 2t = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $3y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$-2\left(-t^2 + x'(t) - x(t)\right) + x''(t) - x'(t) - 6x(t) - 2t = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$2t^2 + x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) - 2t = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \mathrm{Traccia}(A)\,x'(t) + \mathrm{Det}(A)\,x(t) = 2t - 2t^2.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 3\mu - 4$, di discriminante $\delta = 25$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = -1$ e $\mu_2 = 4$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{-t}$ e $x_{o,2} := e^{4t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & 4e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & 4e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t-2t^2 \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}e^{t}\left(2t-2t^2\right) \\ \frac{1}{5}e^{-4t}\left(2t-2t^2\right) \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
c(t) &= \frac{2}{5}e^{t}\left(t^2-3t+3\right), \\
d(t) &= -\frac{1}{80}e^{-4t}\left(-8t^2+4t+1\right).
\end{aligned}$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$x(t) = ce^{-t} + de^{4t} + \frac{1}{16}\left(8t^2 - 20t + 19\right), \; c, d \in \mathbb{R},$$
$$\dot{x}(t) = c\left(-e^{-t}\right) + 4de^{4t} + \frac{1}{16}(16t - 20), \; c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(-t^2 + x'(t) - x(t)\right) = -\frac{2}{3}ce^{-t} + de^{4t} + \frac{1}{16}\left(-8t^2 + 12t - 13\right), \; c, d \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) &= ce^{-t} + de^{4t} + \frac{1}{16}\left(8t^2 - 20t + 19\right), \\ \\ y(t) &= -\frac{2}{3}ce^{-t} + de^{4t} + \frac{1}{16}\left(-8t^2 + 12t - 13\right), \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 127). Poniamo $f(x, y) = x^4 + 2x^2 + y^4 - 6$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\sin^4(\theta) + \rho^4\cos^4(\theta) + 2\rho^2\cos^2(\theta) - 6,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \; \rho^4\sin^4(\theta) + \rho^4\cos^4(\theta) + 2\rho^2\cos^2(\theta) - 6 = 0 \; \rho \geq 0, \; \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

L'insieme è limitato: infatti da $f(x, y) = 0$ si ricava che $y^4 - 6 \leq f(x, y) = 0$, quindi $|y|$ è limitato. Ma allora $x^4 + 2x^2$ deve essere limitato, e perciò anche $|x|$ è limitato. L'insieme anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x, 0) = 0$, ovvero $x^4 + 2x^2 - 6 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = \left(-\sqrt{\sqrt{7} - 1}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt{\sqrt{7} - 1}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0, y) = 0$, ovvero $y^4 - 6 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = \left(0, -\sqrt[4]{6}\right)$, $Q_2 = \left(0, \sqrt[4]{6}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(4x^3 + 4x, 4y^3\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\nabla f(P_1) = \left(-4\sqrt{7\left(\sqrt{7} - 1\right)}, 0\right)$$
$$\nabla f(P_2) = \left(4\sqrt{7\left(\sqrt{7} - 1\right)}, 0\right)$$
$$\nabla f(Q_1) = \left(0, -4 \cdot 6^{3/4}\right)$$
$$\nabla f(Q_2) = \left(0, 4 \cdot 6^{3/4}\right)$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned} r_{P_1} &: x = -\sqrt{\sqrt{7}-1} \\ r_{P_2} &: x = \sqrt{\sqrt{7}-1} \\ r_{Q_1} &: y = -\sqrt[4]{6} \\ r_{Q_2} &: y = \sqrt[4]{6}. \end{aligned}$$

In Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. In P_1, P_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti dell'insieme dove $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ andranno studiati a parte. Nel nostro caso il gradiente non si annulla mai in punti dell'insieme. Poniamo $L(x, y, \lambda) := h(x, y) + \lambda f(x, y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$ nelle incognite x e y. Si ha:

$$\begin{cases} \lambda\left(4x^3 + 4x\right) = 0 \\ 4\lambda y^3 + 2y = 0 \\ x^4 + 2x^2 + y^4 - 6 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $\left(0, -\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(0, \sqrt[4]{6}\right)$, $\left(-\sqrt{\sqrt{7}-1}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\sqrt{7}-1}, 0\right)$ Calcolando i valori assunti da h in questi punti ed eventualmente in quelli precedentemente esclusi, si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $\left(0, -\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(0, \sqrt[4]{6}\right)$ e tale valore massimo è $\sqrt{6}$. Analogamente, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $\left(-\sqrt{\sqrt{7}-1}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\sqrt{7}-1}, 0\right)$, e tale valore minimo è 0.

Svolgimento (Esercizio 128). Poniamo $(u, v) = \varphi(x, y) = (x + 6y, 2x - y)$ e $\psi = \varphi^{-1}$. Si ha che $\Omega = \psi([-4, 4] \times [-\pi^2, \pi^2])$. Per il Teorema della Funzione Inversa, si ha che, localmente:

$$\operatorname{Jac}\psi(u, v) = \operatorname{Jac}\varphi^{-1}(u, v) = [\operatorname{Jac}\varphi]^{-1} \circ \psi(u, v)$$

Nel nostro caso:

$$\operatorname{Jac}\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Jac}\varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix},$$

da cui

$$I = \int_{-4}^{4} \int_{-\pi^2}^{\pi^2} \left(\frac{u}{3}\right)^3 \arctan^2 v |\det \operatorname{Jac}\psi(u, v)| \, du \, dv = \frac{1}{13} \int_{-4}^{4} \int_{-\pi^2}^{\pi^2} \left(\frac{u}{3}\right)^3 \arctan^2 v \, du \, dv = 0,$$

sfruttando le simmetrie del dominio.

Svolgimento (Esercizio 129). Poniamo

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)), \\ \varphi(u, v) &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)). \end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =&\partial_x F_1(x,y,z)+\partial_y F_2(x,y,z)+\partial_z F_3(x,y,z)=0,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & yz\\ \vec{e}_2 & \partial_y & 1\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2+y^2\end{pmatrix}\\
=&(2y, y-2x, -z)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F}\neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t)=(\cos(t)-t\sin(t), 3\cos(t), 2)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =&\int_0^{2\pi}\vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
=&\int_0^{2\pi}\left(6t\sin(t),1,t^2\cos^2(t)+9\sin^2(t)\right)\cdot(\cos(t)-t\sin(t),3\cos(t),2)\;dt\\
=&\int_0^{2\pi}\left(2\left(t^2\cos^2(t)+9\sin^2(t)\right)+3\cos(t)+6t\sin(t)(\cos(t)-t\sin(t))\right)\;dt\\
=&19\pi-\frac{16\pi^3}{3}.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2v\\ 2u & -2v\\ 3u^2 & 1\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =&\|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=&\left|\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|\;du\,dv\\
=&\sqrt{(-6u^2v-1)^2+(6u^2v+2u)^2+(4uv-2v)^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma=\sqrt{\det^2 B_1+\det^2 B_2+\det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(1,1,1)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=(1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right).$$

Il flusso di $\vec{G}=\mathrm{rot}\,\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_{\Sigma} \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} 2\left(u^2-v^2\right) & 1 & -2v \\ u^2-2\left(u-v^2\right)-v^2 & 2u & -2v \\ -u^3-v & 3u^2 & 1 \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(2u^4v+14u^3v+4u^3-18u^2v^3-u^2-8uv^2+2u+v^2\right) dv\,du \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Svolgimento (Esercizio 130). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{X(x)T'(t)+4T(t)X''(x)+2T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{4X''(x)+2X(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{4X''(x)+2X(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} T'(t)+\lambda T(t) = 0, \\ 4X''(x)-(\lambda-2)X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$4\mu^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$

Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{N}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = 16(\lambda - 2)$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda < 2$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = \frac{1}{8}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = \frac{\sqrt{2-\lambda}}{2}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = 2 - 4n^2$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda = 2 - 4n^2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha pertanto:

$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:

$$\left(2 - 4n^2\right) T(t) + T_n'(t) = 0,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:

$$T_n(t) = d_n e^{\left(4n^2-2\right)t}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t) X_n(x) = b_n e^{\left(4n^2-2\right)t} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$

Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:

$$u(0,x) = 2x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione

$$f(x) = 2x^2,$$

nell'intervallo $[0, \pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi, \pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2\,\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[2x^2\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4x\frac{-\cos(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[2\pi^2\frac{-\cos(n\pi)}{n}\right] + \frac{4}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx\right) \\
&= -\frac{4\pi(-1)^n}{n} + \frac{8}{\pi n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{4\pi(-1)^n}{n} + \frac{8}{\pi n}\left(\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= -\frac{4\pi(-1)^n}{n} + \frac{8}{\pi n}\left(-\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) = -\frac{4\pi(-1)^n}{n} + \frac{8}{\pi n^2}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{4\pi(-1)^n}{n} + \frac{8((-1)^n-1)}{\pi n^3} = \frac{-4\pi^2n^2(-1)^n + 8((-1)^n-1)}{\pi n^3} \\
&= -\frac{4(\pi^2 n^2(-1)^n - 2(-1)^n + 2)}{\pi n^3}
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\left(\pi^2(-1)^n n^2 - 2(-1)^n + 2\right)e^{(4n^2-2)t}\sin(nx)}{\pi n^3}.$$

Osserviamo che fissato comunque $t>0$, questa serie non converge in $L^2(]0,\pi[)$ quindi non può essere una soluzione del problema.

Svolgimento (Esercizio 131). Poniamo $f(x,y) = \left(x^2+y^2+2y\right)^2 - x^2 - y^2$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$\begin{aligned}
f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho^2((\rho + 2\sin\theta)^2 - 1), \\
&= \rho^2(\rho + 2\sin\theta - 1)(\rho + 2\sin\theta + 1)
\end{aligned}$$

da cui:

$$\Gamma := \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho + 2\sin\theta = 1\} \cup \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho + 2\sin\theta = -1\},$$

e questa scrittura comprende anche l'origine. L'insieme è limitato, ed è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0) = 0$, ovvero $x^4 - x^2 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (1,0)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y) = 0$, ovvero $\left(y^2+2y\right)^2 - y^2 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = (0,-3)$, $Q_2 = (0,-1)$, $Q_3 = (0,0)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(4x\left(x^2+y^2+2y\right) - 2x, 2(2y+2)\left(x^2+y^2+2y\right) - 2y\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla f(P_1) &= (-2,4)\\
\nabla f(P_2) &= (0,0)\\
\nabla f(P_3) &= (2,4)\\
\nabla f(Q_1) &= (0,-18)\\
\nabla f(Q_2) &= (0,2)\\
\nabla f(Q_3) &= (0,0)
\end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned}
r_{P_1} :& y = \frac{x+1}{2}\\
r_{P_3} :& y = \frac{1-x}{2}\\
r_{Q_1} :& y = -3\\
r_{Q_2} :& y = -1.
\end{aligned}$$

In P_1, P_3, Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x,y) = 0$. In P_1, P_3, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati di h su Γ. In coordinate polari, $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2$. Il minimo assoluto vincolato è raggiunto nell'origine e $h(0,0) = 0$. Determiniamo il massimo di ρ sul ramo corrispondente a $\rho + 2\sin\theta = 1$. Il massimo su questo ramo è raggiunto per $\theta = 3/2\pi$ e vale 3. Il massimo sul ramo corrispondente a $\rho + 2\sin\theta = -1$ si ha sempre per $\theta = 3/2\pi$ ma vale 1. Quindi il massimo assoluto è raggiunto in $(0,-3)$ e vale 3.

Svolgimento (Esercizio 132). In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$, si ha che

$$\Omega := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) :\ 0 \le \rho \le 1,\ \theta \in [0,\pi/2],\ \frac{\sqrt{3}}{3} < \tan\theta < \sqrt{3}\right\},$$

da cui $\theta \in]\pi/6, \pi/3[$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_0^1 \frac{2\tan(\theta)\rho\,d\rho\,d\theta}{\cos^2(\rho^2)} = \int_0^1 \frac{2\rho\,d\rho}{\cos^2(\rho^2)} \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan(\theta)\,d\theta\\
&= -[\tan(\rho^2)]_{\rho=0}^{\rho=1} \cdot [\log(\cos\theta)]_{\theta=\pi/6}^{\theta=\pi/3} = \frac{1}{2}\log 3 \tan 1.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 133). Poniamo

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,,\\
\varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,.
\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) =&\partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 2xz,\\
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) =&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2z\\ \vec{e}_2 & \partial_y & z^2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-y\end{pmatrix}\\
=&\big(-2z-1, x^2-2x, 0\big).
\end{aligned}
$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
=&\int_0^{2\pi} \big(0,0,4\cos^2(t)-3\sin(t)\big)\cdot(-2\sin(t),3\cos(t),0)\;dt\\
=&\int_0^{2\pi} 0\,dt\\
=&0.
\end{aligned}
$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$
\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 4u^3 & 4v^3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.
$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$
\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=&\left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right| du\,dv\\
=&\sqrt{(-4u^3-8v^3)^2+(4v^3-8u^3)^2+25}\,du\,dv.
\end{aligned}
$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$
d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.
$$

Si ha che $P = (0,0,0) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$
\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}.
$$

La normale unitaria in P è data da:

$$
\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = (0,1,0).
$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G}, \Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac} \varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array} \right) dv\, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} -2(2u-v)-1 & 1 & 2 \\ (u+2v)^2 - 2(u+2v) & 4u^3 & 4v^3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} dv\, du \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \big(16u^4 - 8u^3 v + 4u^3 + 5u^2 + 32uv^3 + 20uv - 10u - 16v^4 + 8v^3 + 20v^2 - 20v\big)\, dv\, du \\
&= \frac{100}{3}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento

è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{cases}
\gamma_1(u) = \varphi(u,-1) = \big(u-2, u^4+1, 2u+1\big)\,,\ u \in [-1,1] \\
\gamma_2(v) = \varphi(1,v) = \big(2v+1, v^4+1, 2-v\big)\,,\ v \in [-1,1] \\
\gamma_3(u) = \varphi(-u,1) = \big(2-u, u^4+1, -2u-1\big)\,,\ u \in [-1,1] \\
\gamma_4(v) = \varphi(-1,-u) = \big(-2u-1, u^4+1, u-2\big)\,,\ v \in [-1,1]\,,
\end{cases}$$

le cui derivate sono:

$$\begin{cases}
\dot{\gamma}_1(u) = \big(1, 4u^3, 2\big)\,,\ u \in [-1,1] \\
\dot{\gamma}_2(v) = \big(2, 4v^3, -1\big)\,,\ v \in [-1,1] \\
\dot{\gamma}_3(u) = \big(-1, 4u^3, -2\big)\,,\ u \in [-1,1] \\
\dot{\gamma}_4(v) = \big(-2, 4v^3, 1\big)\,,\ v \in [-1,1]\,,
\end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 :&= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_{-1}^{1} \big((u-2)^2(2u+1), (2u+1)^2, -u^4 + (u-2)^2 - 1\big) \cdot \big(1, 4u^3, 2\big)\, du \\
&= \int_{-1}^{1} \big(2\left(-u^4 + (u-2)^2 - 1\right) + 4(2u+1)^2 u^3 + (u-2)^2(2u+1)\big)\, du \\
&= \frac{334}{15},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \left((2-v)(2v+1)^2, (2-v)^2, -v^4 + (2v+1)^2 - 1\right) \cdot \left(2, 4v^3, -1\right)\, dv \\
=& \int_{-1}^{1} \left(v^4 + 4(2-v)^2 v^3 + 2(2-v)(2v+1)^2 - (2v+1)^2 + 1\right)\, dv \\
=& \frac{14}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \left((-2u-1)(2-u)^2, (-2u-1)^2, -u^4 + (2-u)^2 - 1\right) \cdot \left(-1, 4u^3, -2\right)\, du \\
=& \int_{-1}^{1} \left(-2\left(-u^4 + (2-u)^2 - 1\right) + 4(-2u-1)^2 u^3 - (-2u-1)(2-u)^2\right)\, du \\
=& -\frac{14}{5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \left((-2v-1)^2(v-2), (v-2)^2, -v^4 + (-2v-1)^2 - 1\right) \cdot \left(-2, 4v^3, 1\right)\, dv \\
=& \int_{-1}^{1} \left(-v^4 + 4(v-2)^2 v^3 + (-2v-1)^2 - 2(-2v-1)^2(v-2) - 1\right)\, dv \\
=& \frac{46}{5},
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{100}{3},$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 134). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := y(5xy+3)\, dx - 3\left(x - y^3\right)\, dy =: p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 10xy + 6,$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y) = 0$. Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)} = -\frac{2}{y} =: f(y),$$

è una funzione della sola variabile y, pertanto un fattore integrante è dato da

$$\lambda(x,y) := e^{\int f(y)\, dy} = \frac{1}{y^2}$$

Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P = (P_x, P_y) = (0,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0, y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x, P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0, y)$ da P_y a y_0:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda\omega &= \int_{\gamma_1} \lambda\omega + \int_{\gamma_2} \lambda\omega \\ &= \int_0^{x_0} (5x+3)\ dx + \int_1^{y_0} -\frac{3\left(x_0 - y^3\right)}{y^2}\,dy \\ &= \frac{6x_0}{y_0} + 5x_0^2 + 3y_0^2 - 3\end{aligned}$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y) = 5x^2 + \frac{6x}{y} + 3y^2,$$

e le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y) = c$. La soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$ corrisponde a $c = 3$.

Svolgimento (Esercizio 135). Poniamo $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^3 - xy$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \left(\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta\right)^3 - \rho^2\sin\theta\cos\theta = \rho^2\left(\rho^4 - \frac{\sin 2\theta}{2}\right),$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho^4 = \frac{1}{2}\sin 2\theta,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0,\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]\right\},$$

e questa scrittura comprende l'origine. L'insieme è ovviamente limitato, ed è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Inoltre è simmetrico rispetto all'origine. Per studiare le intersezioni con la bisettrice $y = x$, risolviamo l'equazione $f(x,x) = 0$, ovvero $8x^6 - x^2 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2^{-3/4}, 2^{-3/4})$, $P_3 = -P_2$. Analogamente, per studiare le intersezioni con la bisettrice $y = -x$, risolviamo l'equazione $f(x,-x) = 0$, ovvero $8x^6 + x^2 = 0$. Si ottiene il punto $P_1 = (0,0)$. Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(6x\left(x^2+y^2\right)^2 - y, 6y\left(x^2+y^2\right)^2 - x\right).$$

Nel nostro caso si ha: $\nabla f(P_1) = (0,0)$, $\nabla f(P_2) = \nabla f(P_3) = (2^{1/4}, 2^{1/4})$. Pertanto la retta tangente in P_2 è $r_{P_2} : x+y = 2^{1/4}$ e quella in P_3 è la sua simmetrica rispetto all'origine, ovvero $r_{P_3} : x+y = -2^{1/4}$.

Poiché il vincolo ammette la parametrizzazione $\rho^4 = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$, il minimo di $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2$ è raggiunto nell'origine e vale 0. Il massimo è raggiunto per $\sin(2\theta) = 1$, ovvero per i punti P_2 e P_3, e vale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Svolgimento (Esercizio 136). In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$ e

$$\Omega := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ \theta \in [0,\pi/4]\right\}.$$

Pertanto, posto $s=\rho^2$, $ds = 2\rho\, d\rho$, $v=\tan\theta$, $dv = \dfrac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 \cos\rho^2 \frac{\sin(\tan\theta)}{\cos^2(\theta)}\, 2\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^1\int_0^2 s^2\cos s \sin v\, ds\, dv\\
&= (1-\cos(1))\int_0^2 s^2\cos s\, ds = (1-\cos(1))\left([s^2\sin s]_0^2 - 2\int_0^2 s\sin s\, ds\right)\\
&= (1-\cos(1))\left(4\sin 2 + 2[s\cos s]_0^2 - 2\int_0^2 \cos s\, ds\right)\\
&= (1-\cos(1))\,(2\sin 2 + 4\cos 2)\,.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 137). Poniamo

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,,\\
\varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,.
\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 1,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x+y+z\\ \vec{e}_2 & \partial_y & x^2+z\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-y\end{pmatrix}\\
=& (-2, 1-2x, 2x-1)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-2\sin(t), \cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt\\
=& \int_0^{2\pi} \big(\sin(t) + 2\cos(t) + 1, 4\cos^2(t) + 1, 4\cos^2(t) - \sin(t)\big)\cdot(-2\sin(t), \cos(t), 0)\ dt\\
=& \int_0^{2\pi} \big(\cos(t)\left(4\cos^2(t)+1\right) - 2\sin(t)(\sin(t) + 2\cos(t) + 1)\big)\ dt\\
=& -2\pi.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2u & 0\\ 0 & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\; du\,dv\\
=&\left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right| du\,dv\\
=&\sqrt{16u^2v^2+4u^2+4v^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1+\det^2 B_2+\det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(1,-1,-1)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=(1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=(0,0,1)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma)=&\int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma\\
=&\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv\\
=&\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\begin{pmatrix} -u^2+u+v^2+v-1 & 1 & 1\\ (u+v)^2+v^2-1 & -2u & 0\\ u^2+(u+v)^2 & 0 & 2v\end{pmatrix} dv\,du\\
=&\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(4u^3v+4u^3-2u^2v-4uv^3-6uv^2+4uv-4v^3+2v\right)\,dv\,du\\
=&0.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 138). Poniamo:

$$z(t):=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix},\qquad A:=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix},\qquad B(t):=\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}.$$

Il sistema si scrive nella forma $\dot{z}(t)=Az(t)+B(t)$.

Dal sistema di partenza, aggiungendo la derivata della prima equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} x''(t)= & 4x'(t)+2y'(t)+1\\ y'(t)= & x(t)+3y(t)\\ 2y(t)= & x'(t)-4x(t)-t.\end{cases}$$

da cui l'equazione:

$$x''(t)-7x'(t)+10x(t)=1-3t,$$

con le condizioni iniziali $x(0)=1$ e, sotituendo nella prima equazione del sistema di partenza, $x'(0)=8$.

L'equazione non è omogenea, l'omogenea associata è

$$x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 0.$$

L'equazione caratteristica è:

$$\mu^2 - 7\mu + 10 = 0,$$

le cui radici sono $\mu_1 = 2$ di molteplicità $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = 5$ di molteplicità $\nu_2 = 1$. Una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea è quindi:

$$\mathscr{B} := \left\{e^{2t}, e^{5t}\right\},$$

da cui la soluzione generale dell'omogenea:

$$x_o(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t},$$

al variare di $c_i \in \mathbb{R}$. Costruiamo la matrice Wronskiana ponendo nella prima riga gli elementi della base e nelle successive righe le corrispondenti derivate fino all'ordine 1:

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{5t} \\ 2e^{2t} & 5e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Indicheremo con $W_i(t)$ la i-esima riga di tale matrice. Si ha ovviamente $\dot{W}_i = W_{i+1}$ e, ricordando che tutte le componenti di W_1 soddisfano l'omogenea,

$$10W_1(t) - 7W_2(t) + W_3(t) = (0,0).$$

Per trovare una soluzione particolare applichiamo il metodo della variazione delle costanti, ovvero cerchiamo soluzioni della forma

$$x_p(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{5t} =: c(t) \cdot W_1(t).$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea e ricordando la precedente relazione, si ottiene

$$\begin{cases} c_1'(t) = & \frac{1}{3}e^{-2t}(3t-1) \\ c_2'(t) = & \frac{1}{3}e^{-5t}(1-3t), \end{cases}$$

da cui, integrando, si ottengono i coefficienti

$$\begin{cases} c_1(t) = & \frac{1}{3}e^{-2t}\left(-\frac{3t}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ c_2(t) = & \frac{1}{3}e^{-5t}\left(\frac{3t}{5} - \frac{2}{25}\right). \end{cases}$$

Pertanto si ottiene la soluzione particolare:

$$x_p(t) = \frac{1}{100}(-30t - 11).$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea si ottiene sommando la soluzione particolare trovata alla soluzione generale dell'omogenea associata:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} - \frac{3t}{10} - \frac{11}{100},$$

al variare di $c_i \in \mathbb{R}$. Imponiamo ora che la soluzione generale dell'equazione non omogenea soddisfi le condizioni richieste per $t = 0$. Si deve avere

$$\begin{cases} x(0) & = c_1 + c_2 - \dfrac{11}{100} = 1 \\[2ex] x'(0) & = 2c_1 + 5c_2 - \dfrac{3}{10} = 8. \end{cases}$$

Pertanto:

$$\begin{cases} c_1 = & -\dfrac{11}{12}, \\ \\ c_2 = & \dfrac{152}{75}. \end{cases}$$

In definitiva la soluzione cercata è:

$$x(t) = \frac{1}{300}\left(-90t - 275e^{2t} + 608e^{5t} - 33\right).$$

A questo punto ricaviamo dal sistema di partenza

$$\begin{aligned} y(t) =& \frac{1}{2}\left(x'(t) - 4x(t) - t\right) \\ =& \frac{1}{300}\left(30t + 275e^{2t} + 304e^{5t} + 21\right). \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 139). Effettuiamo maggiorazioni opportune sui termini generali delle due serie, ricordando che per n sufficientemente grande si ha $\tan(1/n) < 2$.

$$\left|\frac{\cos(n\pi) + \tan(1/n)}{n^2}\cos nx + \frac{2^{n-2}\cos(n\pi)}{9^{5n-1}}\sin nx\right| \leq \frac{3}{n^2} + \left(\frac{2}{9^5}\right)^n \cdot \frac{9}{4}$$

$$\left|\frac{n\log n}{n^5 + 12n^2 + 1}\cos nx - \frac{n - 4n^2}{6n^4 - 2n}\sin nx\right| \leq \frac{n^2}{n^5} + \frac{1 + 4n}{6n^3 - 2} \leq \frac{1}{n^3} + \frac{1 + 4n}{6n^3 - 2}$$

I termini generali di entrambe le serie sono così maggiorati da termini generali di serie convergenti, pertanto le due serie convergono totalmente, quindi uniformemente, puntualmente e in L^2. Inoltre, poiché le somme parziali sono funzioni continue, le somme delle due serie sono funzioni continue. Le serie possono essere integrate termine a termine, e l'integrale su $[0, 2\pi]$ di tutti i termini in $\sin nx$ o $\cos nx$ si annulla. Pertanto rimane solo:

$$\int_0^{2\pi} 6\,dx = 12\pi, \text{ per la prima,} \qquad \int_0^{2\pi} \pi\,dx = 2\pi^2, \text{ per la seconda.}$$

Svolgimento (Esercizio 140). Poniamo $f(x, y) = x^6 - 2x^2y^4 + y^8$. In coordinate polari piane $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^6\left(\rho^2\sin^8(\theta) + \cos^6(\theta) - 2\sin^4(\theta)\cos^2(\theta)\right).$$

Si ha che $f(0, y) = y^8$ e $f(x, 0) = x^6$, pertanto l'insieme interseca gli assi solo nell'origine. Inoltre, si ha $f(\pm x, \pm y) = f(x, y)$, pertanto l'insieme è simmetrico rispetto agli assi e all'origine. Limitiamo quindi lo studio al primo quadrante.

Ma allora possiamo scrivere (questa scrittura comprende anche l'origine):

$$\Gamma = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi],\ \rho^2 = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^4(\theta)}\left(2 - \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}\right),\ \rho \geq 0\right\}.$$

Dalla medesima espressione si ricava che $\tan^4\theta \geq \dfrac{1}{2}$, pertanto l'insieme esiste nel primo quadrante solo per $\theta \in [\arctan(2^{-1/4}), \pi/2]$. Ma allora la funzione

$$\rho = g(\theta) := \sqrt{\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^4(\theta)}\left(2 - \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}\right)}$$

è continua sul compatto $[\arctan(2^{-1/4}), \pi/2]$, quindi ammette massimo e minimo assoluto. Quindi ρ è limitata e l'insieme risulta essere chiuso e limitato, quindi compatto.

Si ha $f(x,\pm x) = x^8 - x^6$, che si annulla per $x=0$ e $x=\pm 1$. Si ottiene pertanto $P_5(0,0)$, $P_1(1,1)$ e, per simmetria, $P_2(-1,1)$, $P_3(-1,-1)$, $P_4(1,-1)$. Osservato che $\nabla f(x,y) = \big(6x^5 - 4xy^4, 8y^7 - 8x^2y^3\big)$, si ottiene $\nabla f(1,1) = (2,0)$, pertanto la tangente è verticale in questo punto ed è $x=1$ Per il teorema di Dini, poiché $\partial_x f(1,1) \neq 0$, è possibile esplicitare localmente x in funzione di y ottenendo $x = \psi_1(y)$ in un intorno di P_1 con $\psi_1 \in C^1$. Per simmetria, in tutti gli altri punti è possibile esplicitare $x = \psi_i(y)$ con $\psi_i \in C^1$ in un intorno di P_i, $i = 2,3,4$. Le tangenti sono $x = 1$ in P_1 e P_4, e $x=-1$ in P_2 e P_3.

Poiché Γ è compatto e $h(\cdot)$ è continua, essa ammette sicuramente massimi e minimi assoluti vincolati. Il minimo assoluto vincolato di h è assunto nell'origine e $h(0,0) = 0$. Per determinare il massimo vincolato di $h(\cdot)$, osserviamo che in coordinate polari questo equivale a massimizzare la funzione $\rho^2\cos^2\theta$ vincolata a γ, ovvero massimizzare la funzione

$$\tilde{h}(\theta) = \cos^2(\theta) g^2(\theta) = \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}\left(2 - \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}\right).$$

Limitiamo lo studio al primo quadrante. Poniamo $s = \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}$. Tale funzione è strettamente monotona decrescente nell'intervallo $[\arctan 2^{-1/4}, \pi/2]$. In questo modo si deve massimizzare la funzione $s(2-s)$ in $[0,2]$. Agli estremi questa funzione è nulla, nell'interno è positiva e, derivando, si ottiene l'unico massimo per $s=1$ e il valore del massimo è 1. Il valore massimo di x^2 in Γ è quindi raggiunto nel primo quadrante per $x = 1$. Poiché $f(1,y) = y^8 - 2y^4 + 1 = (y^4-1)^2 = (y^2+1)^2(y+1)^2(y-1)^2$, si ha che l'unica soluzione nel primo quadrante è $y = 1$. Per simmetria, si ottiene che il massimo vincolato è raggiunto in P_i, $i = 1,\dots,4$.

Seppure non richiesto, non è difficile tracciare un grafico qualitativo dell'insieme. Si ha $x^2 = s(2-s)$ dove $s = \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}$. D'altra parte, si ottiene:

$$y^2 = \rho^2 \sin^2\theta = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}\left(2 - \frac{\cos^4(\theta)}{\sin^4(\theta)}\right) = \sqrt{s}(2-s).$$

Restringiamoci al primo quadrante, ovvero a $\theta \in [\arctan(2^{-1/4}), \pi/2]$, ovvero $s \in [0,2]$. In questo caso x è strettamente crescente se e solo se x^2 lo è, e analogamente per la y. Come funzione di θ, si ha che $s(\cdot)$ è stettamente decrescente. Per $s = 0$, cui corrisponde $\theta = \pi/2$, si ha l'origine, poi la x è crescente e ha un massimo assoluto per $s = 1$ che corrisponde a $\theta = \pi/4$, e poi decresce fino a $s = 2$, cui corrisponde $\theta = \arctan(2^{-1/4})$, e dove si ritrova l'origine. Il punto di massimo della x si ricava sostituendo il valore $s = 1$ nelle espressioni di x^2 e y^2 e prendendone la radice positiva. Si ottiene $(1,1)$.

Per quanto riguarda la y, essa vale 0 per $s = 0,2$ (già trattati) e assume l'unico massimo assoluto nel punto corrispondente a $s = 2/3$, ovvero $\theta = \arctan\left(\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right)$, che è l'unico punto per cui la derivata di $\sqrt{s}(2-s)$, ovvero $\frac{2-s}{2\sqrt{s}} - \sqrt{s}$, si annulla in $[0,2]$. Tale punto, sostituendo $s = 2/3$ nelle espressioni di x^2 e y^2 e estraendo la radica positiva, corrisponde a $Q_1 = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{6}\right)$. Pertanto la y cresce dall'origine fino a tale punto e poi decresce tornando all'origine, si forma così un cappio. Le tangenti al cappio sono la retta verticale $x = 0$ e la retta $y = 2^{1/4}x$ (ovvero i limiti di esistenza di θ). Per simmetria si ricostruisce l'intero grafico. L'insieme è inscritto nel rettangolo $[-1,1] \times \left[-\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{6}, \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{6}\right]$.

Altro metodo: Cerchiamo le intersezioni dell'insieme con le rette $y = mx$. Grazie alle simmetrie, ci limitiamo al primo quadrante, quindi $m \geq 0$. Studiamo pertanto $f(x,mx) = 0$, quindi $x^6(1 - 2m^4 + m^8x^2) = 0$ L'insieme interseca gli assi solo nell'origine, pertanto per $m = 0$ e per $m \to +\infty$ otteniamo l'origine. Studiamo $m > 0$. Le intersezioni diverse dall'origine sono date da $1 - 2m^4 + m^8x^2 = 0$.

Poiché stiamo studiando il primo quadrante, prendiamo solo la radice positiva ovvero:

$$\begin{cases} x^2 = x^2(m) = \dfrac{2m^4 - 1}{m^8} \\ \\ y^2 = y^2(m) = m^2 x^2(m) = \dfrac{2m^4 - 1}{m^6}. \end{cases}$$

Dovendo essere $x, y > 0$, si ottiene che per $0 \leq m \leq \sqrt[4]{1/2}$ non vi sono intersezioni con rette $y = mx$ diverse dall'origine nel primo quadrante. Derivando, si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dm} x^2(m) = \dfrac{8 - 8m^4}{m^9} \\ \\ \dfrac{d}{dm} y^2(m) = \dfrac{6 - 4m^4}{m^7}. \end{cases}$$

Si ha quindi che la derivata di $x^2(m)$ si annulla in $m > 0$ per $m^* = 1$ e quella di $y^2(m) = 0$ si annulla per $m' = \sqrt[4]{3/2}$. Poiché $x(\sqrt[4]{2}) = 0$, $x(m) \geq 0$ per $m \geq \sqrt[4]{2}$ e $x(m) \to 0$ per $m \to \infty$, si ottine che m^* è punto di massimo per $x^2(m)$ e quindi anche per $x(m)$, perché $x(m) \geq 0$, e il massimo vale $x^* = 1$, cui corrisponde $y^* = m^* x^* = 1$. Pertanto il punto $(1, 1)$ è il punto dell'insieme con ascissa maggiore. Analogamente, m' è punto di massimo per $y(m)$ e il massimo vale $y' = \sqrt{\dfrac{4\sqrt{6}}{9}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{6} > y^*$, cui corrisponde $x' = \dfrac{y(m')}{m'} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} < x^*$. Pertanto nel primo quadrante vi sono due archi congiungenti l'origine a $P_1 = (1, 1)$: uno è strettamente crescente, l'altro cresce fino a raggiungere il massimo nel punto $Q_1 = (x', y')$ e poi decresce fino a confluire in P_1. Le tangenti al cappio nell'origine è l'asse y e la retta $y = \sqrt[4]{2} \cdot x$. Si ottiene quindi in particolare che l'insieme è limitato. Inoltre in P_1 la tangente è verticale, perché la x raggiunge il suo massimo: quindi la tangente in P_1 è $x = 1$ e l'insieme definisce in un intorno di questo punto una funzione $x = \varphi(y)$. Per simmetria si ricostruisce il resto del grafico: anche in P_i, $i = 2, 3, 4$ la tangente è verticale e vale $x = \pm 1$ a seconda che l'ascissa sia positiva o negativa. In tutti i casi rimane implicitamente definita localmente una funzione $x = \varphi(y)$ di classe C^1.

La seconda versione del compito era assolutamente analoga scambiando x con y nel testo e nella soluzione.

Svolgimento (Esercizio 141).

a. Si ha:

$$\begin{aligned} \nabla g_\alpha(x, y) &= \left(-2\alpha^2 x + 2\alpha x - 4\alpha y^2 + 2\alpha^2 y, 2\alpha^2 x - 8\alpha xy + 16\alpha y^3 - 2\alpha^2 y\right) \\ \nabla g_\alpha(0, 0) &= 0 \\ \operatorname{Hess} g_\alpha(x, y) &= \begin{pmatrix} 2\alpha - 2\alpha^2 & 2\alpha^2 - 8y\alpha \\ 2\alpha^2 - 8y\alpha & 48\alpha y^2 - 2\alpha^2 - 8x\alpha \end{pmatrix}, \\ \nabla g_\alpha(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2\alpha - 2\alpha^2 & 2\alpha^2 \\ 2\alpha^2 & -2\alpha^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il determinante di tale matrice è $-4\alpha^3$. Tale determinante è strettamente negativo per $\alpha > 0$. Per questi valori si ha una sella nell'origine. Applichiamo ora il metodo dei minori principali, osservando che il termine di posto $1, 1$ della matrice è positivo se $0 < \alpha < 1$. Questo implica che per $\alpha < 0$, il primo minore è negativo e il secondo è positivo, quindi l'origine è un massimo. Studiamo ora il caso limite. Se $\alpha = 0$ si ha $g_0(x, y) = 0$ e la funzione è costante, pertanto l'origine è un minimo assoluto e un massimo assoluto.

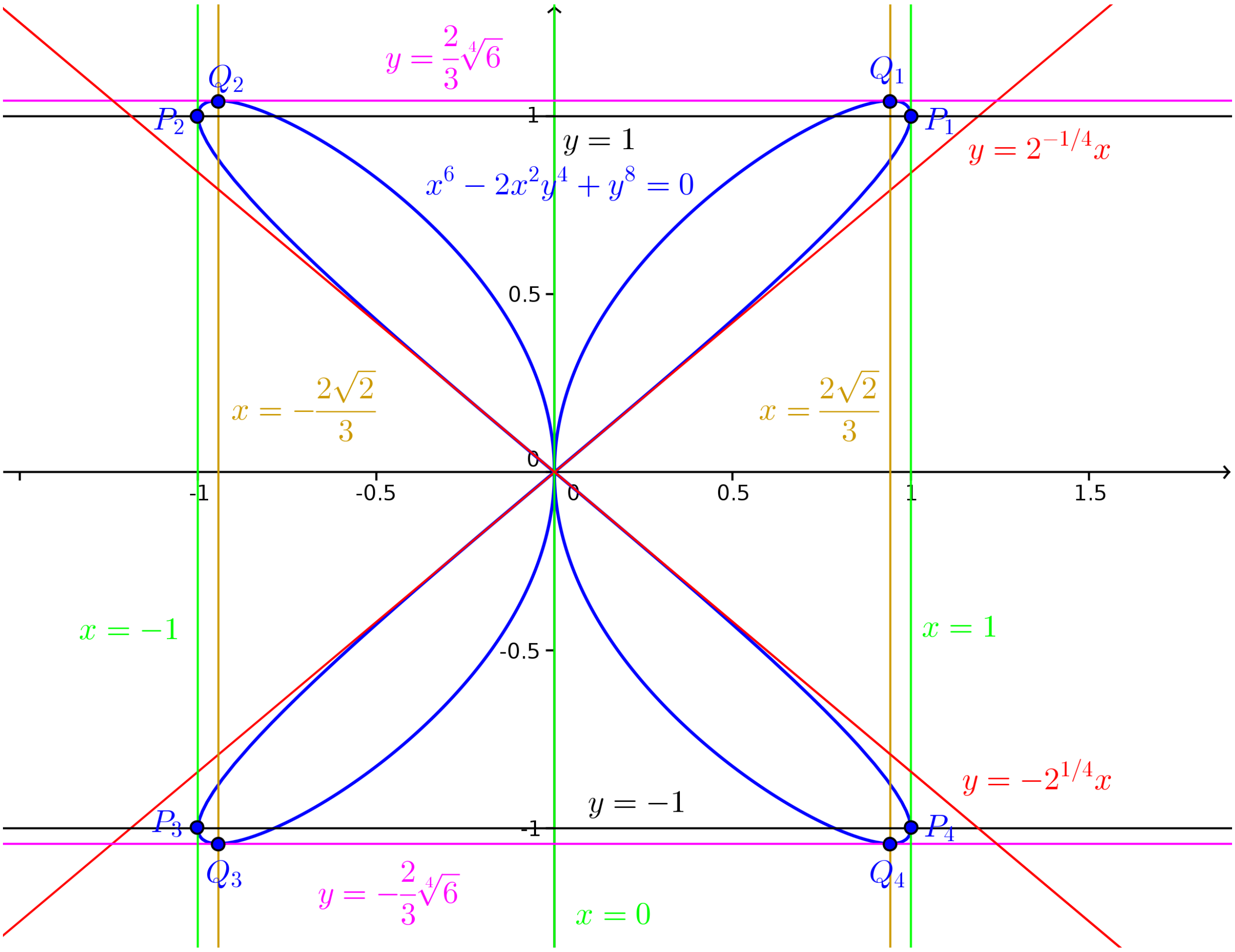


FIGURA 16. La curva $x^6 - 2x^2y^4 + y^8 = 0$ e alcuni punti e rette significativi.

b. Si ha:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2+2y)^2 - 4y^2 - y^2 - 10x^2 - 5 = (x^2+2y)^2 - 5y^2 - 10x^2 - 5 \\ \nabla f(x,y) &= \big(4x^3 + 8xy - 20x, 4x^2 - 2y\big) \\ \operatorname{Hess} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 12x^2 + 8y - 20 & 8x \\ 8x & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I punti critici soddisfano $\nabla f(x,y) = (0,0)$, da cui $4x^3 + 16x^3 - 20x = 0$. Pertanto si ottiene $(0,0)$ e $(\pm 1, 2)$. Inoltre:

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Si ottiene che $(0,0)$ è un massimo locale, perché gli autovalori sono entrambi negativi. Gli altri punti sono di sella perché il determinante dell'Hessiana è strettamente negativo, quindi gli autovalori hanno segno discorde.

Svolgimento (Esercizio 142).

a. Le disuguaglianze che definiscono D porgono $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$ e $y \geq 0$, quindi completando i quadrati si ottiene $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$, quindi D è la semicirconferenza di raggio 1 centrata nel punto $(1,0)$ e giacente nel primo quadrante. In coordinate polari, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$. I vincoli porgono $\rho\sin\theta \geq 0$ da cui $\sin\theta \geq 0$ e $\rho \leq 2\cos\theta$. Essendo $\rho \geq 0$ questo implica $\cos\theta \geq 0$. Pertanto si ottiene $\sin\theta \geq 0$ e $\cos\theta \geq 0$, perciò $\theta \in [0, \pi/2]$. In definitiva:

$$D = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \theta \in [0,\pi/2],\, 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta\},$$

da cui

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\,d\theta = 2.$$

b. Consideriamo il cambiamento di coordinate $(u,v) = \varphi(x,y) = (x+y, x-y)$. Lo Jacobiano di tale trasformazione è

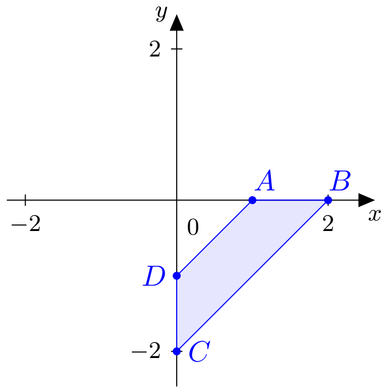
$$\mathrm{Jac}\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ |\det \mathrm{Jac}\varphi(x,y)| = 2.$$

Per il teorema della funzione inversa, si ha

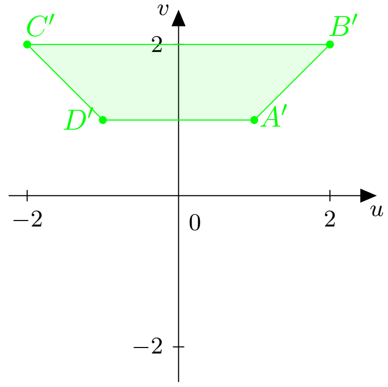
$$\left|\det \mathrm{Jac}\varphi^{-1}(u,v)\right|_{(u,v)=\varphi(x,y)} = |\det \mathrm{Jac}\varphi(x,y)|^{-1}_{(x,y)=\psi(u,v)} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, $dx\,dy = \dfrac{1}{2}du\,dv$. La trasformazione lineare ϕ ha come inversa $\psi(u,v) = \dfrac{1}{2}(u+v, u-v)$. Esse mandano rette in rette, pertanto si ha $E = \varphi^{-1}(E')$ oppure $E = \psi(E')$ dove $E' = \varphi(E)$ è il trapezio di vertici $(1,1)$, $(2,2)$, $(-1,1)$, $(-2,2)$, ovvero i trasformati dei vertici di E tramite φ. Si ha quindi, integrando lungo rette parallele all'asse u:

$$J = \frac{1}{2}\iint_{E'} e^{u/v}\,du\,dv = \int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\,dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}).$$



Il dominio $E = \psi(E')$.



Il dominio $E' = \varphi(E)$ (spazio dei parametri).

Svolgimento (Esercizio 143). Poniamo

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,,$$
$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,.$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 2x-1,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2+y\\ \vec{e}_2 & \partial_y & z-2y\\ \vec{e}_3 & \partial_z & z\end{pmatrix}\\
=& (-1,0,-1)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma t)\cdot\gamma' t\,dt\\
=& \int_0^{2\pi} \left(\sin t + \cos^2 t, t - 2\sin t, t\right)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\ dt\\
=& \int_0^{2\pi} \left(t - \sin t\left(\sin t + \cos^2 t\right) + (t - 2\sin t)\cos t\right)\ dt\\
=& \pi(2\pi - 1).
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(v^3+1\right)\sin(u) & 3v^2\cos(u)\\ \left(v^3+1\right)\cos(u) & 3v^2\sin(u)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\ du\,dv\\
=& \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|\ du\,dv\\
=& (v^3+1)\sqrt{9v^4+1}\,du\,dv,
\end{aligned}$$

ricordando che $v^3+1 \geq 0$. Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,0,0) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = (1,0,0)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} \left(v^3+1\right)\sin(u)+\left(v^3+1\right)^2\cos^2(u) & -\left(v^3+1\right)\sin(u) & 3v^2\cos(u) \\ v-2\left(v^3+1\right)\sin(u) & \left(v^3+1\right)\cos(u) & 3v^2\sin(u) \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \left(v^9\cos^3 u - 5v^6\sin^2 u + 3v^6\cos^3 u - 3v^6\cos^2 u + v^6\sin u\cos u + v^4\sin u - 7v^3\sin^2 u\right) dv\,du+ \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \left(3v^3\cos^3 u - 3v^3\cos^2 u + 2v^3\sin u\cos u + v\sin u - 2\sin^2 u + \cos^3 u + \sin u\cos u\right) dv\,du \\
&= -\frac{44\pi}{7}.
\end{aligned}
$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} -1 & -\left(v^3+1\right)\sin(u) & 3v^2\cos(u) \\ 0 & \left(v^3+1\right)\cos(u) & 3v^2\sin(u) \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} \left(3v^5\sin^2(u) + 3v^5\cos^2(u) - v^3\cos(u) + 3v^2\sin^2(u) + 3v^2\cos^2(u) - \cos(u)\right) dv\,du \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$
\begin{cases}
\gamma_1(u) = \varphi(u,-1) = (0,0,-1)\,,\ u\in[-\pi,\pi] \\
\gamma_2(v) = \varphi(\pi,v) = \left(-v^3-1,0,v\right)\,,\ v\in[-1,1] \\
\gamma_3(u) = \varphi(-u,1) = (2\cos(u),-2\sin(u),1)\,,\ u\in[-\pi,\pi] \\
\gamma_4(v) = \varphi(-\pi,-u) = \left(u^3-1,0,-u\right)\,,\ v\in[-1,1]\,,
\end{cases}
$$

le cui derivate sono:

$$
\begin{cases}
\dot\gamma_1(u) = (0,0,0)\,,\ u\in[-\pi,\pi] \\
\dot\gamma_2(v) = \left(-3v^2,0,1\right)\,,\ v\in[-1,1] \\
\dot\gamma_3(u) = (-2\sin(u),-2\cos(u),0)\,,\ u\in[-\pi,\pi] \\
\dot\gamma_4(v) = \left(3v^2,0,-1\right)\,,\ v\in[-1,1]\,,
\end{cases}
$$

Si ha quindi:

$$I_1 := \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-\pi}^{\pi} (0,-1,-1) \cdot (0,0,0)\ du = \int_{-\pi}^{\pi} 0\, du = 0,$$

$$I_2 := \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-1}^{1} \left(\left(-v^3-1\right)^2, v, v \right) \cdot \left(-3v^2, 0, 1\right)\ dv = \int_{-1}^{1} \left(v - 3v^2 \left(-v^3-1\right)^2 \right)\ dv = -\frac{8}{3},$$

$$\begin{aligned} I_3 := \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(4\cos^2(u) - 2\sin(u), 4\sin(u)+1, 1\right) \cdot \left(-2\sin(u), -2\cos(u), 0\right)\ du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-2\sin(u)\left(4\cos^2(u) - 2\sin(u)\right) - 2(4\sin(u)+1)\cos(u)\right)\ du = 4\pi, \end{aligned}$$

$$I_4 := \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-1}^{1} \left(\left(v^3-1\right)^2, -v, -v \right) \cdot \left(3v^2, 0, -1\right)\ dv = \int_{-1}^{1} \left(3v^2 \left(v^3-1\right)^2 + v \right)\ dv = \frac{8}{3},$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4\pi,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 144). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := \ dx \left(-12x^2y^3 - 6y^4 + 5y\right) + \left(-6xy^3 - 10x\right)\ dy =: p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = -36x^2y^2 - 18y^3 + 15,$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y) = 0$. Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)} = -\frac{3}{y} =: f(y),$$

è una funzione della sola variabile y, pertanto un fattore integrante è dato da

$$\lambda(x,y) := e^{\int f(y)\, dy} = \frac{1}{y^3}$$

Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P = (P_x, P_y) = (0,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0, y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x, P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0, y)$ da P_y a y_0:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \lambda\omega &= \int_{\gamma_1} \lambda\omega + \int_{\gamma_2} \lambda\omega \\ &= \int_0^{x_0} \left(-12x^2 - 1\right)\ dx + \int_1^{y_0} \frac{-6x_0y^3 - 10x_0}{y^3}\, dy \\ &= 6x_0y_0 - \frac{5x_0}{y_0^2} + 4x_0^3 \end{aligned}$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y) = 4x^3 - \frac{5x}{y^2} + 6xy,$$

e le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y) = c$. La soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$ corrisponde a $c = 0$. La soluzione cessa di esistere se interseca l'asse x. Per $x \neq 0$ e $y \neq 0$, possiamo scrivere $V(x,y) = 0$ come $g(x,y) = 4x^2y^2 - 5 + 6y^3 = 0$, e tale espressione continua a valere anche in

$(0,(5/6)^{1/3})$, unico punto di intersezione con $x=0$. Si ha sempre $y\neq 0$, pertanto questa espressione rappresenta la soluzione in forma implicita. Esplicitando la x^2 si ottiene:

$$x^2=\frac{5-6y^3}{4y^2},$$

il che implica che $0<y(x)\leq(5/6)^{1/3}$ per ogni x in cui la soluzione è definita. Si ha che $|x|\to+\infty$ se e solo se $|y|\to 0$, pertanto se la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ essa ammette come unico asintoto quello orizzontale. e ha un punto di massimo in 0. Inoltre è pari. Cerchiamo punti a tangente verticale: si deve avere $\partial_y g(x,y)=0$ ovvero $2y(4x^2+9y)=0$, da cui $y=0$ (non accettabile) e $x^2=-\dfrac{9}{4}y$, da cui $x=\pm\frac{1}{2}3^{5/6}\sqrt[6]{5}$ e $y=-\left(\dfrac{5}{3}\right)^{1/3}<0$, pertanto non vi sono punti a tangente verticale per $y>0$. Quindi per $y>0$ si ha che $g(x,y)=0$ definisce una funzione di classe C^1, soluzione dell'equazione data, pari, con un massimo assoluto nell'origine e che ammette $y=0$ come asintoto orizzontale.

Svolgimento (Esercizio 145). Per $t=0$ si ha $g_n(t)=0$ per ogni n, quindi $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(0)=0$. Se $t\neq 0$ esiste $\bar n=\bar n(t)\in\mathbb{N}$ tale che se $n>\bar n$ allora $|t|>\frac{\pi}{\bar n}$, pertanto $\chi_{[-\pi/n,\pi/n]}(t)=0$ se $n>\bar n$ e dunque $g_n(t)=0$ se $t>\bar n(t)$. Ma allora $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(t)=0$, pertanto g_n converge puntualmente a zero. Il sup di $g_n(t)$ su $\mathbb{R}$ è n/p, ed è raggiunto per $t=\frac{\pi}{2n}$. Il valore di tale sup tende a $+\infty$, quindi la convergenza non è uniforme. Posto $x=nt$, $dx=n\,dt$, si ha

$$f_n(y)=\int_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{n\sin^2(nt)}{\pi}\arctan(y+t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(x)}{\pi}\arctan\left(y+\frac{t}{n}\right)\,dx.$$

La funzione integranda a destra è limitata in modulo, e poiché l'intervallo di integrazione è limitato, è possibile passare al limite sotto al segno di integrale ottenendo

$$f(y)=\lim_{n\to\infty}f_n(y)=\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2(x)}{\pi}\arctan\left(y+\frac{t}{n}\right)\,dx=\arctan y\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{\pi}\,dx=\arctan y.$$

Osserviamo infine che

$$\lim_{n\to\infty}f_n(y)\neq\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}g_n(t)\arctan(y+t)\,dt,$$

in quanto il membro di sinistra è uguale a $\arctan y$, mentre l'integranda del membro di destra è nulla per ogni t, quindi il membro di destra è nullo. Pertanto in questo caso non vale il teorema di passaggio al limite sotto al segno di integrale.

Svolgimento (Esercizio 146). Poniamo $f(x,y)=x^4+xy^2+y^4+2y^2-2$. Poiché $f(x,y)=f(x,-y)$, l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. In coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^4\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right)+2\rho^2\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)-2,$$

da cui:

$$\Gamma:=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ \rho^4\sin^4\theta+\rho^4\cos^4\theta+\rho^3\sin^2\theta\cos\theta+2\rho^2\sin^2\theta-2=0,\ \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

L'insieme è limitato perché nell'espressione in coordinate polari il termine in ρ prevalente è ρ^4 e il suo coefficiente si mantiene lontano da zero. L'insieme è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0)=0$, ovvero $x^4-2=0$. Si ottengono i punti $P_1=\left(-\sqrt[4]{2},0\right)$, $P_2=\left(\sqrt[4]{2},0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y)=0$, ovvero $y^4+2y^2-2=0$. Si ottengono i punti $Q_1=\left(0,-\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$, $Q_2=\left(0,\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^3 + y^2, 2xy + 4y^3 + 4y\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla f(P_1) &= \left(-4 \cdot 2^{3/4}, 0\right) \\
\nabla f(P_2) &= \left(4 \cdot 2^{3/4}, 0\right) \\
\nabla f(Q_1) &= \left(\sqrt{3} - 1, -4\sqrt{\sqrt{3}-1} - 4\left(\sqrt{3}-1\right)^{3/2}\right) \\
\nabla f(Q_2) &= \left(\sqrt{3} - 1, 4\sqrt{\sqrt{3}-1} + 4\left(\sqrt{3}-1\right)^{3/2}\right)
\end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned}
r_{P_1} :& x = -\sqrt[4]{2} \\
r_{P_2} :& x = \sqrt[4]{2} \\
r_{Q_1} :& y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}}\, x - \sqrt{\sqrt{3}-1} \\
r_{Q_2} :& y = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}}\, x + \sqrt{\sqrt{3}-1}.
\end{aligned}$$

In Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x,y) = 0$. In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti dell'insieme dove $\nabla f(x,y) = (0,0)$ andranno studiati a parte. Nel nostro caso il gradiente non si annulla mai in punti dell'insieme. Poniamo $L(x,y,\lambda) := h(x,y) + \lambda f(x,y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$ nelle incognite x e y. Si ha:

$$\begin{cases}
\lambda\left(4x^3 + y^2\right) + 1 = 0 \\
\lambda\left(2xy + 4y^3 + 4y\right) = 0 \\
x^4 + xy^2 + y^4 + 2y^2 - 2 = 0.
\end{cases}$$

Si ha $\lambda \neq 0$ dalla prima equazione, pertanto dalla seconda si ottiene $y = 0$ oppure $x = -2(y^2+1)$. Il caso $y = 0$ corrisponde ai punti P_1 e P_2, si ha invece, posto $z = y^2 + 1 \geq 1$

$$\begin{aligned}
f(-2(y^2+1), y) &= 16(y^2+1)^4 - 2y^2(y^2+1) + y^4 + 2y^2 - 2 \\
&\geq 16(y^2+1)^4 - 2(y^2+1)(y^2+1) - 2(y^2+1) \\
&= 16z^4 - 2z^2 - 2z \geq 16z^4 - 2z^4 - 2z^4 = 12z^4 \geq 12 > 0,
\end{aligned}$$

quindi i punti con $x = -2(y^2+1)$ non appartengono a Γ. Le soluzioni del sistema sono pertanto solo $P_1 = \left(-\sqrt[4]{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt[4]{2}, 0\right)$. Calcolando i valori assunti da h in questi punti si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $P_2 = \left(\sqrt[4]{2}, 0\right)$ e tale valore massimo è $\sqrt[4]{2}$. Analogamente, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $P_1 = \left(-\sqrt[4]{2}, 0\right)$, e tale valore minimo è $-\sqrt[4]{2}$.

Svolgimento (Esercizio 147). Poniamo $(u, v) = \varphi(x, y) = (x + y, 2x - y)$ e $f(x, y) = (x + y)^2$. Posto $\psi = \varphi^{-1}$, si ha che $\Omega = \psi(D)$ con $D = [0, 1] \times [0, 3]$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\psi(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f \circ \psi(u, v)|\mathrm{detJac}\psi(u, v)|\,du\,dv \\ &= \iint_D u^2 |\mathrm{detJac}\varphi(x, y)|^{-1}_{(x,y)=\varphi(u,v)}\,du\,dv = \iint_D u^2 \left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right|^{-1}_{(x,y)=\varphi(u,v)} du\,dv \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 \left(\int_0^1 u^2\,du\right) dv = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 148). Si veda la soluzione dell'Esercizio 143.

Svolgimento (Esercizio 149). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-X(x)T'(t) + 6T(t)X''(x) + T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{6X''(x) + X(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{6X''(x) + X(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} \lambda T(t) - T'(t) = 0, \\ 6X''(x) - \lambda X(x) + X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t, 0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$6\mu^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$

Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{N}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = 24(\lambda - 1)$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda < 1$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = \frac{1}{12}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{6}}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = \frac{1}{6}\left(6 - 36n^2\right)$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda = \frac{1}{6}\left(6 - 36n^2\right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha pertanto:

$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:

$$-6n^2 T(t) - T_n'(t) + T(t) = 0,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:

$$T_n(t) = d_n e^{\frac{1}{6}\left(6-36n^2\right)t}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t) X_n(x) = b_n e^{\frac{1}{6}\left(6-36n^2\right)t} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$

Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:

$$u(0,x) = 2x^2 + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione

$$f(x) = 2x^2 + 1,$$

nell'intervallo $[0,\pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi,\pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$\begin{aligned} b_n =&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(2x^2+1\right)\sin(nx)\,dx \\ =&\frac{8\left((-1)^n-1\right)-2n^2\left((-1)^n+2\pi^2(-1)^n-1\right)}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\left(\left((-1)^n+2\pi^2(-1)^n-1\right)n^2-4(-1)^n+4\right)e^{t-6n^2t}\sin(nx)}{\pi n^3}.$$

Per la presenza del termine e^{-n^2t}, la serie e le sue derivate convergono puntualmente per $t>0$, pertanto la serie è una soluzione classica del problema.

Svolgimento (Esercizio 150). Poniamo $f(x,y)=x^4+x^2y^2+x^2y+y^2-1$. Poiché $f(x,y)=f(-x,y)$ l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle y. In coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^4\cos^4\theta+\rho^3\sin\theta\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-1,$$

da cui:

$$\Gamma:=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ \rho^4\cos^2\theta+\rho^3\sin\theta\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-1,\ \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

Proviamo che l'insieme è limitato. Se $(x,y)\in\Gamma$ con $y\geq 0$ si ha $0=f(x,y)\geq y^1-1$, da cui $y\leq 1$. D'altra parte, se $(x,y)\in\Gamma$ con $y<-1$ si ha

$$0=f(x,y)\geq x^2y^2+x^2y+y^2-1\geq x^2y^2-x^2y^2+y^2-1=y^2-1,$$

da cui $|y|\leq 1$ contraddicendo $y<-1$. Pertanto se $(x,y)\in\Gamma$ si ha $|y|\leq 1$. Ma allora

$$0=f(x,y)\geq x^4-x^2-1,$$

pertanto anche $|x|$ deve essere limitato. L'insieme è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0)=0$, ovvero $x^4-1=0$. Si ottengono i punti $P_1=(-1,0)$, $P_2=(1,0)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y)=0$, ovvero $y^2-1=0$. Si ottengono i punti $Q_1=(0,-1)$, $Q_2=(0,1)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y)=\left(4x^3+2xy^2+2xy,2x^2y+x^2+2y\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} \nabla f(P_1)=&(-4,1)\\ \nabla f(P_2)=&(4,1)\\ \nabla f(Q_1)=&(0,-2)\\ \nabla f(Q_2)=&(0,2) \end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned} r_{P_1} &: y = 4(x+1) \\ r_{P_2} &: y = -4(x-1) \\ r_{Q_1} &: y = -1 \\ r_{Q_2} &: y = 1. \end{aligned}$$

In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x,y) = 0$. In P_1, P_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti dell'insieme dove $\nabla f(x,y) = (0,0)$ andranno studiati a parte. Nel nostro caso il gradiente non si annulla mai in punti dell'insieme. Poniamo $L(x,y,\lambda) := h(x,y) + \lambda f(x,y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$ nelle incognite x e y. Si ha:

$$\begin{cases} \lambda\left(4x^3 + 2xy^2 + 2xy\right) = 0 \\ \lambda\left(2x^2y + x^2 + 2y\right) + 1 = 0 \\ x^4 + x^2y^2 + x^2y + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha che $\lambda \neq 0$, pertanto dalla prima si ha $x = 0$, cui corrispondono in punti $(0, \pm 1)$ oppure $-2x^2 = y^2 + y$. Supposto $x \neq 0$, da $-2x^2 = y^2 + y$ si ottiene $y^2 + y < 0$ quindi $-1 < y < 0$. Sostituendo invece $-2x^2 = y^2 + y$ nella terza, si ottiene $y^2 - x^4 = 1$ e quindi $|y| \geq 1$, assurdo. Le soluzioni del sistema sono quindi solo $(0,-1)$, $(0,1)$ Calcolando i valori assunti da h in questi punti ed eventualmente in quelli precedentemente esclusi, si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $(0,1)$ e tale valore massimo è 1. Analogamente, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $(0,-1)$, e tale valore minimo è -1.

Altro modo: da $x^4 + x^2y^2 + x^2y + y^2 - 1 = 0$ si ricava

$$y = \frac{-x^2 \pm \sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4}}{2\left(x^2+1\right)}.$$

Derivando tale espressione, dopo alcune semplificazioni si ha:

$$y'_+(x) = -\frac{x\left(2x^6 + 6x^4 + 5x^2 + \sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4} + 2\right)}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4}},$$

oppure

$$y'_-(x) = \frac{x\left(2x^6 + 6x^4 + 5x^2 - \sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4} + 2\right)}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4}},$$

a seconda del segno preso.

Nel primo caso, si ha che

$$2x^6 + 6x^4 + 5x^2 + \sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4} + 2 > 0,$$

perché somma di quantità non negative. Ne segue che nel primo caso la derivata $y'_+(x)$ è nulla solo per $x = 0$ e $y_+(0) = 1$.

Nel secondo caso, si ha che

$$2x^6 + 6x^4 + 5x^2 - \sqrt{-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4} + 2 > 5x^2 + 2 - \sqrt{4x^2 + 2} > 5x^2 + 2 - (4x^2 + 2) \geq 0,$$

(si sfrutti che $t > \sqrt{t}$ se $t > 1$). Ne segue che anche nel secondo caso la derivata $y'_-(x)$ è nulla solo per $x = 0$ e $y_-(0) = -1$.

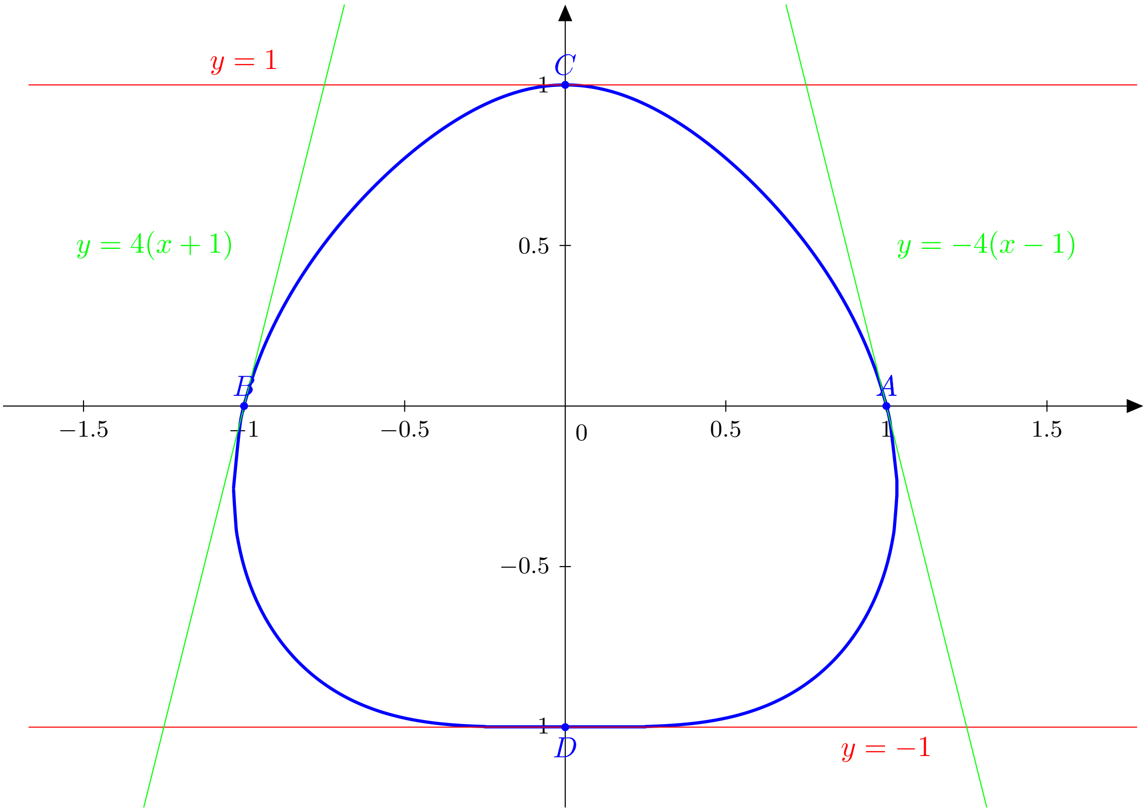


FIGURA 17. L'insieme $x^4 + x^2y^2 + x^2y + y^2 - 1 = 0$ e alcune rette significative.

I punti dove la derivata non esiste ovvero le soluzioni $\bar{x}$ di $-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4 = 0$, vanno studiati a parte. Ma per tali punti si ottiene

$$y_\pm(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\frac{\bar{x}^2}{1+\bar{x}^2},$$

da cui

$$y_-(0) = -1 < -\frac{1}{2} \le y_\pm(\bar{x}) \le 0 < 1 = y_+(0)$$

per ogni soluzione $\bar{x}$ di $-4x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 4 = 0$.

Si ritrova quindi che il massimo assoluto vincolato di h è raggiunto in $(0, 1)$ e il minimo assoluto vincolato è raggiunto in $(0, -1)$. Inoltre si ottiene che l'insieme è dato dall'unione dei due archi $y_\pm(x)$ e che tali archi hanno derivata nulla ciascuno in un unico punto (risp. di max e di min). Ciò porta al grafico qualitativo in Figura 17.

Svolgimento (Esercizio 151). Poniamo $u = \sqrt{xy}$ e $v = \sqrt{y/x}$. Si ha $1 \le u \le 3$ e $1 \le v \le 2$. Inoltre $y = uv$ e $x = u/v$. Lo Jacobiano della trasformazione è

$$\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ v & u \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $2u/v$. Si ha allora

$$I = \int_1^2 \int_1^3 (v+u)\frac{2u}{v}\,du\,dv = 8 + \frac{52}{3}\log 2.$$

Svolgimento (Esercizio 152). Poniamo

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,,$$
$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,.$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = -2,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z) \end{pmatrix}\\
=& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & z-4x \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x+y \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x+y+z \end{pmatrix}\\
=& (1,0,1)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (0, 3\cos(t), -3\sin(t))$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
=& \int_0^{2\pi} (3\cos(t)-4, 3\sin(t)+1, 3\sin(t)+3\cos(t)+1)\cdot(0, 3\cos(t), -3\sin(t))\;dt\\
=& \int_0^{2\pi} (3(3\sin(t)+1)\cos(t) - 3\sin(t)(3\sin(t)+3\cos(t)+1))\;dt\\
=& -9\pi.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v) \\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v) \\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 8v \\ 3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=& \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix}\right|\;du\,dv\\
=& \sqrt{(-24u^2v-3v^2)^2 + (3v^2-6u^2)^2 + (8v+2)^2\,du\,dv}.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G}, \Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\, dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8v \\ 1 & 3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix} dv\, du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(-24u^2v - 3v^2 + 8v + 2\right) dv\, du \\
&= -\,32.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 153). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := 10xy^2\, dx + \left(12y^3 - 3\right)\, dy =: p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 20xy,$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y) = 0$. Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)} = -\frac{2}{y} =: f(y),$$

è una funzione della sola variabile y, pertanto un fattore integrante è dato da

$$\lambda(x,y) := e^{\int f(y)\, dy} = \frac{1}{y^2}$$

Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P = (P_x, P_y) = (0,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0, y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x, P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0, y)$ da P_y a y_0:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \lambda\omega &= \int_{\gamma_1} \lambda\omega + \int_{\gamma_2} \lambda\omega \\
&= \int_0^{x_0} 10x\, dx + \int_1^{y_0} \frac{12y^3 - 3}{y^2}\, dy \\
&= 5x_0^2 + 6y_0^2 + \frac{3}{y_0} - 9
\end{aligned}$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y) = 5x^2 + 6y^2 + \frac{3}{y},$$

e le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y) = c$. La soluzione soddisfacente a $y(0) = 1$ corrisponde a $c = 9$. Per $y \neq 0$, possiamo scrivere $g(x,y) = 5x^2y + 6y^3 - 9y + 3 = 0$. Poiché $g(x,0) \neq 0$, tale scrittura rappresenta la soluzione e si ha che la soluzione deve essere sempre positiva, inoltre la soluzione deve essere pari. Esplicitando la variabile x si ottiene

$$|x| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{9 - 6y^2 - \frac{3}{y}}.$$

Studiamo rapidamente la funzione $3 - 2y^2 - 1/y$ con la condizione $y > 0$ e $3 - 2y^2 - 1/y \geq 0$. La sua derivata prima è $\frac{1}{y^2} - 4y$ che si annulla per $y = 2^{-2/3}$, inoltre in tale punto si ha $3 - 2y^2 - 1/y > 0$, quindi esso è accettabile. La derivata seconda è $-4 - 2/y^3$ che è strettamente negativa in $2^{-2/3}$. Pertanto $y = 2^{-2/3}$ è punto di massimo. Sostituendo nell'espressione di $|x|$ si ha $|x| \leq 3\sqrt{\frac{1}{10}\left(2 - 2^{2/3}\right)}$, la soluzione è definita in questo intervallo, quindi non ammette asintoti a $\pm\infty$. Agli estremi dell'intervallo la tangente al grafico della soluzione è verticale. Da $g(x, y) = 0$ si ricava che la soluzione ha derivata nulla in $x = 0$, inoltre da $V(x, y) = 9$ si ha che $6y^2 + \frac{3}{y} = 9 - 5x^2$. Poiché la funzione $6y^2 + \frac{3}{y}$ è strettamente crescente se $y > 0$, si ha che il massimo delle y è raggiunto nel massimo di $9 - 5x^2$ con x nell'intervallo di esistenza, ovvero per $x = 0$. Il valore del massimo risolve l'equazione $6y^2 + 3/y = 9$, ovvero $2y^3 - 3y + 1 = 0$. Cercando soluzioni tra i divisori interi del termine noto, si ottiene $y = 1$ e quindi le altre due soluzioni $y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$. Poiché la soluzione deve passare per $(0, 1)$, si ha che il valore del massimo deve essere 1.

In definitiva, la soluzione è un arco che congiunge i due punti

$$\left(\pm 3\sqrt{\frac{1}{10}\left(2 - 2^{2/3}\right)}, 2^{-2/3}\right),$$

simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, con tangenti verticali agli estremi, e che raggiunge in suo massimo per $x = 0$ e $y = 1$.

Svolgimento (Esercizio 154). Poniamo $f(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6y^3 - 2$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\cos^4(\theta) + 5\rho^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + 6\rho^3\sin^3(\theta) - 2,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho^4\cos^4(\theta) + 5\rho^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + 6\rho^3\sin^3(\theta) - 2 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

L'insieme può essere scritto anche come

$$x = x(y) = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{25}{4}y^2 - 6y^3 - 2} - \frac{5}{2}y^2},$$

con dominio $y \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, quindi non è limitato, e non può essere compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x, 0) = 0$, ovvero $x^4 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = \left(-\sqrt[4]{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt[4]{2}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0, y) = 0$, ovvero $6y^3 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(4x^3 + 10xy^2, 10x^2y + 18y^2\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}\nabla f(P_1) &= \left(-4\ 2^{3/4}, 0\right)\\ \nabla f(P_2) &= \left(4\ 2^{3/4}, 0\right)\\ \nabla f(Q_1) &= \left(0, 6\sqrt[3]{3}\right)\end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned}r_{P_1} :& x = -\sqrt[4]{2}\\ r_{P_2} :& x = \sqrt[4]{2}\\ r_{Q_1} :& y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.\end{aligned}$$

In Q_1, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. In P_1, P_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti dell'insieme dove $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ andranno studiati a parte. Nel nostro caso il gradiente non si annulla mai in punti dell'insieme. Poniamo $L(x, y, \lambda) := h(x, y) + \lambda f(x, y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$ nelle incognite x e y. Si ha:

$$\begin{cases}\lambda\left(4x^3 + 10xy^2\right) = 0\\ \lambda\left(10x^2y + 18y^2\right) + 1 = 0\\ x^4 + 5x^2y^2 + 6y^3 - 2 = 0.\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ Calcolando i valori assunti da h in questi punti ed eventualmente in quelli precedentemente esclusi, si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ e tale valore massimo è $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Invece $h(\cdot)$ non ammette minimo vincolato, e il valore del suo estremo inferiore vincolato è $-\infty$.

Svolgimento (Esercizio 155). Si veda la soluzione dell'Esercizio 89.

Svolgimento (Esercizio 156). Poniamo

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))\,,\\ \varphi(u, v) &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))\,.\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z) =& \partial_x F_1(x, y, z) + \partial_y F_2(x, y, z) + \partial_z F_3(x, y, z) = 2xz,\\ \operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) =& \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x, y, z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x, y, z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x, y, z)\end{pmatrix}\\ =& \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & x^2z\\ \vec{e}_2 & \partial_y & z\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2 - y\end{pmatrix}\\ =& \left(-2, x^2 - 2x, 0\right).\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-3\sin(t), \cos(t), 3\cos(t))$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(27\sin(t)\cos^2(t), 3\sin(t), 9\cos^2(t) - \sin(t)\right) \cdot (-3\sin(t), \cos(t), 3\cos(t))\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-81\sin^2(t)\cos^2(t) + 3\cos(t)\left(9\cos^2(t) - \sin(t)\right) + 3\sin(t)\cos(t)\right)\; dt \\
&= -\frac{81\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v) \\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v) \\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2u & 2v \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)\|\; du\, dv \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} \right| du\, dv \\
&= \sqrt{(2u-4v)^2 + (10u+8v)^2 + 196}\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,2,0) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = (0,-1,0)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec F,\Sigma) &= \int_\Sigma \vec F\cdot\hat n\,d\sigma\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right)dv\,dv\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix} (4u-5v)^2(2u+v) & 4 & -5\\ 2u+v & 2u & 2v\\ -u^2+(4u-5v)^2-v^2-2 & 2 & 1\end{pmatrix}dv\,du\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(64u^4-256u^3v+150u^3+276u^2v^2-280u^2v+10uv^3-80uv^2-48u-100v^4+192v^3-30v\big)\,dv\,du\\
&= \frac{1408}{15}.
\end{aligned}
$$

Il flusso di $\vec G=\operatorname{rot}\vec F$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec G,\Sigma) &= \int_\Sigma \vec G\cdot\hat n\,d\sigma\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v)\\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right)dv\,dv\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5\\ (4u-5v)^2-2(4u-5v) & 2u & 2v\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}dv\,du\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-224u^2+560uv+108u-350v^2-132v\big)\,dv\,du\\
&= -\frac{2296}{3}.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec F$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec F\cdot\hat n\,d\sigma=\int_{\partial\Sigma}\vec F\cdot d\vec\ell$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$
\begin{cases}
\gamma_1(u)=\varphi(u,-1)=\big(4u+5,u^2+3,2u-1\big)\,,\ u\in[-1,1]\\
\gamma_2(v)=\varphi(1,v)=\big(4-5v,v^2+3,v+2\big)\,,\ v\in[-1,1]\\
\gamma_3(u)=\varphi(-u,1)=\big(-4u-5,u^2+3,1-2u\big)\,,\ u\in[-1,1]\\
\gamma_4(v)=\varphi(-1,-u)=\big(5u-4,u^2+3,-u-2\big)\,,\ v\in[-1,1]\,,
\end{cases}
$$

le cui derivate sono:

$$
\begin{cases}
\dot\gamma_1(u)=(4,2u,2)\,,\ u\in[-1,1]\\
\dot\gamma_2(v)=(-5,2v,1)\,,\ v\in[-1,1]\\
\dot\gamma_3(u)=(-4,2u,-2)\,,\ u\in[-1,1]\\
\dot\gamma_4(v)=(5,2v,-1)\,,\ v\in[-1,1]\,,
\end{cases}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \big((2u-1)(4u+5)^2, 2u-1, -u^2+(4u+5)^2-3\big) \cdot (4, 2u, 2)\ du \\
=& \int_{-1}^{1} \big(2\left(-u^2+(4u+5)^2-3\right) + 4(2u-1)(4u+5)^2 + 2u(2u-1)\big)\ du \\
=& \frac{244}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \big((4-5v)^2(v+2), v+2, -v^2+(4-5v)^2-3\big) \cdot (-5, 2v, 1)\ dv \\
=& \int_{-1}^{1} \big(-v^2 - 5(v+2)(4-5v)^2 + (4-5v)^2 + 2v(v+2) - 3\big)\ dv \\
=& -310,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \big((-4u-5)^2(1-2u), 1-2u, -u^2+(-4u-5)^2-3\big) \cdot (-4, 2u, -2)\ du \\
=& \int_{-1}^{1} \big(-2\left(-u^2+(-4u-5)^2-3\right) - 4(1-2u)(-4u-5)^2 + 2(1-2u)u\big)\ du \\
=& -140,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \big((-v-2)(5v-4)^2, -v-2, -v^2+(5v-4)^2-3\big) \cdot (5, 2v, -1)\ dv \\
=& \int_{-1}^{1} \big(v^2 + 2(-v-2)v + 5(-v-2)(5v-4)^2 - (5v-4)^2 + 3\big)\ dv \\
=& -\frac{1190}{3},
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$
I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\frac{2296}{3},
$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 157). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $3y'(t) = x''(t) - x'(t) - 2t$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$
3(x(t) + y(t)) = x''(t) - x'(t) - 2t.
$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - x'(t) - 3x(t) - 3y(t) - 2t = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $3y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$t^2 + x''(t) - 2x'(t) - 2x(t) - 2t = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$t^2 + x''(t) - 2x'(t) - 2x(t) - 2t = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \text{Traccia}(A)\, x'(t) + \text{Det}(A)\, x(t) = 2t - t^2.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 2\mu - 2$, di discriminante $\delta = 12$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $\mu_2 = 1 + \sqrt{3}$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{\left(1-\sqrt{3}\right)t}$ e $x_{o,2} := e^{\left(1+\sqrt{3}\right)t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\left(1-\sqrt{3}\right)t} & e^{\left(1+\sqrt{3}\right)t} \\ \left(1-\sqrt{3}\right) e^{\left(1-\sqrt{3}\right)t} & \left(1+\sqrt{3}\right) e^{\left(1+\sqrt{3}\right)t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\left(1-\sqrt{3}\right)t} & e^{\left(1+\sqrt{3}\right)t} \\ \left(1-\sqrt{3}\right) e^{\left(1-\sqrt{3}\right)t} & \left(1+\sqrt{3}\right) e^{\left(1+\sqrt{3}\right)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - t^2 \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\left(1-\sqrt{3}\right)t}\left(2t-t^2\right)}{2\sqrt{3}} \\ \frac{e^{-\left(1+\sqrt{3}\right)t}\left(2t-t^2\right)}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$c(t) = -\frac{e^{\left(\sqrt{3}-1\right)t}\left(\left(\sqrt{3}-2\right)t^2 - \left(\sqrt{3}-3\right)t - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)^3},$$

$$d(t) = -\frac{e^{-\left(1+\sqrt{3}\right)t}\left(-\left(2+\sqrt{3}\right)t^2 + \left(3+\sqrt{3}\right)t + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)^3}.$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$x(t) = ce^{t-\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}\left(2de^{\sqrt{3}t+t} + t^2 - 4t + 5\right),\ c, d \in \mathbb{R},$$

$$\dot{x}(t) = \left(1-\sqrt{3}\right) ce^{t-\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}\left(2\left(1+\sqrt{3}\right) de^{\sqrt{3}t+t} + 2t - 4\right),\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(-t^2 + x'(t) - x(t)\right) = -\frac{ce^{t-\sqrt{3}t}}{\sqrt{3}} + \frac{de^{\sqrt{3}t+t}}{\sqrt{3}} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{3}{2},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) &= ce^{t-\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}\left(2de^{\sqrt{3}t+t} + t^2 - 4t + 5\right), \\ \\ y(t) &= -\frac{ce^{t-\sqrt{3}t}}{\sqrt{3}} + \frac{de^{\sqrt{3}t+t}}{\sqrt{3}} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{3}{2}, \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$. Pur se non richiesto, studiamo ora la stabilità dell'origine per il sistema omogeneo associato. Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo l'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$ oppure, essendo nel caso 2×2 per mezzo dell'equazione

$$\lambda^2 - \text{Traccia}(A)\,\lambda + \det(A) = 0.$$

Gli autovalori sono $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. Gli autovalori sono reali e distinti. Essi sono di segno discorde, l'origine è una sella.

Svolgimento (Esercizio 158). Poniamo $f(x, y) = x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 - 2$. L'insieme è simmetrico rispetto all'origine perché $f(x, y) = f(-x, -y)$ e alla bisettrice del I-III quadrante perché $f(x, y) = f(y, x)$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\sin^4(\theta) + \rho^4\cos^4(\theta) - \rho^4\sin(\theta)\cos^3(\theta) - \rho^4\sin^3(\theta)\cos(\theta) - 2,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) :\ \rho^4\sin^4(\theta) + \rho^4\cos^4(\theta) - \rho^4\sin(\theta)\cos^3(\theta) - \rho^4\sin^3(\theta)\cos(\theta) - 2 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi$$

Posto $y = mx$ si ottiene $x^4(1 - m - m^3 + m^4) = 2$, da cui $x^4(1 - m)(1 - m^3) = 2$ e quindi $x^4(1 - m)^2(1 + m + m^2) = 2$. Per $m \to 1$ si deve quindi avere $|x| \to +\infty$. L'insieme non è limitato, quindi non può essere compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x, 0) = 0$, ovvero $x^4 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = \left(-\sqrt[4]{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt[4]{2}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0, y) = 0$, ovvero $y^4 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = \left(0, -\sqrt[4]{2}\right)$, $Q_2 = \left(0, \sqrt[4]{2}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(4x^3 - 3x^2y - y^3, -x^3 - 3xy^2 + 4y^3\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla f(P_1) &= \left(-4 \cdot 2^{3/4}, 2^{3/4}\right) \\
\nabla f(P_2) &= \left(4 \cdot 2^{3/4}, -2^{3/4}\right) \\
\nabla f(Q_1) &= \left(2^{3/4}, -4\,2^{3/4}\right) \\
\nabla f(Q_2) &= \left(-2^{3/4}, 4\,2^{3/4}\right)
\end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned}
r_{P_1} :& y = 4\left(x + \sqrt[4]{2}\right) \\
r_{P_2} :& y = -4\left(\sqrt[4]{2} - x\right) \\
r_{Q_1} :& y = \frac{2^{3/4}x - 8}{4 \cdot 2^{3/4}} \\
r_{Q_2} :& y = \frac{2^{3/4}x + 8}{4 \cdot 2^{3/4}}.
\end{aligned}$$

In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati. Si è visto che posto $y = mx$ si ottiene $x^4(1 - m)^2(1 + m + m^2) = 2$ da cui

$y^4 = \dfrac{2}{m^4(1-m)^2(1+m+m^2)}$. Pertanto per $m \to 1^-$ si ha che $y \to +\infty$. per simmetria si conclude che non vi sono massimi e minimi vincolati.

Svolgimento (Esercizio 159). Indichiamo con

$$\begin{aligned} f_y(x) &= \int x \sin(y-2x)\, dy = -x\cos(2x-y), \\ g_x(y) &= \int x \sin(y-2x)\, dx = \frac{1}{4}(2x\cos(2x-y) - \sin(2x-y)). \end{aligned}$$

Si ha $y - 2x > 0$ se $y > 2x$ e $2x < 1 - x$ se $x < 1/3$. Quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x \sin|y-2x|\, dy\, dx \\ &= \int_0^{1/3} \int_{2x}^{1-x} x \sin|y-2x|\, dy\, dx + \int_0^{2/3} \int_{y/2}^{1-y} x \sin|y-2x|\, dx\, dy \\ &= \int_0^{1/3} \int_{2x}^{1-x} x \sin(y-2x)\, dy\, dx - \int_0^{2/3} \int_{y/2}^{1-y} x \sin(y-2x)\, dx\, dy \\ &= \int_0^{1/3} (f_{1-x}(x) - f_{2x}(x)) - \int_0^{2/3} (g_{1-y}(y) - g_{y/2}(y))\, dy \\ &= \frac{5}{36} - \frac{\sin(2)}{6} + \frac{\cos(1)}{9} - \frac{5\cos(2)}{36}. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 160). Poniamo

$$\begin{aligned} \vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,, \\ \varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,. \end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = yz + 2y, \\ \mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \\ =& \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & xyz \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y^2+z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-y \end{pmatrix} \\ =& (-2z-1, xy-2x, -xz)\,. \end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ =& \int_0^{2\pi} \big(0, \sin^2(t), t^2\cos^2(t) - \sin(t)\big) \cdot (\cos(t) - t\sin(t), \cos(t), 0)\; dt \\ =& \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\, dt \\ =& 0. \end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2v\\ 2u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma=&\|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\ =&\left|\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|\;du\,dv\\ =&\sqrt{16u^2v^2+8v^2}\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma=\sqrt{\det^2 B_1+\det^2 B_2+\det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(1,0,1)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=(1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Osserviamo che l'elemento d'area è nullo in P. Per procedere al calcolo della normale, consideriamo quindi

$$\hat{n}(P)=\lim_{Q\to P}\frac{\partial_u\varphi(Q)\wedge\partial_v\varphi(Q)}{\|\partial_u\varphi(Q)\wedge\partial_v\varphi(Q)\|}=\lim_{\substack{u\to 1\\ v\to 0^\pm}}\pm\left(-\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{2u^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{4u^2+2}},\frac{1}{\sqrt{4u^2+2}}\right)=\pm\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{F},\Sigma)=&\int_\Sigma\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma\\ =&\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\left(\begin{array}{c|c}F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right)dv\,dv\\ =&\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\begin{pmatrix}uv^2\left(u^2+v^2\right) & 1 & 0\\ \left(u^2+v^2\right)^2+v^4 & 0 & 2v\\ u^2-v^2 & 2u & 2v\end{pmatrix}dv\,du\\ =&\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(-4u^4v^3-2u^4v-4u^2v^5-4u^2v^3+2u^2v-4v^5-2v^3\right)dv\,du\\ =&0.\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G}=\mathrm{rot}\,\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} -2\left(u^2+v^2\right)-1 & 1 & 0 \\ uv^2-2u & 0 & 2v \\ -u\left(u^2+v^2\right) & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(6u^3v+4uv^3+8uv\right)\,dv\,du \\
&=0.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$
\begin{cases}
\gamma_1(u)=\varphi(u,-2)=\left(u,4,u^2+4\right),\ u\in[-2,2] \\
\gamma_2(v)=\varphi(2,v)=\left(2,v^2,v^2+4\right),\ v\in[-2,2] \\
\gamma_3(u)=\varphi(-u,2)=\left(-u,4,u^2+4\right),\ u\in[-2,2] \\
\gamma_4(v)=\varphi(-2,-u)=\left(-2,u^2,u^2+4\right),\ v\in[-2,2],
\end{cases}
$$

le cui derivate sono:

$$
\begin{cases}
\dot\gamma_1(u)=(1,0,2u),\ u\in[-2,2] \\
\dot\gamma_2(v)=(0,2v,2v),\ v\in[-2,2] \\
\dot\gamma_3(u)=(-1,0,2u),\ u\in[-2,2] \\
\dot\gamma_4(v)=(0,2v,2v),\ v\in[-2,2],
\end{cases}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
I_1 :&= \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_{-2}^{2}\left(4u\left(u^2+4\right),\left(u^2+4\right)^2+16,u^2-4\right)\cdot(1,0,2u)\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\left(2u\left(u^2-4\right)+4u\left(u^2+4\right)\right)\,du \\
&=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-2}^{2} \left(2v^2\left(v^2+4\right), v^4 + \left(v^2+4\right)^2, 4 - v^2\right) \cdot (0, 2v, 2v)\ dv \\
=& \int_{-2}^{2} \left(2v\left(4-v^2\right) + 2v\left(v^4 + \left(v^2+4\right)^2\right)\right)\ dv \\
=& 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-2}^{2} \left(-4u\left(u^2+4\right), \left(u^2+4\right)^2 + 16, u^2 - 4\right) \cdot (-1, 0, 2u)\ du \\
=& \int_{-2}^{2} \left(2u\left(u^2-4\right) + 4u\left(u^2+4\right)\right)\ du \\
=& 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-2}^{2} \left(-2v^2\left(v^2+4\right), v^4 + \left(v^2+4\right)^2, 4 - v^2\right) \cdot (0, 2v, 2v)\ dv \\
=& \int_{-2}^{2} \left(2v\left(4-v^2\right) + 2v\left(v^4 + \left(v^2+4\right)^2\right)\right)\ dv \\
=& 0,
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 161). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{2X(x)T'(t) + 3T(t)X''(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{2T'(t)}{T(t)} + \frac{3X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{2T'(t)}{T(t)} = \frac{3X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 2T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ 3X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$3\mu^2 - \lambda = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$

Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{N}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = 12\lambda$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda < 0$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = \frac{1}{6}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = \frac{\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{3}}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = -3n^2$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda = -3n^2$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ si ha pertanto:

$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:

$$2T_n'(t) - 3n^2 T(t) = 0,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:

$$T_n(t) = d_n e^{\frac{3n^2 t}{2}}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = b_n e^{\frac{3n^2 t}{2}} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$

Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:

$$u(0,x) = 4x^2 - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione

$$f(x) = 4x^2 - 1,$$

nell'intervallo $[0,\pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi,\pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
=& \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
=& \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(4x^2 - 1\right)\sin(nx)\,dx \\
=& -\frac{2\left(\left(-(-1)^n + 4\pi^2(-1)^n + 1\right)n^2 - 8(-1)^n + 8\right)}{\pi n^3}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\left(\left(-(-1)^n + 4\pi^2(-1)^n + 1\right)n^2 - 8(-1)^n + 8\right)e^{\frac{3n^2 t}{2}}\sin(nx)}{\pi n^3}.$$

Svolgimento (Esercizio 162). Poniamo $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 - 2$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^3\sin^3\theta + \rho^3\cos^3\theta + 3\rho^2\sin\theta\cos\theta - 2,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^3\sin^3\theta + \rho^3\cos^3\theta + 3\rho^2\sin\theta\cos\theta - 2 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

Studiamo le intersezioni con rette verticali $x = k$. Fissato $k \in \mathbb{R}$ si ha che $f(k,y) = 0$, ovvero $y^3 + 3ky - 2 + k^3 = 0$ ammette almeno una soluzione (è un polinomio di grado dispari). Pertanto per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste almeno un punto di Γ di ascissa k. Ma allora l'insieme non è limitato, quindi non può essere compatto. È chiuso perché f è continua. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0) = 0$, ovvero $x^3 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = \left(\sqrt[3]{2}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y) = 0$, ovvero $y^3 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = \left(0, \sqrt[3]{2}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 3y, 3x + 3y^2\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\nabla f(P_1) = \left(3\ 2^{2/3}, 3\sqrt[3]{2}\right)$$
$$\nabla f(Q_1) = \left(3\sqrt[3]{2}, 3\ 2^{2/3}\right)$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$r_{P_1} : y = \sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2} - x\right)$$
$$r_{Q_1} : y = -\frac{\sqrt[3]{2}x - 2}{2^{2/3}}.$$

In P_1, Q_1, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. In P_1, Q_1, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati. Il minimo assoluto di $h(x, y) = x^2$ vincolato all'insieme è ottenuto nell'intersezione della retta $x = 0$ con Γ, pertanto in $Q_1 = \left(0, \sqrt[3]{2}\right)$ e $h(Q_1) = 0$. Non vi sono massimi assoluti vincolati, in quanto per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste un punto di Γ di ascissa x dove $h(\cdot)$ vale k^2.

Svolgimento (Esercizio 163). Il dominio è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, pertanto è sufficiente studiare l'integrale per $\theta \in [0, \pi/2]$ e $\rho \in [0, \sqrt{\sin\theta}]$. In coordinate polari, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dx\,dy = \rho\,d\rho d\theta$, si ha ($v = \rho^2$, $dv = 2\rho\,d\rho$, $v = \sin u$, $dv = \cos u\,du$):

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin\theta}} \arcsin(\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} \arcsin(v)\,dv\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\theta} u\cos u\,du\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left([u\sin u]_0^\theta - \int_0^\theta \sin u\,du\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}(\theta\sin\theta + \cos\theta - 1)\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\,d\theta + [\sin\theta]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} \\
&= [-\theta\cos\theta]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta + [\sin\theta]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 164). Poniamo

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$
$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)).$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z) =& \partial_x F_1(x, y, z) + \partial_y F_2(x, y, z) + \partial_z F_3(x, y, z) = 0, \\
\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x, y, z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x, y, z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\
=& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & y^2 z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x - y \end{pmatrix} \\
=& \left(-1, y^2 - 1, 2x - 2yz\right).
\end{aligned}$$

Poiché rot $\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (1, 3\cos(t), -\sin(t))$, da cui l'integrale di linea:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
=& \int_0^{2\pi} \left(9\sin^2 t \cos t, t^2, t - 3\sin t\right) \cdot (1, 3\cos t, -\sin t)\ dt \\
=& \int_0^{2\pi} \left(3t^2 \cos t - (t - 3\sin t)\sin t + 9\sin^2 t \cos t\right)\ dt \\
=& 17\pi.
\end{aligned}
$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$
\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v) \\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v) \\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.
$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di Jac $\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$
\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)\|\ du\, dv \\
=& \left| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} \right| du\, dv \\
=& \sqrt{(-2u - 2v)^2 + (2v - 4uv)^2 + (2v + 1)^2}\, du\, dv.
\end{aligned}
$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di Jac $\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$
d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.
$$

Si ha che $P = (0, 2, 2) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (1,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$
\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

La normale unitaria in P è data da:

$$
\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}\right).
$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) =& \int_{\Sigma} \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
=& \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) \\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
=& \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} (u+v^2)^2\,(u^2+v^2) & 1 & -1 \\ (u-v)^2 & 1 & 2v \\ -v^2-v & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
=& \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(-4u^5v-8u^4v^3+2u^4v-4u^3v^5-2u^3-6u^2v^5+2u^2v^3\right) dv\,du+ \\
&+\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(2u^2v-4uv^7+4uv^5+2uv^2+2v^7-4v^3-3v^2-v\right) dv\,du \\
=& -64.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 165). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := \left(-4x^3y^3-1\right)\,dx - 6x^4y^2\,dy =: p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 12x^3y^2,$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y)=0$.

Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{q(x,y)} = \frac{12x^3y^2}{-6x^4y^2} = -\frac{2}{x} =: f(x),$$

che è funzione della sola x, pertanto si ha il fattore integrante

$$\lambda(x,y) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\log|x|} = e^{-2\log|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P=(P_x,P_y)=(1,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0,y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x,P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0,y)$ da P_y a y_0. Studiamo dapprima il caso $x_0>0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma}\lambda\omega =& \int_{\gamma_1}\lambda\omega + \int_{\gamma_2}\lambda\omega \\
=& \int_{1}^{x_0} \frac{-4x^3-1}{x^2}\,dx + \int_{1}^{y_0} -6x_0^2y^2\,dy \\
=& 1+\frac{1}{x_0} - 2x_0^2y_0^3
\end{aligned}$$

Si ottiene il potenziale (per $x>0$):

$$V(x,y) = \frac{-2x^3y^3+x+1}{x},$$

e per calcolo diretto si verifica che tale potenziale è soluzione anche per $x<0$. Le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y)=c$. È possibile esplicitare la y ottenendo per $x\neq 0$

$$y(x) = \frac{\sqrt[3]{(1-c)x+1}}{2x}.$$

La soluzione soddisfacente a $y(1) = 1$ corrisponde a $c = 0$, ovvero

$$y(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{2}x}.$$

Tale funzione è definita per $x \neq 0$, quindi il dominio massimale della soluzione è $]0, +\infty[$, ed è sempre positiva. Ammette un asintoto orizzontale $y = 0$ per $y \to +\infty$ e un asintoto verticale per $x = 0$ con $\lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty$. Ricordando che $y(x) > 0$ si ha dall'equazione $\dot{y}(x) < 0$, quindi la soluzione è strettamente decrescente nel suo dominio massimale.

Altro modo: l'equazione può essere scritta come un'equazione differenziale di Bernoulli con esponente $\alpha = -2$:

$$y'(x) + \frac{2}{3x}y = -\frac{1}{6x^4}y^{-2}.$$

Poniamo quindi $z = y^{1-\alpha} = y^3$, da cui $y = z^{1/3}$. Si ha

$$z' + \frac{2}{x}z = -\frac{1}{2x^4}.$$

Tale equazione è lineare, l'omogenea associata è $z' + \frac{2}{x}z = 0$, che è a variabili separabili e la cui soluzione è $z_o(x) = k/x^2$, $k \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $z_p(x) = k(x)/x^2$. Si ottiene $\dfrac{k'(x)}{x^2} + \dfrac{1}{2x^4} = 0$, da cui $k'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$ e quindi $k(x) = \dfrac{1}{2x}$. Si ottiene quindi

$$z(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{2kx+1}{2x^3},$$

da cui

$$y(x) = z^{1/3}(x) = \frac{(2kx+1)^{1/3}}{\sqrt[3]{2}x} = \frac{(2kx+1)^{1/3}}{\sqrt[3]{2}x}.$$

Posto $2k = 1 - c$, tale risultato conferma il precedente.

Svolgimento (Esercizio 166). Poniamo $f(x, y) = x^3 + x + e^y y$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^3\cos^3(\theta) + \rho\sin(\theta)e^{\rho\sin(\theta)} + \rho\cos(\theta),$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho^3\cos^3(\theta) + \rho\sin(\theta)e^{\rho\sin(\theta)} + \rho\cos(\theta) = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

L'insieme è chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f. Possiamo riscrivere l'equazione che definisce l'insieme come $-e^y y = x^3 + x$. Il membro di sinistra ha derivata prima $-e^y(y+1)$, nulla per $y = -1$, e derivata seconda strettamente negativa in tale punto. Pertanto ivi ammette massimo e tale massimo vale $1/e$. D'altra parte, per $y \to -\infty$, il membro di sinistra tende a $-\infty$. Questo implica che l'equazione $-e^y y = c$ ammette almeno una soluzione per ogni $c \leq 1/e$. D'altra parte si ha che il membro di destra per x sufficientemente negativo è sempre minore di $1/e$, perché per $x \to -\infty$ tende a $-\infty$, quindi per ogni x sufficientemente negativo esiste almeno un y tale che $(x, y) \in \Gamma$. Quindi l'insieme non è limitato, e pertanto non può essere compatto.

Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x, 0) = 0$, ovvero $x^3 + x = 0$. Si ottiene il punto $P_1 = (0, 0)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0, y) = 0$, ovvero $e^y y = 0$, da cui ancora P_1.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 + 1, e^y y + e^y\right).$$

Nel nostro caso si ha $\nabla f(P_1) = (1, 1)$ e la retta tangente è quindi $y = -x$.

In P_1 la tangente non è né verticale né orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ e anche una funzione $x = x(y)$ implicitamente definite da $f(x, y) = 0$.

Studiare massimi o minimi vincolati di $h(x, y) = x^3$ equivale a studiare massimi o minimi vincolati di $g(x) = x$. Per le osservazioni fatte sulla compattezza si ha che se x è sufficientemente negativo allora esiste sempre y tale che $(x, y) \in \Gamma$, pertanto $h(\cdot, \cdot)$ non può ammettere minimo assoluto vincolato.

La funzione $x \mapsto x^3 + x$ è strettamente crescente, pertanto ammette massimo vincolato in $\bar{x}$ se e solo se $\bar{x}$ è massimo vincolato per x, pertanto i punti di massimo vincolato soddisfano a $x^3 + x = 1/e$, $y = 1$ e su di essi $h(\cdot, \cdot)$ vale x^3.

Svolgimento (Esercizio 167). Si veda la soluzione dell'Esercizio 74.

Svolgimento (Esercizio 168). Poniamo

$$\begin{aligned}\vec{F}(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),\\ \varphi(u, v) &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)).\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{F}(x, y, z) =&\partial_x F_1(x, y, z) + \partial_y F_2(x, y, z) + \partial_z F_3(x, y, z) = z,\\ \mathrm{rot}\,\vec{F}(x, y, z) =&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x, y, z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x, y, z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x, y, z)\end{pmatrix}\\ =&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & xz\\ \vec{e}_2 & \partial_y & z\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x - y\end{pmatrix}\\ =&(-2, x - 1, 0).\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-\sin(t), 2\cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ =&\int_0^{2\pi} (0, 0, \cos(t) - 2\sin(t))\cdot(-\sin(t), 2\cos(t), 0)\;dt\\ =&\int_0^{2\pi} 0\,dt\\ =&0.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u, v) & \partial_y\varphi_1(u, v) & \partial_z\varphi_1(u, v)\\ \partial_x\varphi_2(u, v) & \partial_y\varphi_2(u, v) & \partial_z\varphi_2(u, v)\\ \partial_x\varphi_3(u, v) & \partial_y\varphi_3(u, v) & \partial_z\varphi_3(u, v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ -4u & 2v\\ 4u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u, v)$ e $\partial_v\varphi(u, v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u, v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u, v)\wedge\partial_v\varphi(u, v)\|\;du\,dv\\ =&\left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u, v) & \partial_v\varphi_1(u, v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u, v) & \partial_v\varphi_2(u, v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u, v) & \partial_v\varphi_3(u, v)\end{pmatrix}\right|\;du\,dv\\ =&\sqrt{256u^2v^2 + (8u - 2v)^2 + (8u + 2v)^2}\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,-2,2) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} (u+2v)\left(2u^2+v^2\right) & 1 & 2 \\ 2u^2+v^2 & -4u & 2v \\ 2u^2+u-v^2+2v & 4u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{1}\int_{-1}^{1} \left(-32u^4v - 64u^3v^2 + 32u^3 - 16u^2v^3 + 8u^2 - 32uv^4 + 18uv - 4v^3 + 4v^2\right) dv\,du \\
&= -\frac{24}{5}.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ u+2v-1 & -4u & 2v \\ 0 & 4u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{1}\int_{-1}^{1} \left(8u^2 + 46uv - 8u - 4v^2 + 2v\right) dv\,du \\
&=64.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot\,d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,1]\times[-2,1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{cases} \gamma_1(u) = \varphi(u,-1) = \big(u-2, 1-2u^2, 2u^2+1\big)\,,\ u \in [-2,1] \\ \gamma_2(v) = \varphi(1,v) = \big(2v+1, v^2-2, v^2+2\big)\,,\ v \in [-1,1] \\ \gamma_3(u) = \varphi(-u-1,1) = \big(1-u, 1-2(-u-1)^2, 2(-u-1)^2+1\big)\,,\ u \in [-2,1] \\ \gamma_4(v) = \varphi(-2,-u-1) = \big(2(-u-1)-2, (-u-1)^2-8, (-u-1)^2+8\big)\,,\ v \in [-1,1]\,, \end{cases}$$

le cui derivate sono:

$$\begin{cases} \dot\gamma_1(u) = (1,-4u,4u)\,,\ u \in [-2,1] \\ \dot\gamma_2(v) = (2,2v,2v)\,,\ v \in [-1,1] \\ \dot\gamma_3(u) = (-1,4(-u-1),-4(-u-1))\,,\ u \in [-2,1] \\ \dot\gamma_4(v) = (-2,2v,2v)\,,\ v \in [-1,1]\,, \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{1} \big((u-2)\left(2u^2+1\right), 2u^2+1, 2u^2+u-3\big) \cdot (1,-4u,4u)\ du \\ =& \int_{-2}^{1} \big((u-2)\left(2u^2+1\right) - 4u\left(2u^2+1\right) + 4u\left(2u^2+u-3\right)\big)\ du \\ =& 9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-1}^{1} \big((2v+1)\left(v^2+2\right), v^2+2, -v^2+2v+3\big) \cdot (2,2v,2v)\ dv \\ =& \int_{-1}^{1} \big(2v\left(-v^2+2v+3\right) + 2v\left(v^2+2\right) + 2(2v+1)\left(v^2+2\right)\big)\ dv \\ =& 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{1} \big(\left(2(-u-1)^2+1\right)(1-u), 2(-u-1)^2+1, 2(-u-1)^2-u\big) \cdot (-1,4(-u-1),-4(-u-1))\ du \\ =& \int_{-2}^{1} \big(4\left(2(-u-1)^2+1\right)(-u-1) - 4\left(2(-u-1)^2-u\right)(-u-1) - \left(2(-u-1)^2+1\right)(1-u)\big)\ du \\ =& -21, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \left((-2v-2)\left(v^2+8\right), v^2+8, -v^2-2v+6\right) \cdot (-2, 2v, 2v)\ dv \\
=& \int_{-1}^{1} \left(2v\left(-v^2-2v+6\right) - 2(-2v-2)\left(v^2+8\right) + 2v\left(v^2+8\right)\right)\ dv \\
=& 64,
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 64,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 169). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $2y'(t) = x''(t) - x'(t) - 2t$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$2(3x(t) + y(t)) = x''(t) - x'(t) - 2t.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - x'(t) - 6x(t) - 2y(t) - 2t = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $2y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$t^2 + x''(t) - 2x'(t) - 5x(t) - 2t = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$t^2 + x''(t) - 2x'(t) - 5x(t) - 2t = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \text{Traccia}(A)\, x'(t) + \text{Det}(A)\, x(t) = 2t - t^2.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 2\mu - 5$, di discriminante $\delta = 24$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = 1 - \sqrt{6}$ e $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t}$ e $x_{o,2} := e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} & e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t} \\ \left(1-\sqrt{6}\right) e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} & \left(1+\sqrt{6}\right) e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} & e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t} \\ \left(1-\sqrt{6}\right) e^{\left(1-\sqrt{6}\right)t} & \left(1+\sqrt{6}\right) e^{\left(1+\sqrt{6}\right)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - t^2 \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\left(1-\sqrt{6}\right)t}\left(2t-t^2\right)}{2\sqrt{6}} \\ \frac{e^{-\left(1+\sqrt{6}\right)t}\left(2t-t^2\right)}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$c(t) = \frac{e^{(\sqrt{6}-1)t}\left(\left(7-2\sqrt{6}\right)t^2 + 2\left(\sqrt{6}-6\right)t + 2\sqrt{6}\right)}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-1\right)^3},$$
$$d(t) = -\frac{e^{-(1+\sqrt{6})t}\left(-\left(7+2\sqrt{6}\right)t^2 + 2\left(6+\sqrt{6}\right)t + 2\sqrt{6}\right)}{2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{6}\right)^3}.$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$x(t) = ce^{t-\sqrt{6}t} + de^{(1+\sqrt{6})t} + \frac{1}{125}\left(25t^2 - 70t + 38\right),\ c, d \in \mathbb{R},$$
$$\dot{x}(t) = \left(1-\sqrt{6}\right)ce^{t-\sqrt{6}t} + \left(1+\sqrt{6}\right)de^{(1+\sqrt{6})t} + \frac{1}{125}(50t-70),\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-t^2 + x'(t) - x(t)\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}ce^{t-\sqrt{6}t} + \sqrt{\frac{3}{2}}de^{\sqrt{6}t+t} - \frac{3}{125}\left(25t^2 - 20t + 18\right),\ c, d \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) &= ce^{t-\sqrt{6}t} + de^{(1+\sqrt{6})t} + \frac{1}{125}\left(25t^2 - 70t + 38\right), \\ \\ y(t) &= -\sqrt{\frac{3}{2}}ce^{t-\sqrt{6}t} + \sqrt{\frac{3}{2}}de^{\sqrt{6}t+t} - \frac{3}{125}\left(25t^2 - 20t + 18\right), \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$. Studiamo ora la stabilità dell'origine per il sistema omogeneo associato. Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo l'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$ oppure, essendo nel caso 2×2 per mezzo dell'equazione

$$\lambda^2 - \text{Traccia}(A)\,\lambda + \det(A) = 0.$$

Gli autovalori sono $1 + \sqrt{6}$ e $1 - \sqrt{6}$. Gli autovalori sono reali e distinti. Essi sono di segno discorde, l'origine è una sella.

Svolgimento (Esercizio 170). Poniamo $f(x, y) = \left(x^2 - 4x + y^2\right)^2 - x^2 + y^2$. Osserviamo che $f(x, y) = f(x, -y)$, quindi l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \left(\rho^2 - 4\rho\cos\theta\right)^2 \\ &= -\rho^2\left(\cos(2\theta) + (\rho - 4\cos\theta)^2\right). \end{aligned}$$

Considerando a parte il caso $\rho = 0$, si ha $0 \leq \rho = 4\cos\theta \pm \sqrt{\cos(2\theta)} = 4\cos\theta \pm \sqrt{2\cos^2\theta - 1}$. Si deve pertanto avere necessariamente $\cos 2\theta \geq 0$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$, da cui $|\theta| < \pi/4$ oppure $\theta \in I_2 := [3/4\pi, \pi] \cup [-\pi, -3/4\pi]$. Studiamo l'esistenza dei due rami

$$\rho_1(\theta) = 4\cos\theta + \sqrt{2\cos^2\theta - 1},$$
$$\rho_2(\theta) = 4\cos\theta - \sqrt{2\cos^2\theta - 1}.$$

Affinché il ramo $\rho_i(\cdot)$ sia accettabile, si deve avere $\rho_i(\theta) \geq 0$, $i = 1, 2$.

(1) Per quanto riguarda $\rho_1(\cdot)$, ciò significa $4\cos\theta + \sqrt{2\cos^2\theta - 1} \geq 0$. Se $|\theta| < \pi/4$, poiché $\cos\theta \geq 0$, si ha che tale ramo è accettabile. Se $\theta \in I_2$ si deve avere (ricordando che $\cos\theta < 0$ in I_2) che $\sqrt{2\cos^2\theta - 1} \geq -4\cos\theta$, da cui quadrando si ottiene $14\cos^2\theta \leq -1$, assurdo. Pertanto tale ramo non è accettabile su I_2.

(2) Per quanto riguarda $\rho_2(\cdot)$, si deve avere $4\cos\theta \geq \sqrt{2\cos^2\theta - 1}$. Se $|\theta| < \pi/4$, elevando al quadrato e ricordando che $\cos\theta > 0$, si ha $14\cos^2\theta \geq -1$. Pertanto tale ramo è accettabile. Invece se $\theta \in I_2$ si ha $\cos\theta < 0$ quindi si avrebbe $\rho_2(\theta) < 0$. Pertanto in I_2 il ramo $\rho_2(\cdot)$ non è accettabile.

Pertanto

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho = 4\cos\theta \pm \sqrt{\cos(2\theta)},\ |\theta| \leq \pi/4\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

L'insieme è chiuso perché $\Gamma = f^{-1}(0)$ e f è continua. Inoltre dall'espressione in coordinate polari si ricava che $\rho \leq 5$ (raggiunto per $\theta = 0$), quindi è anche limitato, ma allora l'insieme è chiuso e limitato quindi compatto.

Per determinare le intersezioni con l'asse delle ascisse, studiamo $f(x,0) = 0$, ovvero l'equazione $\left(x^2 - 4x\right)^2 - x^2 = 0$. Si ha

$$0 = \left(x^2 - 4x\right)^2 - x^2 = (x^2 - 4x - x)(x^2 - 4x + x) = x(x-3)(x-5),$$

le cui soluzioni sono $x \in \{0, 3, 5\}$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (3,0)$, $P_3 = (5,0)$. Per determinare le intersezioni con l'asse delle ordinate, studiamo $f(0,y) = 0$, ovvero l'equazione $y^4 + y^2 = 0$, che ammette solo la soluzione nulla. L'unica intersezione con l'asse delle ordinate è $P_1 = (0,0)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(2(2x-4)\left(x^2 - 4x + y^2\right) - 2x, 4y\left(x^2 - 4x + y^2\right) + 2y\right).$$

Nel nostro caso, nei punti P_2, P_3 il gradiente di f è diverso da $(0,0)$. Si ha $\partial_x f(P_2) = -18 \neq 0$, $\partial_x f(P_3) = 50 \neq 0$ e $\partial_y f(P_2) = \partial_y f(P_3) = 0$, quindi le rette tangenti in tali punti sono:

$$\begin{aligned} r_{P_2} &: x = 3, \\ r_{P_3} &: x = 5. \end{aligned}$$

Le tangenti in tali punti non sono orizzontali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Il Teorema di Dini non può invece essere usato per esplicitare $y = y(x)$ in un intorno di P_2, P_3 perché in tali punti le tangenti sono verticali.

La funzione h è continua e l'insieme Γ è compatto, pertanto h ammette massimo e minimo assoluti vincolati a Γ. Chiaramente nell'origine la funzione $h(x,y) = x^2$ ha un minimo assoluto vincolato a Γ e il valore di tale minimo è 0. Osserviamo inoltre che si ha sempre $x^2 \leq \rho^2 \leq 25$ e che si ha $\rho^2 = 25$ se e solo se $\theta = 0$. In questo caso si ha anche $x^2 = \rho^2$, corrispondente al punto $(5,0)$ che quindi è l'unico massimo assoluto vincolato.

Altro modo (uso della parametrizzazione): in coordinate polari si ha $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\cos^2\theta$, pertanto si tratta di studiare le funzioni $x_i^2(\theta) = \rho_i^2(\theta)\cos^2\theta$, $\theta \in 1, 2$. Essendo comunque $\cos\theta > 0$, quindi $x > 0$, si ha che studiare i massimi di $h(\cdot,\cdot)$ equivale a studiare i massimi di x vincolati a Γ. Poiché si ha sempre $\rho_1(\theta) > \rho_2(\theta)$, da cui $x_1(\theta) \geq x_2(\theta)$, è necessario trovare i massimi della funzione

$$x_1(\theta) = 4\cos^2\theta + \cos\theta\sqrt{2\cos^2\theta - 1}, \qquad |\theta| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Agli estremi si ha $x_1(\pm\pi/4) = 2$, corrispondenti ai punti di intersezioni di Γ con le bisettrici (si ottengono i punti $T_1 = (2,2)$ e $T_2 = (2,-2)$). Derivando all'interno si ha

$$\dot{x}(\theta) = -\frac{\sin(t)\left(8\sqrt{\cos(2t)}\cos(t) + 2\cos(2t) + 1\right)}{\sqrt{\cos(2t)}},$$

che per $|\theta| \leq \pi/4$ si annulla solo in $\theta = 0$, corrispondente al punto $P_3 = (5,0)$ che, quindi è di max assoluto vincolato e il valore del massimo è 25.

Altro modo (moltiplicatori di Lagrange): studiamo i punti dove il gradiente di f si annulla. Si ha

$$\begin{cases} 2(2x-4)\left(x^2-4x+y^2\right)-2x=0, \\ 4y\left(x^2-4x+y^2\right)+2y=0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $y = 0$ oppure $x^2 - 4x + y^2 = -1/2$. Sostituendo $y = 0$ nella prima, si ottiene $2(2x-4)(x^2-4x) - 2x = 0$, da cui $x = 0$, quindi il punto $(0,0)$, oppure $2x^2 - 12x + 15 = 0$ da cui i punti $\left(\frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}, 0\right)$. Questi ultimi due punti non appartengono a Γ, poiché l'intersezione di Γ con $y = 0$ è data solo da $(0,0)$, P_2 e P_3. Sostituendo $x^2 - 4x + y^2 = -1/2$ nella prima, si ottiene $-(2x-4) - 2x = 0$, cioé $x = 1$, e quindi da $x^2 - 4x + y^2 = -1/2$ si ricava $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Si verifica per calcolo diretto che i punti $\left(1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \notin \Gamma$. In definitiva, l'unico punto di Γ dove $\nabla f(x,y)$ si annulla è l'origine, che andrà trattata a parte.

Applichiamo quindi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: sia $L(x,y,\lambda) = h(x,y) + \lambda f(x,y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$. Si ha:

$$\begin{cases} \lambda\left(2(2x-4)\left(x^2-4x+y^2\right)-2x\right)+2x=0, \\ \lambda\left(4y\left(x^2-4x+y^2\right)+2y\right)=0, \\ \left(x^2-4x+y^2\right)^2-x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = 0$ oppure $y = 0$ oppure $x^2 - 4x + y^2 = -1/2$. Se $\lambda = 0$ si ha dalla prima $x = 0$, quindi dalla terza $y = 0$ e si trova l'origine. Se $y = 0$, dalla terza si hanno i punti P_1, P_2, P_3. Se $x^2 - 4x + y^2 = -1/2$, sostituendo nella terza si ottiene $\frac{1}{4} - x^2 + y^2 = 0$. Da

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2=-\dfrac{1}{2}, \\ x^2-y^2=\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

si ottiene, sommando termine a termine, l'equazione $2x^2 - 4x = -1/4$, pertanto i punti con ascissa $x = \frac{1}{4}\left(4 \pm \sqrt{14}\right)$). Calcolando $h(x,y)$ nei punti P_2, P_3 e negli ultimi due punti trovati, si vede come il massimo assoluto vincolato sia in $P_3 = (5,0)$ e valga 25, confermando il risultato ottenuto.

Tracciamo ora un grafico qualitativo di Γ. Possiamo limitarci al primo quadrante. Dall'espressione $f(x,y) = 0$ è possibile esplicitare y^2 in funzione di x: è sufficiente sostituire $v = y^2$ e osservare che si ottiene un polinomio di secondo grado in v, nella fattispecie si ha

$$v^2 + v\left(2x^2 - 8x + 1\right) + x^4 - 8x^3 + 15x^2 = 0,$$

da cui

$$y^2 = v_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-2x^2 + 8x - 1 \pm \sqrt{8x^2 - 16x + 1}\right),$$

soggetta alla condizione aggiuntiva $v_{\pm} \geq 0$. In particolare, se $8x^2 - 16x + 1 = 0$, con $x \geq 0$, si ha una sola soluzione, pertanto i due rami ρ_1 e ρ_2 debbono confluire nel primo quadrante nel punto soddisfacente $x = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{14}$, cui corrisponde $y = \sqrt{\frac{13}{8} + \sqrt{\frac{7}{2}}}$. Tale punto $S_1 = \left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{14}, \sqrt{\frac{13}{8} + \sqrt{\frac{7}{2}}}\right)$ è anche

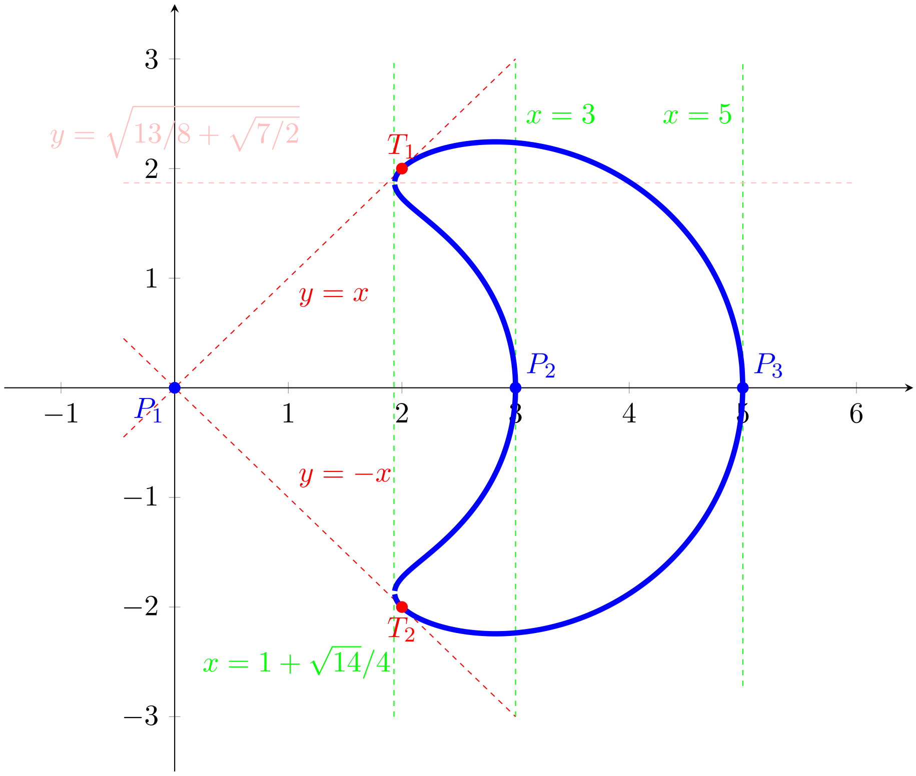


FIGURA 18. L'insieme $\left(x^2-4x+y^2\right)^2-x^2+y^2=0$ e alcune rette significative.

il punto di ascissa minima per i rami ρ_1 e ρ_2. Calcolando le derivate di $v_\pm$ si ha

$$\dot{v}_+(x) = \frac{16x-16}{2\sqrt{8x^2-16x+1}} - 4x+8,$$
$$\dot{v}_-(x) = -\frac{16x-16}{2\sqrt{8x^2-16x+1}} - 4x+8,$$

La mappa $x \mapsto 8x^2-16x+1$ ha il suo minimo in $x=2$ e tale minimo vale 1. Il grafico di Γ ha la forma di una mezzaluna con corna smussate e gobba rivolta nella direzione positiva dell'asse x, cui va aggiunta l'origine, punto isolato.

Svolgimento (Esercizio 171). Si ha

$$\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{2}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}.$$

Pertanto negli insiemi della forma $[c,+\infty]\times[0,\pi]$ con $c>0$ si ha convergenza totale, in quanto il membro di destra è maggiorato da $\frac{2}{n\pi}e^{(-2n^2-1)c}$ e per n sufficientemente grande tale termine è minore di $1/n^2$ (perché l'esponenziale prevale su tutti gli altri termini), termine generale di serie convergente. In modo del tutto analogo si prova la convergenza delle derivate parziali di ogni ordine della serie. Quindi si ha convergenza totale, uniforme e puntuale della serie e delle sue derivate in $[c,+\infty[\times[-\pi,\pi]$ per ogni $c>0$. La serie è derivabile termine a termine. Per provare che è soluzione dell'equazione assegnata, è sufficiente osservare che

$$\partial_t \left(e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right) = -(2n^2+1)e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)$$
$$\partial^2_{xx} \left(e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right) = -n^2 e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)$$

Quindi $e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)$ è soluzione dell'equazione per ogni $n \geq 1$. Possiamo moltiplicarla per una costante arbitraria e ottenere ancora una soluzione, pertanto il termine generale della serie è soluzione e, poiché la serie e le sue derivate sono derivabili termine a termine, si ha che la serie data risolve il problema.

Svolgimento (Esercizio 172). Osserviamo che D può essere ottenuto dividendo a metà il cilindro con la medesima base e altezza pari alla somma tra l'altezza massima di D e quella minima. Da $z = 5 - y$ e $x^2 + y^2 \leq 9$, si ha $|y| \leq 3$, quindi $5 - 3 = 2 \leq z \leq 5 + 3 = 8$. Essendo il solido contenuto in $z \geq 1$, la sua altezza varia quindi da 1 a 7. Quindi il volume è $\dfrac{1}{2}3^2\pi(7+1) = 36\pi$.

Altro modo: si deve calcolare

$$I = \iiint_D dx\,dy\,dz,$$

dove D è il solido assegnato. Parametrizziamo D in coordinate cilindriche: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$. L'elemento di volume è $\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. Si ha allora $0 \leq \rho \leq 3$, e z compreso tra $5 - \rho\sin\theta$ e 1. Poiché si ha sempre $5 - \rho\sin\theta \geq 1$ se $0 \leq \rho \leq 3$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, si conclude che $1 \leq z \leq 5 - \rho\sin\theta$. Quindi si ha

$$I = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_1^{5-\rho\sin\theta} \rho\,dz\,d\theta\,d\rho = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (4 - \rho\sin\theta)\rho\,d\theta\,d\rho = 2\pi \int_0^3 4\rho\,d\rho = 36\pi.$$

Svolgimento (Esercizio 173). Si ha:

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \left(4\alpha x - 18x + 14\alpha y - 60y, 14\alpha x - 60x + 2\alpha^2 y + 36\alpha y - 180y\right),$$
$$\operatorname{Hess} f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 4(\alpha-5)+2 & 12(\alpha-5)+2\alpha \\ 12(\alpha-5)+2\alpha & 2\alpha^2+36(\alpha-5) \end{pmatrix}$$

I punti critici risolvono il sistema $\nabla f_\alpha(x,y) = 0$, cioé

$$\begin{cases} (2\alpha-9)x + (7\alpha-30)y = 0, \\ (7\alpha-30)x + \left(\alpha^2+18\alpha-90\right)y = 0. \end{cases}$$

Il determinante della matrice associata a tale sistema è

$$(2\alpha-9)(\alpha^2+18\alpha-90) - (7\alpha-30)^2 = 2\alpha^3 - 22\alpha^2 + 78\alpha - 90$$

Tale determinante è nullo solo per $\alpha = 3$ e $\alpha = 5$. Pertanto se $\alpha \notin \{3, 5\}$, l'unico punto critico è l'origine. Il determinante della matrice Hessiana è

$$\det \operatorname{Hess} f_\alpha(x,y) = 8\alpha^3 - 88\alpha^2 + 312\alpha - 360 = 8\left(\alpha^3 - 11\alpha^2 + 39\alpha - 45\right),$$

cerchiamo soluzioni tra i divisori di 45, ovvero $\pm1, \pm3, \pm5, \pm9, \pm15, \pm45$. Si ha che il determinante si annulla solo per $\alpha = 3$ (radice doppia) e $\alpha = 5$. Pertanto esso è strettamente negativo per $\alpha < 5$ e $\alpha \neq 3$, e strettamente positivo per $\alpha > 5$. Utilizzando il metodo dei minori principali, possiamo dire che per $\alpha > 5$ si ha un minimo nell'origine (unico punto critico), mentre per $\alpha < 5$ e $\alpha \neq 3$ si ha una sella nell'origine (unico punto critico). I casi $\alpha = 3$ e $\alpha = 5$ vanno studiati a parte. Si ha

$$f_3(x,y) = -3x^2 - 18xy - 27y^2 = -3(x^2 + 6xy + 9) = -3(x+3y)^2,$$
$$f_5(x,y) = x^2 + 10xy + 25y^2 = (x+5y)^2$$

Pertanto i punti critici di f_3 sono tutti quelli della retta $x = -3y$ e sono massimi relativi e assoluti, mentre quelli di f_5 sono tutti quelli della retta $x = -5y$ e sono tutti minimi relativi e assoluti.

Svolgimento (Esercizio 174). Poniamo

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,,$$
$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,.$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 2xz - y + z,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2 z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & yz \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2 - yz \end{pmatrix} = \left(-y - z, x^2 - 2x, 0\right).
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(0,0,9\cos^2(t)\right)\cdot(-3\sin(t), 3\cos(t), 0)\;dt = 0.$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v) \\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v) \\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ -2u & 2v \\ 1 & 2v \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=& \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix}\right| du\,dv\\
=& \sqrt{(1-4uv)^2 + (-4uv-2v)^2 + (4uv+2u)^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (2,0,0) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (-1,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{65}}, \sqrt{\frac{5}{13}}, -\frac{6}{\sqrt{65}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} u^2-u-2v^2 & 2u & 1 \\ (u^2+v)^2 - 2(u^2+v) & -2u & 2v \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(-4u^5v + u^4 - 8u^3v^2 + 4u^3v + 4u^2v - 2u^2 + 4uv^3 + 8uv^2 + 2uv + 4v^3 + v^2 - 2v\right) dv\,du \\
&= \frac{448}{15}.
\end{aligned}
$$

Svolgimento (Esercizio 175). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := y^3\,dx(2x-5y) + \left(-5xy^3 - 6\right)\,dy =: p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 3y^2(2x-5y),$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y)=0$. Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{-p(x,y)} = -\frac{3}{y} =: f(y),$$

è una funzione della sola variabile y, pertanto un fattore integrante è dato da

$$\lambda(x,y) := e^{\int f(y)\,dy} = \frac{1}{y^3}$$

Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P = (P_x, P_y) = (0,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0,y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x, P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0, y)$ da P_y a y_0:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \lambda\omega &= \int_{\gamma_1}\lambda\omega + \int_{\gamma_2}\lambda\omega \\
&= \int_0^{x_0} (2x-5)\,dx + \int_1^{y_0} \frac{-5x_0y^3-6}{y^3}\,dy \\
&= -5x_0y_0 + x_0^2 + \frac{3}{y_0^2} - 3
\end{aligned}
$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y) = x^2 - 5xy + \frac{3}{y^2},$$

e le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y) = c$. La soluzione soddisfacente a $y(2)=1$ corrisponde a $c=-3$.

Possiamo riscrivere la forma implicita della soluzione come

$$f(x,y) := (x^2 - 5xy + 3)y^2 + 3 = 0,$$

infatti $f(x,0)\neq 0$, pertanto non stiamo aggiungendo soluzioni. Posto $z = x^2-5xy+3$, $w=y^2$ si ottiene la curva $zw=-3$. Tale curva ammette gli asintoti $z=0$ e $w=0$, pertanto abbiamo le curve asintotiche $y = \dfrac{3}{5x} + \dfrac{x}{5}$ e $y = 0$. Pertanto l'insieme $\Gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ ammette gli asintoti $x = 0$ e $y = \dfrac{x}{5}$ (dalla prima), mentre la seconda non porge informazioni. Osserviamo inoltre che Γ è simmetrico rispetto all'origine. Si poteva determinare l'asintoto $y = x/5$ anche studiando le intersezioni con rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, e l'asintoto $x = 0$ studiando le intersezioni con rette $x = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Osserviamo che nei punti dell'insieme si ha anche $\partial_y f(x,y) \neq 0$.

Questo implica che il dominio massimale della soluzione contenga l'intervallo $]0,+\infty[$. Poiché Γ non interseca l'asse delle ordinate, si conclude che la soluzione considerata quindi ha come dominio massimale $]0,+\infty[$ e ammette i due asintoti sopra specificati. Inoltre, essendo $y \neq 0$, i punti dove la derivata si annulla sono quelli dati dall'intersezione tra la soluzione stessa e la retta $2x - 5y = 0$. Poiché $y > 0$, e quindi $x > 0$, tali intersezioni sono nel primo quadrante, e quindi studiando il segno di y' si ottiene che sono tutti minimi. Ce ne deve essere uno solo: se ce ne fossero due infatti si dovrebbe avere un massimo locale tra essi, quindi un altro punto dove la derivata si anulla. Ma la derivata si annulla solo sulle intersezioni con $2x - 5y = 0$ e lì si ha un minimo. Pertanto la soluzione ha un asintoto verticale per $x = 0$, è sempre positiva, ammette un unico minimo quando interseca la retta $2x-5y = 0$, e vi è almeno un'intersezione con tale retta perché la soluzione ammette l'asintoto obliquo $y = x/5$.

Svolgimento (Esercizio 176). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $3x_2'(t) = x_1''(t) - x_1'(t) - 2$.

Sostituiamo l'espressione di $x_2'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$3(2x_2(t) - 2x_1(t)) = x_1''(t) - x_1'(t) - 2.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x_1''(t) - x_1'(t) + 6x_1(t) - 6x_2(t) - 2 = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $3x_2(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$x_1''(t) - x_1'(t) - 2\left(x_1'(t) - x_1(t) - 2t - 1\right) + 6x_1(t) - 2 = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x_1:

$$x_1''(t) - 3x_1'(t) + 8x_1(t) + 2(2t+1) - 2 = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x_1''(t) - \mathrm{Traccia}(A)\, x_1'(t) + \mathrm{Det}(A)\, x_1(t) = 2 - 2(2t+1).$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 3\mu + 8$, di discriminante $\delta = -23$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = \frac{1}{2}\left(3 - i\sqrt{23}\right)$ e $\mu_2 = \frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{23}\right)$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x_1(\cdot)$ sono $x_{1|o,1}(t) := e^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)$ e $x_{1|o,2} := -e^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$\begin{aligned} W(t) &:= \begin{pmatrix} x_{1|o,1}(t) & x_{1|o,2}(t) \\ \dot{x}_{1|o,1}(t) & \dot{x}_{1|o,2}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) & -e^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) \\ \frac{3}{2}e^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{23}e^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) & -\frac{1}{2}\sqrt{23}e^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \frac{3}{2}e^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$W(t)\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - 2(2t+1) \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t/2}(2-2(2t+1))\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{23}e^{3t}\cos^2\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{23}e^{3t}\sin^2\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)} \\ \\ \dfrac{e^{3t/2}(2-2(2t+1))\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{23}e^{3t}\cos^2\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{23}e^{3t}\sin^2\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$c(t) = -\frac{e^{-3t/2}\left((24t-7)\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)+\sqrt{23}(8t+3)\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)\right)}{16\sqrt{23}},$$
$$d(t) = \frac{e^{-3t/2}\left(\sqrt{23}(8t+3)\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)+(7-24t)\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)\right)}{16\sqrt{23}}.$$

La soluzione per la $x_1(\cdot)$ è allora:

$$x_1(t) = ce^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - de^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \frac{t}{2} - \frac{3}{16},\ c, d \in \mathbb{R},$$
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{23}ce^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) + \frac{3}{2}ce^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) +$$
$$-\frac{3}{2}de^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{23}de^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \frac{1}{2},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{3}\left(x_1'(t) - x_1(t) - 2t - 1\right) \\ &= \frac{1}{48}\left(-8e^{3t/2}\left(\sqrt{23}c + d\right)\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) + 8e^{3t/2}\left(c - \sqrt{23}d\right)\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - 3(8t+7)\right),\ c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In definitiva, la soluzione generale del sistema è:

$$\begin{cases} x_1(t) &= ce^{3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - de^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \frac{t}{2} - \frac{3}{16}, \\ \\ x_2(t) &= \frac{1}{48}\left(-8e^{3t/2}\left(\sqrt{23}c + d\right)\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) + 8e^{3t/2}\left(c - \sqrt{23}d\right)\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - 3(8t+7)\right), \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$.

Sostituendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} x_1(0) &= c - \frac{3}{16} = 1, \\ \\ x_2(0) &= \frac{1}{48}\left(8\left(c - \sqrt{23}d\right) - 21\right) = 0, \end{cases}$$

da cui $c = 19/16$ e $d = -\sqrt{23}/16$.

Si ottiene allora:

$$\begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{1}{16}\left(-8t+\sqrt{23}e^{3t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right)+19e^{3t/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right)-3\right), \\ x_2(t) &= \dfrac{1}{16}\left(-8t-3\sqrt{23}e^{3t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right)+7e^{3t/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right)-7\right). \end{cases}$$

Altro modo: In forma matriciale si ha $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'omogenea associata ha soluzione $x(t) = e^{At}c$, $c \in \mathbb{R}^2$. Calcoliamo quindi e^{At}. Il teorema di Hamilton-Cayley afferma che se $p(\cdot)$ è il polinomio caratteristico di $At \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, allora $p(At) = 0$. Pertanto e^{At} si scrive come un polinomio $r(\cdot)$ in At di grado strettamente minore del grado di $p(\lambda)$. Si ha quindi $e^{At} = r(At)$ dove

$$r(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{\deg p-1}x^{\deg p-1}.$$

Per calcolare i coefficienti α_i si procede nel modo seguente: per ogni autovalore λ_h di At (ovvero radice del polinomio caratteristico) di molteplicità μ_h si ha

$$\begin{cases} r(\lambda_h) = e^{\lambda_h}, \\ \vdots \\ \dfrac{d^{\mu_{h-1}}}{dx^{\mu_{h-1}}} r(\lambda_h) = e^{\lambda_h}. \end{cases}$$

Ripetendo per tutti gli autovalori di At si ottiene un sistema lineare determinato nei coefficienti α_i di n equazioni in n incognite, da cui i coefficienti di $r(\cdot)$ e pertanto e^{At}. Nel nostro caso, data la matrice

$$At = \begin{pmatrix} t & 3t \\ -2t & 2t \end{pmatrix},$$

il suo polinomio caratteristico è dato da $p(\lambda) = \det(At - \lambda \mathrm{Id}_2) = 0$, ovvero

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8t^2 - 3\lambda t.$$

Si ha allora $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(3t - i\sqrt{23}t\right)$ di molteplicità $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(3t + i\sqrt{23}t\right)$ di molteplicità $\mu_2 = 1$. Il sistema che ne risulta è

$$\begin{cases} \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1\left(3t - i\sqrt{23}t\right) = e^{\frac{1}{2}\left(3t-i\sqrt{23}t\right)}, \\ \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1\left(3t + i\sqrt{23}t\right) = e^{\frac{1}{2}\left(3t+i\sqrt{23}t\right)}, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\alpha_0 = \frac{1}{46}e^{\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{23}t}\left(23e^{i\sqrt{23}t} + 3i\sqrt{23}e^{i\sqrt{23}t} + 23 - 3i\sqrt{23}\right),$$

$$\alpha_1 = -\frac{ie^{\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{23}t}\left(-1+e^{i\sqrt{23}t}\right)}{\sqrt{23}t}.$$

Si ottiene quindi

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t/2}\left(\sqrt{23}\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)\right)}{\sqrt{23}} & \dfrac{6e^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)}{\sqrt{23}} \\ -\dfrac{4e^{3t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{2}\right)}{\sqrt{23}} & \dfrac{1}{23}e^{3t/2}\left(23\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right) + \sqrt{23}\sin\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Applichiamo ora il metodo della variazione delle costanti cercando soluzioni particolari nella forma $x(t) = e^{At}c(t)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $e^{At}c'(t) = b(t)$, da cui

$$c(t) = \int e^{-At}b(t)\,dt.$$

Quindi la soluzione generale è data da

$$x(t) = e^{At}c + \int e^{A(t-s)}b(s)\,ds, \qquad\qquad c \in \mathbb{R}^2,$$

e sostituendo le condizioni iniziali

$$x(t) = e^{At}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds.$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{1}{16}\left(-8t + \sqrt{23}e^{3t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right) + 19e^{3t/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right) - 3\right), \\ \\ x_2(t) &= \dfrac{1}{16}\left(-8t - 3\sqrt{23}e^{3t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right) + 7e^{3t/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}t}{2}\right) - 7\right), \end{cases}$$

che conferma il risultato precedente

Svolgimento (Esercizio 177). L'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Poniamo

$$f(x,y) = 3x^4 + 4x^2y^2 - x\sqrt{x^2+y^2} + y^4 + \frac{1}{20}.$$

In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = r^4\cos(2t) + 2r^4 - r^2\cos(t) + \frac{1}{20},$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \, r^4\cos(2\theta) + 2r^4 - r^2\cos\theta + \frac{1}{20} = 0, \, \rho \geq 0, \, \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Osserviamo che si ha $2-\cos(2\theta) > 0$ e quindi per $\rho \to +\infty$ si ha $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \to +\infty$, in particolare non può essere nullo per ρ sufficientemente grande. Pertanto l'insieme è limitato, ed è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0) = 0$, ovvero $3x^4 - |x|x + \frac{1}{20} = 0$. Quindi studiamo le due equazioni $3x^4 - x^2 + \frac{1}{20} = 0$ con la condizione $x > 0$ e $3x^4 + x^2 + \frac{1}{20} = 0$ con la condizione $x \leq 0$. La seconda equazione non ammette soluzioni. Si ottengono dalla prima i punti accettabili $P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{30}\left(5-\sqrt{10}\right)}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{30}\left(5+\sqrt{10}\right)}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y) = 0$, ovvero $y^4 + \frac{1}{20} = 0$, senza soluzioni reali.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(12x^3 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} + 8xy^2, -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 8x^2y + 4y^3\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\nabla f(P_1) = \left(-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{3}\left(5-\sqrt{10}\right)}, 0\right)$$
$$\nabla f(P_2) = \left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{3}\left(5+\sqrt{10}\right)}, 0\right).$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$r_{P_1}: x = \sqrt{\frac{1}{30}\left(5-\sqrt{10}\right)},$$
$$r_{P_2}: x = \sqrt{\frac{1}{30}\left(5+\sqrt{10}\right)}.$$

In P_1, P_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$, non è possibile invece applicarlo per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$, perché la tangente è verticale.

Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati di $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2$ sfruttando l'espressione in coordinate polari. Infatti da essa si ha

$$\rho^4(2\cos^2\theta + 1) - \rho^2\cos(\theta) + \frac{1}{20} = 0.$$

Poniamo $k = \rho^2$ e $s = \cos\theta$, ottenendo

$$k^2(2s^2+1) - ks + \frac{1}{20} = 0.$$

I punti dove le derivate rispettivamente di k e s rispetto a ρ e θ si annullano andranno studiati a parte. Si ha che $\rho = 0$ non appartiene all'insieme, e i punti con $\sin\theta = 0$ corrispondono alle intersezioni con l'asse delle ascisse. Gli estremali di $k = \rho^2$ vanno cercati tra i punti dove la derivata rispetto a s è nulla, ovvero $-k + 4sk^2 = 0$. Nella fattispecie, per $s = 0$ otteniamo le intersezioni di Γ con l'asse delle ordinate, ovvero nessuna, e $k = 0$ implica $\rho = 0$, da escludere. L'unica possibilità è quindi $k = 1/4s$. Sostituendo, si ottiene dall'equazione in coordinate polari che $s^2 = 3/40$, pertanto $\rho^4 = 3/40$, da cui $\rho^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$ e $s = 1/4k = \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{6}}$, da cui $\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$. Calcolando i valori assunti da h nei punti corrispondenti e nei punti esclusi appartenenti all'insieme, si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{6}}, \pm\frac{1}{2\sqrt[4]{30}}\right)$ e tale valore massimo è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$. Analogamente, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $\left(\sqrt{\frac{1}{30}\left(5-\sqrt{10}\right)}, 0\right)$, e tale valore minimo è $\frac{1}{30}\left(5-\sqrt{10}\right)$.

Svolgimento (Esercizio 178). Posto $z = f(x,y)$, parametrizziamo il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|, 1 \leq x^2+y^2 \leq 16\}$ in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$. Da $x \geq |y|$ otteniamo $|\theta| \leq \pi/4$ e da $1 \leq x^2+y^2 \leq 16$ otteniamo $1 \leq \rho \leq 4$. Pertanto, osservato che

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}, \frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x),$$

si ha

$$A = \iint_D \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^4 \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left(4\sqrt{17}-\sqrt{2}+\log\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)\right).$$

Per calcolare una primitiva di $\sqrt{1+\rho^2}$ si pone $\rho = \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, da cui $t = \log(\rho + \sqrt{1+\rho^2})$, $dt = \cosh\rho\,d\rho$, e si ricordi che $\sinh' t = \cosh t$, $\cosh' t = \sinh t$, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $\cosh 2t = 2\cosh^2 t - 1$. Quindi

$$\int \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \int \sqrt{1+\sinh t}\cosh t\,dt = \int \cos h^2 t\,dt = \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t) = \frac{1}{2}(\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}+t) = \frac{1}{2}(\log(\rho+\sqrt{1+\rho^2})+\rho\sqrt{1+\rho^2}).$$

Altro modo: Parametrizziamo direttamente la superficie Σ ponendo $\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \theta)$, dove $\rho \in [1,4]$ e $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. Lo Jacobiano della parametrizzazione e l'elemento d'area è

$$\operatorname{Jac}\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$d\sigma = \sqrt{\det^2\begin{pmatrix} \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det^2\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}} = \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta.$$

L'area richiesta è allora

$$A = \int_\Sigma d\sigma = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^4 \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left(4\sqrt{17}-\sqrt{2}+\log\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)\right),$$

con conti analoghi al caso precedente.

Svolgimento (Esercizio 179). Si veda la soluzione dell'Esercizio 174.

Svolgimento (Esercizio 180). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{2X(x)T'(t) - 4T(t)X''(x) + T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{2T'(t)}{T(t)} + \frac{X(x) - 4X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{2T'(t)}{T(t)} = \frac{X(x) - 4X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 2T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ -4X''(x) - \lambda X(x) + X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$-4\mu^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$

Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{N}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = -16(\lambda - 1)$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda > 1$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = -\frac{1}{8}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = -\frac{\sqrt{\lambda-1}}{2}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = 4n^2 + 1$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda = 4n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha pertanto:

$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:

$$2T_n'(t) + (4n^2 + 1)T(t) = 0,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:

$$T_n(t) = d_n e^{-\frac{(4n^2+1)t}{2}}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = b_n e^{-\frac{(4n^2+1)t}{2}} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$

Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:

$$u(0,x) = 3x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione

$$f(x) = 3x,$$

nell'intervallo $[0,\pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi,\pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 3x\sin(nx)\,dx = -\frac{6(-1)^n}{n}.$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{6(-1)^n e^{-\frac{(4n^2+1)t}{2}} \sin(nx)}{n}.$$

A causa della presenza dell'esponenziale di esponente negativo, la serie e tutte le derivate convergono totalmente, pertanto la serie è una soluzione classica del problema.

Svolgimento (Esercizio 181). Poniamo $f(x,y) = -x^4 - 2x^2y^2 + x^2 + 4xy - y^4 + y^2$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\left(2\sin(2\theta) - \rho^2 + 1\right).$$

Osservato che l'origine appartiene all'insieme, e che può essere ritrovata ponendo ad esempio $\theta = \pi/12$, e che $\rho \geq 0$, possiamo scrivere

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) :\ \rho^2 = 2\sin(2\theta) + 1,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

L'insieme è quindi ovviamente limitato, inscritto nel cerchio centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$, ed è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0) = 0$, ovvero $x^2 - x^4 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (1,0)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y) = 0$, ovvero $y^2 - y^4 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = (0,-1)$, $Q_2 = (0,0)$, $Q_3 = (0,1)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(-4x^3 - 4xy^2 + 2x + 4y, -4x^2y + 4x - 4y^3 + 2y\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}\nabla f(P_1) &= (2,-4)\\ \nabla f(P_2) &= (0,0)\\ \nabla f(P_3) &= (-2,4)\\ \nabla f(Q_1) &= (-4,2)\\ \nabla f(Q_2) &= (0,0)\\ \nabla f(Q_3) &= (4,-2)\end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned}r_{P_1} :y &= \frac{x+1}{2}\\ r_{P_3} :y &= \frac{x-1}{2}\\ r_{Q_1} :y &= 2x-1\\ r_{Q_3} :y &= 2x+1.\end{aligned}$$

In P_1, P_3, Q_1, Q_3, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. In P_1, P_3, Q_1, Q_3, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi di $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2$ vincolati a Γ utilizzando la parametrizzazione in coordinate polari. Il minimo assoluto è 0 assunto in $(0, 0)$. Per il massimo, dalla parametrizzazione si ha per $\rho \neq 0$:

$$\rho^2 = 2\sin(2\theta) + 1,$$

quindi il massimo è assunto per $\theta = \pi/4$ e $\theta = 5\pi/4$, ovvero nelle intersezioni di Γ con la retta $y = x$ e vale 3, i punti di massimo sono $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Svolgimento (Esercizio 182). Dall'equazione della curva si ottiene

$$y(x) = \frac{2x^2 - x \pm 2\sqrt{2}\sqrt{x^4 - 2x^5}}{4x^2 - 1} = \pm\frac{2\sqrt{2}x^2\sqrt{1-2x}}{4x^2-1} + \frac{2x^2}{4x^2-1} - \frac{x}{4x^2-1}.$$

Per $0 < x < 1/4$, la curva presenta quindi due rami, entrambi nel primo quadrante. Il ramo cui appartiene il punto $(1/4, 1/3)$, quindi quello indicato dall'esercizio, corrisponde alla scelta del segno negativo. L'area richiesta è quindi l'integrale su $0 < x < 1/4$ di $y(x)$ dove in $y(x)$ si è scelto il segno negativo. Si ha immediatamente:

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{4x^2-1} = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2-1} = \frac{1}{8}\log|4x^2-1|,\\ &\int \frac{2x^2}{4x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{4x^2}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x^2-1+1}{4x^2-1}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{4x^2-1}\\ &\qquad = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \frac{2dx}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{2x-1} - \int \frac{dx}{2x+1}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|\end{aligned}$$

Per calcolare una primitiva di

$$\frac{2\sqrt{2}x^2\sqrt{1-2x}}{4x^2-1}$$

poniamo $t=\sqrt{1-2x}$ da cui $x=\dfrac{1-t^2}{2}$ e $dx=-t\,dt$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\int \frac{2\sqrt{2}x^2\sqrt{1-2x}}{4x^2-1}\,dx &= \int -\frac{\left(t^2-1\right)^2}{\sqrt{2}\,(t^2-2)}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^2-2}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(t^2+\frac{1}{t^2-2}\right)dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^3}{3}+\int\frac{dt}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}\right) = -\frac{(1-2x)^{3/2}}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\left(\int\frac{dt}{t-\sqrt{2}}+\int\frac{dt}{t+\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{(1-2x)^{3/2}}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| = -\frac{(1-2x)^{3/2}}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{2}}\right|\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{1/4} y(x)\,dx = -\left(\frac{3\log 3-1}{12}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\log\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\log(2)}{8}\right)+\frac{1}{8}\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

L'espressione precedente, dopo varie manipolazioni algebriche, si può scrivere anche in modo più compatto come

$$\int_0^{1/4} y(x)\,dx = \frac{1}{24}\left(5-4\sqrt{2}-6\log\left(\frac{27}{2}-9\sqrt{2}\right)\right)$$

Svolgimento (Esercizio 183). Poniamo

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))\,,\\ \varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))\,.\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =&\partial_x F_1(x,y,z)+\partial_y F_2(x,y,z)+\partial_z F_3(x,y,z)=0,\\ \mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =&\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\ =&\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & z^2-y\\ \vec{e}_2 & \partial_y & x+z\\ \vec{e}_3 & \partial_z & 2x\end{pmatrix}\\ =&(-1,2z-2,2)\,.\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F}\neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t)=(-3\sin(t),3\cos(t),0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi}\vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ =&\int_0^{2\pi}(-3\sin(t),3\cos(t),6\cos(t))\cdot(-3\sin(t),3\cos(t),0)\;dt\\ =&\int_0^{2\pi}\left(9\sin^2(t)+9\cos^2(t)\right)\,dt\\ =&18\pi.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ 8u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\ du\,dv\\
&= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|\ du\,dv\\
&=\sqrt{(24u-2v)^2+(8u+2v)^2+16}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1+\det^2 B_2+\det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(0,0,0)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=(0,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=(0,0,-1)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right)\,dv\,dv\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\begin{pmatrix} \left(4u^2+v^2\right)^2-u+v & 1 & 3\\ 4u^2+u+v^2+3v & 1 & -1\\ 2(u+3v) & 8u & 2v\end{pmatrix}\,dv\,du\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\big(128u^5+32u^4v+64u^3v^2+96u^3+16u^2v^3-8u^2v+16u^2+\\
&\quad+8uv^4+24uv^2+76uv-8u+2v^5-2v^3-4v^2-24v\big)\ dv\,du=256.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G}=\mathrm{rot}\,\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)\\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right)\,dv\,dv\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3\\ 2\left(4u^2+v^2\right)-2 & 1 & -1\\ 2 & 8u & 2v\end{pmatrix}\,dv\,du\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\big(192u^3-16u^2v+48uv^2-56u-4v^3+2v-8\big)\ dv\,du=-128.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 184). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := \left(1-36x^3\right)\,dx - 8x^2y^3\,dy =: p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 16xy^3,$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y)=0$. Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y)}{q(x,y)} = \frac{16xy^3}{-8x^2y^3} = -\frac{2}{x},$$

che è una funzione della sola x. Pertanto si ha il fattore integrante

$$\lambda(x) = e^{\int -2/x} = e^{-2\log|x|} = \frac{1}{|x|^2},$$

definito per $x \neq 0$. Studiamo l'integrazione per $x>0$. Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P=(P_x,P_y)=(1,0)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0,y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x,P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0,y)$ da P_y a y_0:

$$\int_\gamma \lambda\omega = \int_{\gamma_1}\lambda\omega + \int_{\gamma_2}\lambda\omega = \int_1^{x_0}\frac{1-36x^3}{x^2}\,dx + \int_0^{y_0} -8y^3\,dy = -\left(18x_0^2 + \frac{1}{x_0} + 2y_0^4 - 19\right).$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y) = -\left(18x^2 + \frac{1}{x} + 2y^4\right),$$

e le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y)=c$ e in forma esplicita da

$$y(x) = \pm 2^{-1/4}\sqrt[4]{-c-18x^2-\frac{1}{x}}.$$

Si verifica per calcolo diretto che tali espressioni sono valide anche per $x<0$. La soluzione soddisfacente a $y(1)=1$ corrisponde a $c=-21$ e alla scelta positiva del segno:

$$y(x) = 2^{-1/4}\sqrt[4]{21-18x^2-\frac{1}{x}}.$$

Tale soluzione è definita in un intervallo limitato, poiché si deve avere $21-18x^2-\frac{1}{x} \geq 0$. La derivata si annulla solo per $\partial_x V(x,y)=0$, ovvero per $\bar{x} = 6^{-2/3}$. Poiché $21-18x^2-\dfrac{1}{x}$ tende a $-\infty$ per $x \to 0$ e $x \to +\infty$, si ha che $\bar{x}$ è punto di massimo assoluto.

Altro metodo: moltiplicando l'equazione per y^3 si ottiene

$$y^3(x)y'(x) = \frac{1}{8x^2} - \frac{9}{2}x,$$

da cui

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dx}[y^4(x)] = \frac{1}{8x^2} - \frac{9}{2}x,$$

e integrando

$$\frac{1}{4}y^4(x) = -\frac{1}{8x} - \frac{9}{4}x^2 + k,\ k \in \mathbb{R},$$

da cui

$$y(x) = \pm\sqrt[4]{4c - \frac{1}{2x} - 9x^2} = \pm 2^{-1/4}\sqrt[4]{8k - \frac{1}{x} - 18x^2},$$

posto $c = 8k$ si ha il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 185). Poniamo $f(x,y) = x^4 - 4x^2y + 3y^2 - 4$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\cos^4(\theta) - 4\rho^3\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 3\rho^2\sin^2(\theta) - 4,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho^4\cos^4(\theta) - 4\rho^3\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 3\rho^2\sin^2(\theta) - 4 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Osserviamo che da $f(x,y) = 0$ si può ricavare y come funzione di x. Si ottengono due archi:

$$y_-(x) = \frac{1}{3}\left(2x^2 - \sqrt{x^4 + 12}\right),$$
$$y_+(x) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^4 + 12} + 2x^2\right).$$

Quindi $(x,y) \in \Gamma$ se e solo se $y = y_-(x)$ oppure $y = y_+(x)$. Tali archi sono definiti su tutto $\mathbb{R}$, pertanto l'insieme non è limitato, quindi non può essere compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0) = 0$, ovvero $x^4 - 4 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = \left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt{2}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y) = 0$, ovvero $3y^2 - 4 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $Q_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 8xy, 6y - 4x^2\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\nabla f(P_1) = \left(-8\sqrt{2}, -8\right)$$
$$\nabla f(P_2) = \left(8\sqrt{2}, -8\right)$$
$$\nabla f(Q_1) = \left(0, -4\sqrt{3}\right)$$
$$\nabla f(Q_2) = \left(0, 4\sqrt{3}\right)$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$r_{P_1} : y = -\sqrt{2}\left(x + \sqrt{2}\right)$$
$$r_{P_2} : y = -\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - x\right)$$
$$r_{Q_1} : y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$r_{Q_2} : y = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x,y) = 0$. In P_1, P_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Poiché l'insieme non è compatto, non è garantita l'esistenza di massimi e minimi vincolati. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$y_-(x) < \frac{2}{3}x^2 < y_+(x).$$

Quindi

(1) $h(x, y_-(x)) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si ha $h(x, y_-(x)) \to -\infty$ per $|x| \to +\infty$, quindi non esistono punti di minimo assoluto.

(2) $h(x, y_+(x)) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si ha $h(x, y_+(x)) \to +\infty$ per $|x| \to +\infty$, quindi non esistono punti di massimo assoluto.

Svolgimento (Esercizio 186). Si veda la soluzione dell'Esercizio 23.

Svolgimento (Esercizio 187). Poniamo

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),\\ \varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)).\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = z^2 + z,\\ \mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\ =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & xz\\ \vec{e}_2 & \partial_y & yz^2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x+y+1\end{pmatrix}\\ =& (1-2yz, x-1, 0).\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t), 1)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ =& \int_0^{2\pi} \big(3t\cos(t), 3t^2\sin(t), 3\sin(t)+3\cos(t)+1\big)\cdot(-3\sin(t), 3\cos(t), 1)\;dt\\ =& \int_0^{2\pi} \big(9t^2\sin(t)\cos(t) + 3\sin(t) + 3\cos(t) - 9t\sin(t)\cos(t) + 1\big)\;dt\\ =& \frac{13\pi}{2} - 9\pi^2.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & -3\\ 2u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\ =& \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right| du\,dv\\ =& \sqrt{(2u-4v)^2 + (6u-2v)^2 + 25}\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,0,0) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = (0,0,-1)\,.$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} (2u+v)\left(u^2+v^2\right) & 2 & 1 \\ (-u-3v)\left(u^2+v^2\right)^2 & -1 & -3 \\ u-2v+1 & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(-2u^6 - 2u^5v + 8u^4v^2 + 12u^4 - 4u^3v^3 + 2u^3v + 22u^2v^4\right) dv\,du + \\
&\quad + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(10u^2v^2 - 2uv^5 + 2uv^3 - 5u + 12v^6 - 2v^4 + 10v - 5\right) dv\,du \\
&= \frac{388}{63}.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} 1-2(-u-3v)\left(u^2+v^2\right) & 2 & 1 \\ 2u+v-1 & -1 & -3 \\ 0 & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(12u^4 + 32u^3v + 4u^2 + 32uv^3 - 6uv + 4u - 12v^4 - 4v^2 + 2v\right) dv\,du \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{cases} \gamma_1(u) = \varphi(u,-1) = \big(2u-1, 3-u, u^2+1\big)\,,\ u \in [-1,1] \\ \gamma_2(v) = \varphi(1,v) = \big(v+2, -3v-1, v^2+1\big)\,,\ v \in [-1,1] \\ \gamma_3(u) = \varphi(-u,1) = \big(1-2u, u-3, u^2+1\big)\,,\ u \in [-1,1] \\ \gamma_4(v) = \varphi(-1,-u) = \big(-u-2, 3u+1, u^2+1\big)\,,\ v \in [-1,1]\,, \end{cases}$$

le cui derivate sono:

$$\begin{cases} \dot\gamma_1(u) = (2,-1,2u)\,,\ u \in [-1,1] \\ \dot\gamma_2(v) = (1,-3,2v)\,,\ v \in [-1,1] \\ \dot\gamma_3(u) = (-2,1,2u)\,,\ u \in [-1,1] \\ \dot\gamma_4(v) = (-1,3,2v)\,,\ v \in [-1,1]\,, \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\vec\ell \\ =& \int_{-1}^{1} \Big((2u-1)\left(u^2+1\right), (3-u)\left(u^2+1\right)^2, u+3\Big) \cdot (2,-1,2u)\ du \\ =& \int_{-1}^{1} \Big(-(3-u)\left(u^2+1\right)^2 + 2(2u-1)\left(u^2+1\right) + 2u(u+3)\Big)\ du \\ =& -\frac{76}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\vec\ell \\ =& \int_{-1}^{1} \Big((v+2)\left(v^2+1\right), (-3v-1)\left(v^2+1\right)^2, 2-2v\Big) \cdot (1,-3,2v)\ dv \\ =& \int_{-1}^{1} \Big(-3(-3v-1)\left(v^2+1\right)^2 + (v+2)\left(v^2+1\right) + 2(2-2v)v\Big)\ dv \\ =& \frac{208}{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\vec\ell \\ =& \int_{-1}^{1} \Big((1-2u)\left(u^2+1\right), (u-3)\left(u^2+1\right)^2, -u-1\Big) \cdot (-2,1,2u)\ du \\ =& \int_{-1}^{1} \Big((u-3)\left(u^2+1\right)^2 - 2(1-2u)\left(u^2+1\right) + 2(-u-1)u\Big)\ du \\ =& -\frac{268}{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-1}^{1} \Big((-v-2)\left(v^2+1\right), (3v+1)\left(v^2+1\right)^2, 2v \Big) \cdot (-1,3,2v)\, dv \\
=& \int_{-1}^{1} \Big(4v^2 + 3(3v+1)\left(v^2+1\right)^2 - (-v-2)\left(v^2+1\right) \Big)\, dv \\
=& \frac{96}{5},
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 188). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $y'(t) = x''(t) - x'(t) - 2t$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$4x(t) + y(t) + 4 = x''(t) - x'(t) - 2t.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - x'(t) - 4x(t) - y(t) - 2t - 4 = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$t^2 + x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) - 2t - 4 = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$t^2 + x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) - 2t - 4 = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \mathrm{Traccia}(A)\, x'(t) + \mathrm{Det}(A)\, x(t) = -t^2 + 2t + 4.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 2\mu - 3$, di discriminante $\delta = 16$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = -1$ e $\mu_2 = 3$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{-t}$ e $x_{o,2} := e^{3t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 + 2t + 4 \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} e^{t} \left(-t^2 + 2t + 4\right) \\ \frac{1}{4} e^{-3t} \left(-t^2 + 2t + 4\right) \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned}
c(t) &= \frac{1}{4} e^{t} (t-4)t, \\
d(t) &= -\frac{1}{108} e^{-3t} \left(-9t^2 + 12t + 40\right).
\end{aligned}$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$x(t) = ce^{-t} + de^{3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{10t}{9} - \frac{10}{27},\ c, d \in \mathbb{R},$$
$$\dot{x}(t) = c\left(-e^{-t}\right) + 3de^{3t} + \frac{2t}{3} - \frac{10}{9},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = -t^2 + x'(t) - x(t) = -2ce^{-t} + 2de^{3t} - \frac{4t^2}{3} + \frac{16t}{9} - \frac{20}{27},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) & = ce^{-t} + de^{3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{10t}{9} - \frac{10}{27}, \\ \\ y(t) & = -2ce^{-t} + 2de^{3t} - \frac{4t^2}{3} + \frac{16t}{9} - \frac{20}{27}, \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 189). Poniamo $f(x, y) = x^4 + 8y^2 + 8y - 2$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\cos^4(\theta) + 8\rho^2\sin^2(\theta) + 8\rho\sin(\theta) - 2,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) :\ \rho^4\cos^4(\theta) + 8\rho^2\sin^2(\theta) + 8\rho\sin(\theta) - 2 = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

L'insieme è limitato, ed è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x, 0) = 0$, ovvero $x^4 - 2 = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = \left(-\sqrt[4]{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(\sqrt[4]{2}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0, y) = 0$, ovvero $8y^2 + 8y - 2 = 0$. Si ottengono i punti $Q_1 = \left(0, -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $Q_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x, y) = \left(4x^3, 16y + 8\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\nabla f(P_1) = \left(-4\ 2^{3/4}, 8\right)$$
$$\nabla f(P_2) = \left(4\ 2^{3/4}, 8\right)$$
$$\nabla f(Q_1) = \left(0, -8\sqrt{2}\right)$$
$$\nabla f(Q_2) = \left(0, 8\sqrt{2}\right)$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$r_{P_1} : y = \frac{x + \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}$$
$$r_{P_2} : y = \frac{\sqrt[4]{2} - x}{\sqrt[4]{2}}$$
$$r_{Q_1} : y = -\frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$
$$r_{Q_2} : y = -\frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}}.$$

In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. In P_1, P_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x, y) = 0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti dell'insieme dove $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ andranno studiati a parte. Nel nostro caso il gradiente non si annulla mai in punti dell'insieme. Poniamo $L(x, y, \lambda) := h(x, y) + \lambda f(x, y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$ nelle incognite x e y. Si ha:

$$\begin{cases} 4\lambda x^3 + 2x = 0 \\ \lambda(16y + 8) + 2 = 0 \\ x^4 + 8y^2 + 8y - 2 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $\left(0, \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{2^{3/4}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2^{3/4}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{6}}\right)$ Calcolando i valori assunti da h in questi punti ed eventualmente in quelli precedentemente esclusi, si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $\left(-\frac{2^{3/4}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2^{3/4}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{6}}\right)$ e tale valore massimo è $2\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$. Analogamente, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $\left(0, \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$, e tale valore minimo è $\sqrt{2}\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Svolgimento (Esercizio 190). Parametrizziamo Σ in coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$ con $z \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Si ottiene $\rho = x^2 + y^2$, $z = 2 - \rho^2 \geq 0$.

$$\Sigma : \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2 - \rho^2) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione $\psi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2 - \rho^2)$ è

$$\text{Jac}\psi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ -2\rho & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento d'area può essere calcolato prendendo il modulo del prodotto vettoriale delle colonne di questa matrice, si ha quindi $d\sigma = \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, d\theta$. Pertanto, posto $v = \rho^2$ da cui $dv = 2\rho\, d\rho$ e $u = \sqrt{1 + 4v}$ da cui $u\, du = 2dv$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \sqrt{1 + 4\rho^2}\, 2\rho\, d\rho = \pi \int_0^2 v \cdot \sqrt{1 + 4v}\, dv = \pi \int_1^3 \frac{u^2 - 1}{8} u^2\, du \\ &= \frac{\pi}{8} \int_1^3 (u^4 - u^2)\, du = \frac{149}{30}\pi. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 191). Poniamo

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)), \\ \varphi(u, v) &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)). \end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =&\partial_x F_1(x,y,z)+\partial_y F_2(x,y,z)+\partial_z F_3(x,y,z)=2xyz,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2yz\\ \vec{e}_2 & \partial_y & xz\\ \vec{e}_3 & \partial_z & y\end{pmatrix}\\
=&\left(1-x, x^2y, z-x^2z\right).
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F}\neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t)=(-4\sin(t),\cos(t),1)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
=&\int_0^{2\pi}\left(16t\sin(t)\cos^2(t), 4t\cos(t),\sin(t)\right)\cdot(-4\sin(t),\cos(t),1)\;dt\\
=&\int_0^{2\pi}\left(\sin(t)+4t\cos^2(t)-64t\sin^2(t)\cos^2(t)\right)\;dt\\
=&-12\pi^2.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2u & 4v\\ 2u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=&\left|\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|du\,dv\\
=&\sqrt{144u^2v^2+(2u-4v)^2+(2u+8v)^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma=\sqrt{\det^2 B_1+\det^2 B_2+\det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(2,-1,1)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=(1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\vec{G}, \Sigma) = \int_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac} \varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array} \right) dv\, dv \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \det \begin{pmatrix} -2u - v + 1 & 2 & 1 \\ (2u+v)^2 \left(2v^2 - u^2\right) & -2u & 4v \\ -(2u+v)^2 \left(u^2 + v^2\right) + u^2 + v^2 & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\, du \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \left(-16u^5 - 32u^4 v - 12u^3 v^2 + 2u^3 - 60u^2 v^3 + 32u^2 v - 62uv^4 + 14uv^2 - 12uv - 16v^5 + 8v^3\right) dv\, du \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Svolgimento (Esercizio 192). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{2X(x)T'(t) + 2T(t)X''(x) + T(t)X'(x) + 6T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{2T'(t)}{T(t)} + \frac{2X''(x) + X'(x) + 6X(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{2T'(t)}{T(t)} = \frac{2X''(x) + X'(x) + 6X(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 2T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ 2X''(x) + X'(x) - (\lambda - 6)X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$2\mu^2 + \mu - \lambda + 6 = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$

Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{N}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = 8\lambda - 47$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda < \frac{47}{8}$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = \frac{1}{4}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = \frac{1}{4}\sqrt{47 - 8\lambda}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = \frac{1}{8}\left(47 - 16n^2\right)$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda = \frac{1}{8}\left(47 - 16n^2\right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha pertanto:

$$X_n(x) = e^{-x/4} c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:

$$\left(\frac{47}{8} - 2n^2\right) T(t) + 2T_n'(t) = 0,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:

$$T_n(t) = d_n e^{\frac{1}{16}\left(16n^2 - 47\right)t}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t) X_n(x) = b_n e^{\frac{1}{16}\left(16n^2 - 47\right)t - \frac{x}{4}} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$

Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:

$$u(0,x) = 5x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x/4} b_n \sin(nx).$$

Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione

$$f(x) = 5e^{x/4} x,$$

nell'intervallo $[0, \pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi, \pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 5e^{x/4}x\sin(nx)\,dx \\ =& -\frac{160n\left(e^{\pi/4}(-1)^n\left(16\pi n^2+\pi-8\right)+8\right)}{\pi\left(16n^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{160n\left(e^{\pi/4}(-1)^n\left(16\pi n^2+\pi-8\right)+8\right)e^{\left(n^2-\frac{47}{16}\right)t-\frac{x}{4}}\sin(nx)}{\pi\left(16n^2+1\right)^2}.$$

Svolgimento (Esercizio 193). Poniamo $f(x, y) = x^4 + 4x + y^3 + 2y^2 + 4y$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\cos^4\theta + \rho^3\sin^3\theta + 2\rho^2\sin^2\theta + 4\rho\sin\theta + 4\rho\cos\theta,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^4\cos^4\theta + \rho^3\sin^3\theta + 2\rho^2\sin^2\theta + 4\rho\sin\theta + 4\rho\cos\theta = 0,\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Osserviamo che fissato arbitrariamente un valore di x, si ha che $f(x, \cdot)$ è un polinomio di terzo grado nelle y, che quindi ammette sempre almeno una radice reale. Di conseguenza, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = 0$. Ma allora l'insieme non è limitato, quindi non può essere compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x, 0) = 0$, ovvero $x^4 + 4x = 0$. Si ottengono i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = \left(-2^{2/3}, 0\right)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0, y) = 0$, ovvero $y^3 + 2y^2 + 4y = 0$. Si ottiene ancora il punto $P_1 = (0, 0)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da: $\nabla f(x, y) = \left(4x^3 + 4, 3y^2 + 4y + 4\right)$. Nel nostro caso si ha $\nabla f(P_1) = (4, 4)$, $\nabla f(P_2) = (-12, 4)$. Le rette tangenti sono quindi $r_{P_1} : y = -x$, $r_{P_2} : y = 3\left(x + 2^{2/3}\right)$. In P_1, P_2 la tangente non è né verticale né orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente funzioni $x = x(y)$ o $y = y(x)$ implicitamente definite da $f(x, y) = 0$. Abbiamo già osservato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = 0$, quindi non esiste massimo assoluto vincolato per $h(\cdot)$ su Γ. Per quanto riguarda il minimo, si ha che $h(x, y) \geq 0$ con uguaglianza solo se $x = 0$. Poiché $\Gamma \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = (0, 0)$, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $(0, 0)$, e tale valore minimo è 0. Per quanto riguarda $k(x, y)$, osserviamo che l'equazione $f(x, y) = 0$ implica $y^3 + 2y^2 + 4y = -(x^4 + 4x)$. Posto $\varphi(y) = y^3 + 2y^2 + 4y$, si ha $\dot{\varphi}(y) = 3y^2 + 4y + 4$ che non si annulla per nessun valore di $\mathbb{R}$. Ma allora $s(\cdot)$ è strettamente monotona crescente, pertanto invertibile con inversa $\psi = \varphi^{-1}$ strettamente monotona crescente. Si ha quindi $y = \psi(-x^4 - 4x)$ con ψ strettamente monotona crescente. Dunque i massimi e i minimi di $k(x, y) = y$ vincolati vengono raggiunti in corrispondenza dei massimi e minimi di $-x^4 - 4x$, rispettivamente. Tale espressione non ha minimo assoluto, avendo estremo inferiore $-\infty$, pertanto $k(x, y)$ non ammette minimo assoluto vincolato. Per quanto riguarda il massimo, la derivata di tale espressione è $-4x^3 - 4$ che si annulla per $x = -1$, che risulta essere l'unico punto di massimo assoluto. Perciò il massimo è raggiunto nel punto di ascissa $x = -1$ e ordinata pari all'unica radice reale di $y^3 + 2y^2 + 4y - 3 = 0$.

Svolgimento (Esercizio 194). *Primo metodo per il calcolo del volume:* La distanza del generico punto di $\gamma(t)$ dall'asse di rotazione è data da $x(t)$, pertanto il solido considerato è parametrizzabile nel modo seguente

$$K := \{\varphi(\rho,\theta,t) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z(t)) : 0 \le \rho \le x(t),\, \theta \in [0,2\pi],\, t \in [0,\pi/2[\}.$$

La matrice Jacobiana della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\rho,\theta,t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \tan t \end{pmatrix}, \qquad |\mathrm{detJac}\varphi(\rho,\theta,t)| = \rho\tan t,$$

ricordando che $\tan t \ge 0$ in $t \in [0,\pi/2[$. Pertanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) &= \iiint_K dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{x(t)} \rho\tan t\,d\rho\right)dt\right)d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{x^2(t)}{2}\tan t\,dt \overset{v=\sin t}{=} \pi\int_0^1 \frac{(1-v)^2 v}{1-v^2}\,dv = \pi\int_0^1\frac{(1-v)v}{1+v}\,dv \\ &\overset{w=v+1}{=} \pi\int_1^2 \frac{-2+3w-w^2}{w}\,dw = \pi\left(-2\log 2 + \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Secondo metodo per il calcolo del volume: dall'equazione in coordinate parametriche si risale all'equazione in coordinate cartesiane. Infatti $e^{-z} = \cos t$ e quindi $x(z) = 1 - \sqrt{1-\cos^2 t} = 1 - \sqrt{1-e^{-2z}}$, con $z > 0$ (che si ricava dall'espressione in coordinate parametriche ricordando l'intervallo di t). Ricordando che la rotazione avviene attorno all'asse z, si ha

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi\int_0^{+\infty} x^2(z)\,dz = \pi\int_0^{+\infty}\left(1-\sqrt{1-e^{-2z}}\right)^2 dz.$$

La sostituzione $v^2 = 1 - e^{-2z}$, da cui $2vdv = 2e^{-2z}\,dz$ e quindi $dz = \dfrac{vdv}{1-v^2}$, riduce l'integrale precedente a

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi\int_0^1 \frac{(1-v)^2 v\,dv}{1-v^2},$$

che riconduce il calcolo al risultato precedente.

Terzo metodo per il calcolo del volume: Osserviamo che $\dot z(t) = \tan t$, pertanto tale funzione è invertibile in $[0,\pi/2[$. Si ottiene quindi $t = t(z)$. con $z(t(z)) = z$, $t(z(t)) = t$, $dz = \dot z(t)\,dt$. Ma allora, ricordando che la rotazione avviene attorno all'asse z, si ha

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi\int_{z(0)}^{z(\pi/2)} x^2(t(z))\,dz \overset{z=z(t)}{=} \pi\int_0^{\pi/2} x^2(t)\dot z(t)\,dt = \pi\int_0^{\pi/2}(1-\sin t)^2\tan t\,dt,$$

(dove si pone $z(\pi/2) = +\infty$) che riconduce il calcolo al primo caso.

Primo metodo per la stima della superficie: La superficie è parametrizzata da

$$S := \{\psi(t,\theta) := (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) : t \in [0,\pi/2[,\, \theta \in [0,2\pi]\}.$$

La matrice Jacobiana della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\,\psi(t,\theta) = \begin{pmatrix} -\cos t\cos\theta & -(1-\sin t)\sin\theta \\ -\cos t\sin\theta & \cos\theta(1-\sin t) \\ \tan t & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento d'area è quindi

$$d\sigma = (1-\sin t)\sqrt{\tan^2(t)+\cos^2(t)}\,d\theta\,dt = \frac{1-\sin t}{\cos t}\sqrt{\sin^2(t)+\cos^4(t)}\,d\theta\,dt$$

Osserviamo che $\cos^4 t + \sin^2 t \leq \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, quindi

$$\begin{aligned}\text{Area}(S) &= \iint_S d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin t}{\cos t}\sqrt{\sin^2(t)+\cos^4(t)}\,d\theta\,dt \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sin t}{\cos t}\,dt\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\sin t)(1+\sin t)}{\cos t(1+\sin t)}\,dt = 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{1+\sin t} = 2\pi\log 2.\end{aligned}$$

Secondo metodo per la stima sulla superficie: la superficie è generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ appartenente al piano $y = 0$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}\text{Area}(S) =&2\pi\int_0^{\pi/2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt = 2\pi\int_0^{\pi/2}(1-\sin t)\sqrt{\cos^2 t+\tan^2 t}\,dt \\ =&2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sin t}{\cos t}\sqrt{\cos^4 t+\sin^2 t}\,dt,\end{aligned}$$

e si conclude come nel caso precedente.

Svolgimento (Esercizio 195). Poniamo

$$p_\alpha(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2(x+2\alpha y) + 1 = (x-1)^2 + 2(y-\alpha)^2 - 2\alpha^2,$$

e osserviamo che $p_\alpha(x,y) \geq -2\alpha^2$ con uguaglianza se e solo se $x = 1$ e $y = \alpha$. La funzione arcsin è strettamente monotona crescente in $[-1,1]$, in quanto inversa della funzione sin ristretta all'intervallo $[-\pi/2,\pi/2]$, dove essa è strettamente monotona crescente. Pertanto per determinare i massimi e i minimi è sufficiente studiare la funzione

$$(x,y) \mapsto \max\left\{-1, e^{p_\alpha(x,y)} - 2\right\}.$$

Il dominio di f_α sarà dato dai punti dove tale funzione assume valori compresi tra -1 e 1. Tale funzione è sempre maggiore di -1 per costruzione, pertanto il dominio sarà dato dai punti dove $e^{p_\alpha(x,y)} - 2 \leq 1$, ovvero dove $e^{p_\alpha(x,y)} \leq 3$ e quindi $p_\alpha(x,y) \leq \log 3$. Nella fattispecie, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, il dominio è racchiuso dall'ellisse D_α di equazione $(x-1)^2 + 2(y-\alpha)^2 = 2\alpha^2 + \log 3$, ovvero l'ellisse centrata nel punto $(1,\alpha)$ con assi paralleli agli assi coordinati e lunghezza dei semiassi pari a $\sqrt{2\alpha^2 + \log 3}$ e $\sqrt{\alpha^2 + \log\sqrt{3}}$, rispettivamente. Tale insieme è chiaramente compatto, quindi esistono massimi e minimi assoluti poiché f_α è continua. Nei punti di

$$D_\alpha^{\min} := \{(x,y) \in D_\alpha : e^{p_\alpha(x,y)} - 2 \leq -1\} = \{(x,y) \in D_\alpha : p_\alpha(x,y) \leq 0\},$$

la funzione

$$(x,y) \mapsto \max\left\{-1, e^{p_\alpha(x,y)} - 2\right\}$$

è costantemente uguale al suo minimo assoluto -1, quindi i punti di $D_\alpha^{\min}$ sono di minimo assoluto e relativo per $f_\alpha(x,y)$ e il valore del minimo assoluto è $\arcsin(-1) = -\pi/2$. Essi sono tutti e soli i punti della regione racchiusa dall'ellisse $p_\alpha(x,y) = 0$, ovvero $(x-1)^2 + 2(y-\alpha)^2 = 2\alpha^2$, quindi l'ellisse centrata nel punto $(1,\alpha)$ con assi paralleli agli assi coordinati e lunghezza dei semiassi pari a $\sqrt{2}|\alpha|$ e $|\alpha|$, rispettivamente. Se $\alpha = 0$, l'unico punto di minimo assoluto è $(1,\alpha)$.

Poiché la funzione $s \mapsto \max\{-1, e^s - 2\}$ è uguale a $s \mapsto e^s - 2$ per $0 < s < \log 3$, nei punti di $D_\alpha \setminus D_\alpha^{\min}$ si ha $\max\left\{-1, e^{p_\alpha(x,y)} - 2\right\} = e^{p_\alpha(x,y)} - 2$. Inoltre, visto che $s \mapsto e^s - 2$ è strettamente monotona crescente, i massimi sono assunti per $s = \log 3$, quindi tutti i punti della frontiera di D_α sono punti di massimo assoluto e relativo per D_α e il massimo vale $\arcsin(e^{\log 3} - 2) = \pi/2$. Non vi sono punti di massimo o minimo relativo in $\text{int}(D_\alpha) \setminus D_\alpha^{\min}$ per la stretta crescenza di $s \mapsto e^s - 2$ per $0 < s < \log 3$.

Svolgimento (Esercizio 196). *Esistenza di un massimo per z vincolato a γ.* Definiamo $g_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ponendo $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ e $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x$. Dobbiamo quindi determinare il massimo della funzione $f(x,y,z) = z$ soggetta al vincolo $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$. Poiché g_1, g_2 sono continue, $\gamma = g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0)$ è un insieme chiuso. Inoltre si ha che $g_1^{-1}(0)$ è limitato, infatti da

$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$ si ricava $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$, $|z| \leq 1$. Quindi γ è un insieme compatto. Pertanto f ammette su di esso massimo e minimo assoluti.

Primo metodo: uso dei moltiplicatori di Lagrange. Osserviamo che $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 8z)$ si annulla solo in $(0, 0, 0)$ ma $(0, 0, 0) \notin g_1^{-1}(0)$ e $\nabla g_2(x, y, z) = (2x - 2, 2y, -2z)$ che si annulla solo in $(1, 0, 0)$ ma $(1, 0, 0) \notin g_2^{-1}(0)$. Pertanto possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto

$$L(x, y, z, \mu, \nu) = f(x, y, z) + \mu g_1(x, y, z) + \nu g_2(x, y, z),$$

studiamo il sistema $\nabla L(x, y, z) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} 2\mu x + \nu(2x - 2) = 0, \\ 2\mu y + 2\nu y = 0, \\ 8\mu z - 2\nu z + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\mu = -\nu$ oppure $y = 0$. Se $\mu = -\nu$ la prima equazione è impossibile. Quindi dovrà essere $y = 0$. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 2\mu x + \nu(2x - 2) = 0, \\ 8\mu z - 2\nu z + 1 = 0, \\ x^2 + 4z^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 2x - z^2 = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $z^2 = x^2 - 2x$, sostituendo nella penultima si ottiene $x^2 + 4(x^2 - 2x) - 4 = 0$ ovvero $5x^2 - 8x - 4 = 0$ da cui $x = -2/5$ oppure $x = 2$. Se $x = 2$ si ottiene $z = 0$, che non permette di soddisfare la seconda equazione. Pertanto si dovrà avere $x = -2/5$ da cui $z = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. Per tali scelte, si ha

$$\begin{cases} 4\mu + 14\nu = 0, \\ 16\sqrt{6}\mu - 4\sqrt{6}\nu + 5 = 0, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 4\mu + 14\nu = 0, \\ 16\sqrt{6}\mu + 4\sqrt{6}\nu - 5 = 0, \end{cases}$$

scegliendo i valori positivo o negativo per z, rispettivamente. Entrambi i sistemi ammettono soluzione unica, pertanto si hanno gli estremali $\left(-\dfrac{2}{5}, 0, \pm\dfrac{\sqrt{6}}{5}\right)$. Il punto cercato è quello dove la terza componente assume il valore massimo, ovvero $\left(-\dfrac{2}{5}, 0, \dfrac{\sqrt{6}}{5}\right)$.

Secondo metodo: uso del teorema di Dini. $G(x, y, z) = 0$ con $G(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$ definisce implicitamente y, z in funzione di x. Si ha

$$\operatorname{Jac} G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 8z \\ 2x - 2 & 2y & -2z \end{pmatrix}$$

Lo Jacobiano parziale rispetto a y, z è dato dalla matrice formata dalle ultime due colonne. Il suo determinante è

$$\operatorname{Jac}_{y,z} G(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 2y & 8z \\ 2y & -2z \end{pmatrix} = -20yz,$$

nullo per $y = 0$ oppure $z = 0$. Per $z = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

ovvero l'intersezione tra la circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 nel piano $z = 0$ e la circonferenza centrata in $(1, 0, 0)$ di raggio 1 nel piano $z = 0$. Tale intersezione è il punto $(2, 0, 0)$. Per $y = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + 4z^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 2x - z^2 = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $z^2 = x^2 - 2x$, sostituendo nella penultima si ottiene $x^2 + 4(x^2 - 2x) - 4 = 0$ ovvero $5x^2 - 8x - 4 = 0$ da cui $x = -2/5$ oppure $x = 2$. Si ottengono i punti $(-2/5, 0, \pm 2\sqrt{6}/5)$ e $(2, 0, 0)$. In tutti i punti di γ diversi da $(-2/5, 0, \pm 2\sqrt{6}/5)$ e $(2, 0, 0)$ è possibile applicare il teorema di Dini per ottenere $(y, z) = (y(x), z(x))$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{y}(x) \\ \dot{z}(x) \end{pmatrix} &= -\left[\mathrm{Jac}_{y,z}\, G(x, y(x), z(x))\right]^{-1} \partial_x G(x, y(x), z(x)) \\ &= -\begin{pmatrix} \dfrac{1}{10y(x)} & \dfrac{2}{5y(x)} \\ \\ \dfrac{1}{10z(x)} & -\dfrac{1}{10z(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5x - 4}{5y} \\ \\ \dfrac{1}{5z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $\dot{z}(x) \neq 0$. Ma allora il massimo deve essere raggiunto in uno dei tre punti esclusi in precedenza. Per confronto diretto si ha che il punto cercato è quello dove la terza componente assume il valore massimo, ovvero $\left(-\dfrac{2}{5}, 0, \dfrac{\sqrt{6}}{5}\right)$.

Terzo metodo: uso di una parametrizzazione esplicita. Sottraendo le due equazioni si ottiene $4z^2 - 4 = -z^2 - 2x$ da cui $z = \pm\sqrt{\dfrac{4 - 2x}{5}}$. Sostituendo nella seconda equazione si ha $x^2 + y^2 - \dfrac{4 - 2x}{5} - 2x = 0$, da cui $x^2 - \dfrac{8x}{5} + y^2 - \dfrac{4}{5} = 0$, e quindi

$$\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + y^2 = \frac{36}{25}.$$

Possiamo quindi parametrizzare x e y in coordinate polari centrate in $(4/5, 0)$ e raggio $6/5$. Otteniamo

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{5}\cos\theta, \\ \\ y = \dfrac{6}{5}\sin\theta, \\ \\ z = \pm\sqrt{\dfrac{4 - 2x}{5}} = \pm\dfrac{2}{5}\sqrt{3 - 3\cos\theta} \end{cases}$$

Da questa parametrizzazione si deduce che il massimo di z è ottenuto scegliendo il segno positivo di z e il valore $\theta = \pi$. Ciò porge il punto $\left(-\dfrac{2}{5}, 0, \dfrac{\sqrt{6}}{5}\right)$.

Svolgimento (Esercizio 197). Poniamo

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)), \\ \varphi(u, v) &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)). \end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =&\partial_x F_1(x,y,z)+\partial_y F_2(x,y,z)+\partial_z F_3(x,y,z)=2x,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2-z\\ \vec{e}_2 & \partial_y & 1-z^2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2+x-y\end{pmatrix}\\
=&(2z-1,-2x-2,0)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F}\neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t)=(-3\sin(t),2\cos(t),1)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell}=&\int_0^{2\pi}\vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
=&\int_0^{2\pi}\big(9\cos^2(t)-t,1-t^2,-2\sin(t)+9\cos^2(t)+3\cos(t)\big)\cdot(-3\sin(t),2\cos(t),1)\;dt\\
=&\int_0^{2\pi}\big(2\left(1-t^2\right)\cos(t)-2\sin(t)+9\cos^2(t)+3\cos(t)-3\sin(t)\left(9\cos^2(t)-t\right)\big)\;dt\\
=&-5\pi.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4u & 2v\\ 2u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma=&\|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=&\left|\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|du\,dv\\
=&\sqrt{144u^2v^2+(4u-2v)^2+(8u+2v)^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma=\sqrt{\det^2 B_1+\det^2 B_2+\det^2 B_3}.$$

Si ha che $P=(1,-2,1)=\varphi(u,v)$ solo se $(u,v)=(1,0)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P)=\frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{G}, \Sigma) &= \int_{\Sigma} \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac} \varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array} \right) dv\, dv \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \det \begin{pmatrix} 2\left(u^2+v^2\right) - 1 & 1 & 2 \\ -2(u+2v) - 2 & -4u & 2v \\ 0 & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\, du \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \left(-24u^3 v - 8u^2 - 24uv^3 - 8u + 8v^2 + 4v\right) dv\, du \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$
\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}
$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2] \times [-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento

è data dall'unione delle quattro curve:

$$
\begin{cases}
\gamma_1(u) = \varphi(u,-2) = \left(u-4, 4-2u^2, u^2+4\right),\ u \in [-2,2] \\
\gamma_2(v) = \varphi(2,v) = \left(2v+2, v^2-8, v^2+4\right),\ v \in [-2,2] \\
\gamma_3(u) = \varphi(-u,2) = \left(4-u, 4-2u^2, u^2+4\right),\ u \in [-2,2] \\
\gamma_4(v) = \varphi(-2,-u) = \left(-2u-2, u^2-8, u^2+4\right),\ v \in [-2,2],
\end{cases}
$$

le cui derivate sono:

$$
\begin{cases}
\dot{\gamma}_1(u) = (1, -4u, 2u),\ u \in [-2,2] \\
\dot{\gamma}_2(v) = (2, 2v, 2v),\ v \in [-2,2] \\
\dot{\gamma}_3(u) = (-1, -4u, 2u),\ u \in [-2,2] \\
\dot{\gamma}_4(v) = (-2, 2v, 2v),\ v \in [-2,2],
\end{cases}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-u^2 + (u-4)^2 - 4, 1 - \left(u^2+4\right)^2, 2u^2 + (u-4)^2 + u - 8\right) \cdot (1, -4u, 2u)\, du \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-u^2 + 2u\left(2u^2 + (u-4)^2 + u - 8\right) - 4u\left(1 - \left(u^2+4\right)^2\right) + (u-4)^2 - 4\right) du \\
&= -\frac{80}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-2}^{2} \left(-v^2 + (2v+2)^2 - 4, 1 - \left(v^2+4\right)^2, -v^2 + 2v + (2v+2)^2 + 10\right) \cdot (2, 2v, 2v)\ dv \\
=& \int_{-2}^{2} \left(2\left(-v^2 + (2v+2)^2 - 4\right) + 2v\left(-v^2 + 2v + (2v+2)^2 + 10\right) + 2v\left(1 - \left(v^2+4\right)^2\right)\right) dv \\
=& \frac{416}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-2}^{2} \left(-u^2 + (4-u)^2 - 4, 1 - \left(u^2+4\right)^2, 2u^2 + (4-u)^2 - u\right) \cdot (-1, -4u, 2u)\ du \\
=& \int_{-2}^{2} \left(u^2 + 2u\left(2u^2 + (4-u)^2 - u\right) - 4u\left(1 - \left(u^2+4\right)^2\right) - (4-u)^2 + 4\right) du \\
=& -144,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
=& \int_{-2}^{2} \left(-v^2 + (-2v-2)^2 - 4, 1 - \left(v^2+4\right)^2, -v^2 + (-2v-2)^2 - 2v + 6\right) \cdot (-2, 2v, 2v)\ dv \\
=& \int_{-2}^{2} \left(-2\left(-v^2 + (-2v-2)^2 - 4\right) + 2v\left(-v^2 + (-2v-2)^2 - 2v + 6\right) + 2v\left(1 - \left(v^2+4\right)^2\right)\right) dv \\
=& 32,
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 198). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{3X(x)T'(t) - 4T(t)X''(x) + 2T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{3T'(t)}{T(t)} + \frac{2X(x) - 4X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{3T'(t)}{T(t)} = \frac{2X(x) - 4X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 3T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ -4X''(x) - (\lambda - 2)X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$-4\mu^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$

Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{Z}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = -16(\lambda - 2)$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda > 2$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = -\frac{1}{8}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = -\frac{\sqrt{\lambda-2}}{2}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = 4n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda_n = 4n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha pertanto:

$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che scegliere $n < 0$ equivale a cambiare il segno di c_n, pertanto senza perdita di generalità scegliamo $n > 0$. Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:

$$3T_n'(t) + \lambda_n T(t) = 0,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:

$$T_n(t) = d_n e^{-\frac{\lambda_n t}{3}}.$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = b_n e^{-\frac{\lambda_n t}{3}} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$

Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:

$$u(0,x) = 7x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione

$$f(x) = 7x,$$

nell'intervallo $[0,\pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi,\pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 7x\sin(nx)\,dx \\ =& -\frac{14(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{14(-1)^n e^{-\frac{(4n^2+2)t}{3}} \sin(nx)}{n}.$$

La serie e tutte le sue derivate convergono totalmente in un intorno di ogni punto appartenente a $t > 0$, $x \in [0,\pi[$, quindi la serie definisce una soluzione classica.

Svolgimento (Esercizio 199). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $y'(t) = x''(t) - x'(t) - \cos(t)$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$3x(t) + 4y(t) = x''(t) - x'(t) - \cos(t).$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - x'(t) - 3x(t) - 4y(t) - \cos(t) = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$x''(t) - x'(t) - 4\left(x'(t) - x(t) - \sin(t)\right) - 3x(t) - \cos(t) = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$x''(t) - 5x'(t) + x(t) + 4\sin(t) - \cos(t) = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \mathrm{Traccia}(A)\,x'(t) + \mathrm{Det}(A)\,x(t) = \cos(t) - 4\sin(t).$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 5\mu + 1$, di discriminante $\delta = 21$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{21}\right)$ e $\mu_2 = \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{21}\right)$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)t}$ e $x_{o,2} := e^{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)t} & e^{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t} \\ \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)e^{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)t} & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)e^{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)t} & e^{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t} \\ \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)e^{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)t} & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)e^{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)-4\sin(t) \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)t}(\cos(t)-4\sin(t))}{\sqrt{21}} \\ \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t}(\cos(t)-4\sin(t))}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\left(2\left(11-2\sqrt{21}\right)\sin(t)+\left(3+\sqrt{21}\right)\cos(t)\right)}{5\sqrt{21}\left(\sqrt{21}-5\right)}, \\ d(t) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)t}\left(2\left(11+2\sqrt{21}\right)\sin(t)-\left(\sqrt{21}-3\right)\cos(t)\right)}{5\sqrt{21}\left(5+\sqrt{21}\right)}. \end{aligned}$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{5}\left(5e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\left(c+de^{\sqrt{21}t}\right)-\sin(t)-4\cos(t)\right),\ c,d\in\mathbb{R}, \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\left(c+de^{\sqrt{21}t}\right)+5\sqrt{21}de^{\sqrt{21}t-\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}+4\sin(t)-\cos(t)\right),\ c,d\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = x'(t)-x(t)-\sin(t) = \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\left(5\left(\left(3+\sqrt{21}\right)de^{\sqrt{21}t}-\left(\sqrt{21}-3\right)c\right)+6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\cos(t)\right),\ c,d\in\mathbb{R}$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{5}\left(5e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\left(c+de^{\sqrt{21}t}\right)-\sin(t)-4\cos(t)\right), \\ \\ y(t) &= \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\left(5\left(\left(3+\sqrt{21}\right)de^{\sqrt{21}t}-\left(\sqrt{21}-3\right)c\right)+6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-5\right)t}\cos(t)\right), \end{cases}$$

al variare di $c,d\in\mathbb{R}$. Studiamo ora la stabilità dell'origine per il sistema omogeneo associato. Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo l'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$ oppure, essendo nel caso 2×2 per mezzo dell'equazione

$$\lambda^2 - \mathrm{Traccia}(A)\,\lambda + \det(A) = 0.$$

Gli autovalori sono $\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)$ e $\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)$. Gli autovalori sono reali e distinti. Essi sono entrambi strettamente positivi, l'origine è un nodo proprio instabile.

Svolgimento (Esercizio 200). Poniamo $f(x,y) = x^4+3xy+3y^2-1$. In coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho^4\cos^4(\theta)+3\rho^2\sin^2(\theta)+3\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)-1,$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)):\ \rho^4\cos^4(\theta)+3\rho^2\sin^2(\theta)+3\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)-1=0,\ \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

L'insieme è limitato: poiché $2xy \geq -x^2 - y^2$, si ha

$$0 = f(x,y) \geq x^4 - \frac{3}{2}(x^2+y^2) + 3y^2 - 1 = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 1 \geq x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1,$$

per cui x è limitata. Ma allora anche y deve esserlo. Γ è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(x,0)=0$, ovvero $x^4-1=0$. Si ottengono i punti $P_1=(-1,0)$, $P_2=(1,0)$. Analogamente, per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse, risolviamo l'equazione $f(0,y)=0$, ovvero $3y^2-1=0$. Si ottengono i punti $Q_1=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $Q_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^3+3y, 3x+6y\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla f(P_1) &= (-4,-3)\\
\nabla f(P_2) &= (4,3)\\
\nabla f(Q_1) &= \left(-\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)\\
\nabla f(Q_2) &= \left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$\begin{aligned}
r_{P_1} &: y = -\frac{4}{3}(x+1)\\
r_{P_2} &: y = -\frac{4}{3}(x-1)\\
r_{Q_1} &: y = -\frac{\sqrt{3}x+2}{2\sqrt{3}}\\
r_{Q_2} &: y = -\frac{\sqrt{3}x-2}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y=y(x)$ implicitamanete definita da $f(x,y)=0$. In P_1, P_2, Q_1, Q_2, la tangente non è orizzontale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $x=x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y)=0$. Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti dell'insieme dove $\nabla f(x,y)=(0,0)$ andranno studiati a parte. Nel nostro caso il gradiente non si annulla mai in punti dell'insieme. Poniamo $L(x,y,\lambda) := h(x,y) + \lambda f(x,y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x,y,\lambda)=0$ nelle incognite x e y. Si ha:

$$\begin{cases}
\lambda\left(4x^3+3y\right)+1=0\\
\lambda(3x+6y)=0\\
x^4+3xy+3y^2-1=0.
\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)},\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)},-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)}\right)$ Calcolando i valori assunti da h in questi punti ed eventualmente in quelli precedentemente esclusi, si ha che h raggiunge il suo valore massimo in $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)},-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)}\right)$ e tale valore massimo è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)}$. Analogamente, si ha che h raggiunge il suo valore minimo in $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)},\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)}\right)$, e tale valore minimo è $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right)}$.

Svolgimento (Esercizio 201). In coordinate cilindriche $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$, si ha $z=\rho^2$ e $z=\sqrt{3-2\rho^2}$. L'elemento di volume in coordinate cilindriche è $\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. Per $\rho\geq 0$, si ha che $\rho^2\leq\sqrt{3-2\rho^2}$ in $[0,1]$, quindi il volume richiesto è

$$\begin{aligned}V=&\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{\sqrt{3-2\rho^2}}\rho\,dz\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^1\left(\sqrt{3-2\rho^2}-\rho^2\right)\rho\,d\rho,\\ =&\pi\int_0^1(\sqrt{3-2v}-v)\,dv=\pi\left(\sqrt{3}-\frac{5}{6}\right)\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 202). Si veda la soluzione dell'Esercizio 197.

Svolgimento (Esercizio 203). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y):=2x\left(6-5y^2\right)y^2\,dx+\left(-10x^2y^3-3\right)\,dy=:p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y)-\partial_x q(x,y)=4xy\left(6-5y^2\right),$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y)=0$. Osserviamo che

$$\frac{\partial_y p(x,y)-\partial_x q(x,y)}{-p(x,y)}=-\frac{2}{y}=:f(y),$$

è una funzione della sola variabile y, pertanto un fattore integrante è dato da

$$\lambda(x,y):=e^{\int f(y)\,dy}=\frac{1}{y^2}$$

Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$, ad esempio $P=(P_x,P_y)=(0,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0,y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x):=(x,P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y):=(x_0,y)$ da P_y a y_0:

$$\begin{aligned}\int_\gamma\lambda\omega=&\int_{\gamma_1}\lambda\omega+\int_{\gamma_2}\lambda\omega\\ =&\int_0^{x_0}2x\,dx+\int_1^{y_0}\frac{-10x_0^2y^3-3}{y^2}\,dy\\ =&-5x_0^2y_0^2+6x_0^2+\frac{3}{y_0}-3\end{aligned}$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y)=-5x^2y^2+6x^2+\frac{3}{y},$$

e le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y)=c$. La soluzione soddisfacente a $y(3)=1$ corrisponde a $c=12$. Per $y\notin\{0,\pm\sqrt{5/6}\}$ si ottiene

$$x^2=-\frac{3(4y-1)}{y\,(5y^2-6)}.$$

Per la positività del termine di sinistra, si ha $-\sqrt{6/5}<y<0$ oppure $1/4\le y<\sqrt{6/5}$. In particolare, si deduce come la soluzione non tagli mai l'asse $y=0$. Ma allora, poiché $y(3)=1$, la soluzione esiste su tutto $\mathbb{R}$ ed è compresa tra i valori $1/4$ (assunto per $x=0$, punto di minimo assoluto) e $\sqrt{6/5}$, assunto per $x\to\pm\infty$, quindi vi è un asintoto orizzontale $y=\sqrt{6/5}$. Osserviamo anche che l'insieme $V(x,y)=12$ è simmetrico rispetto all'asse delle y, quindi anche la soluzione (essendo definita su $\mathbb{R}$) lo sarà. Dalla scrittura implicita (valida per $y\neq 0$)

$$f(x,y)=-5x^2y^3+6x^2y-12y+3=0,$$

si ricava che $\partial_x f(x,y)=0$ solo per $x=0$ oppure $y=0$ oppure $y=\pm\sqrt{6/5}$, tuttavia di questi punti solo $x=0$ è ammissibile per la soluzione, e si è già visto che tale punto è un minimo assoluto. Pertanto la funzione è strettamente crescente in $[0,+\infty[$, asintotica a $\sqrt{6/5}$ e simmetrica rispetto all'asse delle y.

Svolgimento (Esercizio 204). Poniamo $F(x,y):=6x^4y^2+5x^4+2x^2y^4+y^4-y^2$. Essendo F un polinomio, $F:\mathbb{R}^2\to R$ è continua e quindi $\Gamma=F^{-1}(0)$ è un chiuso. L'insieme Γ è simmetrico rispetto agli assi e all'origine infatti $F(x,y)=F(-x,y)=F(x,-y)=F(-x,-y)$. Si ha:

$$\begin{aligned}F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)&=2\rho^6\sin^4\theta\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\left(\rho^2\sin^2\theta-1\right)+\rho^4\cos^4\theta\left(6\rho^2\sin^2\theta+5\right)\\&=\rho^2\left(-4\rho^4\cos^6\theta+2\rho^2\left(\rho^2+3\right)\cos^4(\theta)+\left(2\rho^4-2\rho^2+1\right)\cos^2\theta+\rho^2-1\right).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Gamma:=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in\mathbb{R}^2:\,2\rho^6\sin^4\theta\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\left(\rho^2\sin^2\theta-1\right)+\rho^4\cos^4\theta\left(6\rho^2\sin^2\theta+5\right)=0\right\}.$$

Osserviamo dall'equazione che se $(x,y)\in\Gamma$, si ha $0=F(x,y)\ge -y^2+y^4$, pertanto si deve avere $y^2\ge y^4$. Ma questo implica $|y|\le 1$. Si ha inoltre che $0=F(x,y)\ge 5x^4-y^2$, pertanto si deve avere $5x^4\le y^2\le 1$, quindi anche x è limitata. Essendo Γ chiuso e limitato, è compatto. Per studiare le intersezioni con le bisettrici è sufficiente limitarsi al primo quadrante e poi ricostruire per simmetria. Si ha $F(x,x)=x^2\left(8x^4+6x^2-1\right)$ che si annulla per $x=0$ e $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-3\right)}$. Posto $\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-3\right)}$, si ottengono quindi le intersezioni $(0,0)$, $P_1(\alpha,\alpha)$, $P_2=(-\alpha,\alpha)$, $P_3=-P_1$ e $P_4=-P_2$. Calcoliamo il gradiente di F:

$$\nabla F(x,y)=\left(20x^3+24x^3y^2+4xy^4,-2y+12x^4y+4y^3+8x^2y^3\right).$$

La tangente in P_i è data da:

$$\langle\nabla F(P_i),(x,y)-P_i\rangle=0,$$

ovvero, ricordando le simmetrie di F:

$$\begin{gathered}(28\alpha^5+20\alpha^3)(x-\alpha)+(20\alpha^5+4\alpha^3-2\alpha)(y-\alpha)=0,\text{ in }P_1=(\alpha,\alpha),\\(28\alpha^5+20\alpha^3)(-x-\alpha)+(20\alpha^5+4\alpha^3-2\alpha)(y-\alpha)=0,\text{ in }P_2=(-\alpha,\alpha),\\(28\alpha^5+20\alpha^3)(-x-\alpha)+(20\alpha^5+4\alpha^3-2\alpha)(-y-\alpha)=0,\text{ in }P_3=(-\alpha,-\alpha),\\(28\alpha^5+20\alpha^3)(x-\alpha)+(20\alpha^5+4\alpha^3-2\alpha)(-y-\alpha)=0,\text{ in }P_4=(\alpha,-\alpha),\end{gathered}$$

Essendo $\alpha>0$, in tutti questi punti si ha $\partial_x F(P_i)\neq 0$, quindi è sempre possibile esplicitare localmente $x=x(y)$.

Poniamo $L(x,y,\lambda) = h(x,y) = y^2 - \lambda F(x,y)$. Per il sistema dei moltiplicatori di Lagrange, si deve avere $\nabla L(x,y,0)$ nei punti di massimo e minimo di $h(x,y)$ vincolati a Γ. In particolare si ha $0 = \partial_x L(x,y,\lambda) = 4x\left(x^2\left(6y^2+5\right)+y^4\right)$ che si annulla solo per $x=0$. Le intersezioni di Γ con la retta $x=0$ sono date da $F(0,y)=0$ ovvero da $y^4-y=0$, quindi da $y=0$, $y=\pm 1$. Pertanto $(0,0)$ è di minimo e $(0,\pm 1)$ non punti di massimo. Il minimo assoluto di h vincolato a Γ è 0 e il massimo assoluto vincolato è 1.

Svolgimento (Esercizio 205). Dalla prima equazione si ricava in particolare che $z>0$, pertanto necessariamente $|y|\le 2$. Si ricava inoltre un dominio di integrazione limitato solo supponendo $4-y^2 \ge 2x^2+y^2$ (com'è facile anche rendersi conto geometricamente, il paraboloide giace al di sopra della superficie $z=4-y^2$ in un insieme illimitato), e tale dominio è $B := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\}$. Pertanto, dopo un passaggio in coordinate polari,

$$V = \int_B \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\,dx\,dy = \int_B (4-2(x^2+y^2))\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(4-2\rho^2)\,\rho\,d\rho = 4\pi.$$

Svolgimento (Esercizio 206). Poniamo

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,,\\ \varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,.\end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 2xy^2,\\ \operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\ =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2y^2\\ \vec{e}_2 & \partial_y & z\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-y^2\end{pmatrix}\\ =& \left(-2y-1, -2x, -2x^2y\right).\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (3, 3\cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ =& \int_0^{2\pi}\left(81t^2\sin^2(t), 0, 9t^2-9\sin^2(t)\right)\cdot(3,3\cos(t),0)\;dt\\ =& \int_0^{2\pi} 243t^2\sin^2(t)\,dt\\ =& \frac{81}{2}\pi\left(8\pi^2-3\right).\end{aligned}$$

Per svolgere l'ultimo integrale si usi il fatto che $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$, e dopo si integri per parti.

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\operatorname{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2u & 2v\\ 2u & 2v\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)\|\ du\,dv \\
&= \left|\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix}\right| du\,dv \\
&= \sqrt{64u^2v^2 + (2u-2v)^2 + (2u+2v)^2}\, du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det \left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det \begin{pmatrix} -2\left(v^2-u^2\right)-1 & 1 & 1 \\ -2(u+v) & -2u & 2v \\ -2(u+v)^2\left(v^2-u^2\right) & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(4u^5 + 12u^4v + 8u^3v^2 - 16u^3v - 8u^2v^3 - 4u^2 - 12uv^4 + 16uv^3 + 8uv - 4v^5 + 4v^2\right) dv\,du \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{cases} \gamma_1(u) = \varphi(u,-2) = \big(u-2, 4-u^2, u^2+4\big)\,,\ u \in [-2,2] \\ \gamma_2(v) = \varphi(2,v) = \big(v+2, v^2-4, v^2+4\big)\,,\ v \in [-2,2] \\ \gamma_3(u) = \varphi(-u,2) = \big(2-u, 4-u^2, u^2+4\big)\,,\ u \in [-2,2] \\ \gamma_4(v) = \varphi(-2,-v) = \big(-v-2, v^2-4, v^2+4\big)\,,\ v \in [-2,2]\,, \end{cases}$$

le cui derivate sono:

$$\begin{cases} \dot\gamma_1(u) = (1,-2u,2u)\,,\ u \in [-2,2] \\ \dot\gamma_2(v) = (1,2v,2v)\,,\ v \in [-2,2] \\ \dot\gamma_3(u) = (-1,-2u,2u)\,,\ u \in [-2,2] \\ \dot\gamma_4(v) = (-1,2v,2v)\,,\ v \in [-2,2]\,, \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec F \cdot d\vec\ell \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((u-2)^2\left(4-u^2\right)^2, u^2+4, (u-2)^2-\left(4-u^2\right)^2\Big) \cdot (1,-2u,2u)\ du \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((u-2)^2\left(4-u^2\right)^2 - 2u\left(u^2+4\right) + 2u\Big((u-2)^2-\left(4-u^2\right)^2\Big)\Big)\ du \\ =& \frac{3968}{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec F \cdot d\vec\ell \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((v+2)^2\left(v^2-4\right)^2, v^2+4, (v+2)^2-\left(v^2-4\right)^2\Big) \cdot (1,2v,2v)\ dv \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((v+2)^2\left(v^2-4\right)^2 + 2v\left(v^2+4\right) + 2v\Big((v+2)^2-\left(v^2-4\right)^2\Big)\Big)\ dv \\ =& \frac{20864}{105}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec F \cdot d\vec\ell \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((2-u)^2\left(4-u^2\right)^2, u^2+4, (2-u)^2-\left(4-u^2\right)^2\Big) \cdot (-1,-2u,2u)\ du \\ =& \int_{-2}^{2} \Big(-(2-u)^2\left(4-u^2\right)^2 - 2u\left(u^2+4\right) + 2u\Big((2-u)^2-\left(4-u^2\right)^2\Big)\Big)\ du \\ =& -\frac{20864}{105}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_{-2}^{2} \left((-v-2)^2 \left(v^2-4\right)^2, v^2+4, (-v-2)^2 - \left(v^2-4\right)^2 \right) \cdot (-1, 2v, 2v)\, dv \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-(-v-2)^2 \left(v^2-4\right)^2 + 2v\left(v^2+4\right) + 2v\left((-v-2)^2 - \left(v^2-4\right)^2 \right) \right) dv \\
&= -\frac{3968}{35},
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 207). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione data e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{3X(x)T'(t) - 4T(t)X''(x) + 2T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{3T'(t)}{T(t)} + \frac{2X(x) - 4X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{3T'(t)}{T(t)} = \frac{2X(x) - 4X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 3T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ -4X''(x) - (\lambda - 2)X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, ricordando che dobbiamo trovarne soluzioni non identicamente nulle. L'equazione caratteristica è:

$$-4\mu^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Siano $\Delta_x(\lambda)$ il suo discriminante, e $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$ le sue radici.

(1) Se $\Delta_x(\lambda) > 0$ allora le due radici sono reali e distinte. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:

$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{x\mu_2(\lambda)}.$$

Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$

Poiché le due radici sono distinte, le righe della matrice del sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ammette solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(2) Se $\Delta_x(\lambda) = 0$ allora le due radici sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:
$$X(x) = c_1 e^{x\mu_1(\lambda)} + c_2 x e^{x\mu_1(\lambda)}.$$
Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:
$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 e^{\pi\mu_1(\lambda)} + \pi c_2 e^{\pi\mu_2(\lambda)} = 0. \end{cases}$$
da cui si ha ancora solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$, che non è accettabile perché implica $X(x) \equiv 0$.

(3) Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ allora le due radici sono distinte e complesse coniugate: $\mu_1(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$, $\mu_2(\lambda) = \alpha(\lambda) - i\beta(\lambda)$, con $\beta(\lambda) > 0$. La soluzione generale dell'equazione in $X(\cdot)$ diventa:
$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$
Sostituendo le condizioni in $x = 0$ si ricava:
$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ e^{\pi\alpha} c_1 \sin(\pi\beta) + e^{\pi\alpha} c_2 \cos(\pi\beta) = 0. \end{cases}$$
Per avere soluzioni non nulle di questo sistema, il determinante della matrice ad esso associata deve essere nullo. Questo implica necessariamente $\sin(\pi\beta) = 0$ e quindi $\beta \in \mathbb{Z}$.

Riassumendo, le uniche soluzioni accettabili per $X(\cdot)$ si hanno se $\Delta_x(\lambda) < 0$ e la parte immaginaria delle radici dell'equazione caratteristica è un numero naturale non nullo. Nel nostro caso, si ha $\Delta_x(\lambda) = -16(\lambda - 2)$ e affinché sia negativo dovrà essere $\lambda > 2$. La parte immaginaria delle soluzioni è allora $\beta(\lambda) = -\frac{1}{8}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = -\frac{\sqrt{\lambda-2}}{2}$, e per avere $\beta(\lambda) = n \in \mathbb{Z}$ dovrà essere $\lambda = 4n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Detta $X_n(\cdot)$ la soluzione dell'equazione in $X(\cdot)$ corrispondente al valore $\lambda_n = 4n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha pertanto:
$$X_n(x) = c_n \sin(nx),\ c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$
Osserviamo che scegliere $n < 0$ equivale a cambiare il segno di c_n, pertanto senza perdita di generalità scegliamo $n > 0$. Sostituendo ora nell'equazione in $T(\cdot)$ i valori accettabili ottenuti per λ, otteniamo le equazioni:
$$3T_n'(t) + \lambda_n T(t) = 0,$$
al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La soluzione generale di questa equazione è:
$$T_n(t) = d_n e^{-\frac{\lambda_n t}{3}}.$$
al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Poniamo $b_n = c_n d_n$ e costruiamo quindi le soluzioni elementari
$$u_n(t,x) = T_n(t) X_n(x) = b_n e^{-\frac{\lambda_n t}{3}} \sin(nx),\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$
Cerchiamo ora una soluzione in forma di serie:
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x).$$
Per determinare i coefficienti b_n sostituiamo il dato iniziale:
$$u(0,x) = 7x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$
Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di soli seni della funzione
$$f(x) = 7x,$$

nell'intervallo $[0, \pi]$. In altre parole dobbiamo prolungare la funzione f per disparità su $[-\pi, \pi]$, poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e infine calcolarne i coefficienti di Fourier. Si ha quindi per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ricordando che se f è dispari allora $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ è pari):

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 7x\sin(nx)\,dx \\ =& -\frac{14(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la soluzione in forma di serie:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{14(-1)^n e^{-\frac{(4n^2+2)t}{3}}\sin(nx)}{n}.$$

La serie e tutte le sue derivate convergono totalmente in un intorno di ogni punto appartenente a $t > 0$, $x \in [0, \pi[$, quindi la serie definisce una soluzione classica.

Svolgimento (Esercizio 208). Si veda la soluzione dell'Esercizio 170.

Svolgimento (Esercizio 209). Osserviamo che scelta $Q(x,y) = -\frac{y}{x}$, $P(x,y) = 0$ si ottiene

$$I := \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy.$$

La curva $x^3 + y^3 - xy = 0$ può essere parametrizzata con rette per l'origine: posto $y = mx$ si ha

$$(1+m^3)x^3 - mx^2 = 0,$$

da cui $x(m) = \dfrac{m}{1+m^3}$, $y(m) = \dfrac{m^2}{1+m^3}$. Inoltre si ha $0 \leq m \leq 1$ perché A soddisfa $0 \leq y \leq x$ e $x(1) = y(1) = 1/2$. Si ottiene quindi la parametrizzazione del bordo di A con le due curve $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(m) = \left(\dfrac{m}{1+m^3}, \dfrac{m^2}{1+m^3}\right)$. e $\gamma_2 : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(x) = (1-x, 1-x)$. Si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} Q(x,y)\,dy = \int_0^1 -m\dot{y}(m)\,dm + \int_0^{1/2} -1\cdot(-1)\,dx = [-y(m)m]_0^1 + \int_0^1 y(m)\,dm + \frac{1}{2} \\ &= \int_0^1 \frac{m^2\,dm}{1+m^3} = \frac{\log 2}{3}. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 210). Poniamo

$$\begin{aligned} \vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,, \\ \varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))\,. \end{aligned}$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) =& \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 6x+1,\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) =& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=& \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & 3x^2-z\\ \vec{e}_2 & \partial_y & y+z^2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-y\end{pmatrix}\\
=& (-2z-1,-2x-1,0)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (-\sin(t), 3\cos(t), 3\cos(t))$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} =& \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\
=& \int_0^{2\pi} \big(3\cos^2(t)-3\sin(t), 9\sin^2(t)+3\sin(t), \cos^2(t)-3\sin(t)\big)\cdot(-\sin(t),3\cos(t),3\cos(t))\;dt\\
=& \int_0^{2\pi} \Big(3\cos(t)\big(\cos^2(t)-3\sin(t)\big) - \sin(t)\big(3\cos^2(t)-3\sin(t)\big) + 3\big(9\sin^2(t)+3\sin(t)\big)\cos(t)\Big)\;dt\\
=& 3\pi.
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v)\\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v)\\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1\\ -4u & 2v\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma =& \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\|\;du\,dv\\
=& \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v)\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v)\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v)\end{pmatrix}\right|\;du\,dv\\
=& \sqrt{(12u-2v)^2+(4u+8v)^2+169}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,1,-3) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 4 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{237}}, \frac{13}{\sqrt{237}}, \frac{8}{\sqrt{237}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} 3(4u+v)^2-u+3v & 4 & 1 \\ -2u^2+(u-3v)^2+v^2 & -4u & 2v \\ 2u^2+(4u+v)^2-v^2 & 1 & -3 \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(648u^3+368u^2v-25u^2+52uv^2-40uv-6v^3+124v^2\right) dv\,du \\
&=2112.
\end{aligned}
$$

Il flusso di $\vec{G}=\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} -2(u-3v)-1 & 4 & 1 \\ -2(4u+v)-1 & -4u & 2v \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(-24u^2+76uv-116u-12v^2-24v-13\right) dv\,du \\
&= -\,976.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento

è data dall'unione delle quattro curve:

$$
\begin{cases}
\gamma_1(u)=\varphi(u,-2)=\left(4u-2,4-2u^2,u+6\right),\ u\in[-2,2] \\
\gamma_2(v)=\varphi(2,v)=\left(v+8,v^2-8,2-3v\right),\ v\in[-2,2] \\
\gamma_3(u)=\varphi(-u,2)=\left(2-4u,4-2u^2,-u-6\right),\ u\in[-2,2] \\
\gamma_4(v)=\varphi(-2,-v)=\left(-v-8,v^2-8,3v-2\right),\ v\in[-2,2],
\end{cases}
$$

le cui derivate sono:

$$
\begin{cases}
\dot\gamma_1(u)=(4,-4u,1),\ u\in[-2,2] \\
\dot\gamma_2(v)=(1,2v,-3),\ v\in[-2,2] \\
\dot\gamma_3(u)=(-4,-4u,-1),\ u\in[-2,2] \\
\dot\gamma_4(v)=(-1,2v,3),\ v\in[-2,2],
\end{cases}
$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \left(3(4u-2)^2 - u - 6, -2u^2 + (u+6)^2 + 4, 2u^2 + (4u-2)^2 - 4\right) \cdot (4, -4u, 1)\ du \\ =& \int_{-2}^{2} \left(2u^2 - 4\left(-2u^2 + (u+6)^2 + 4\right) u + (4u-2)^2 + 4\left(3(4u-2)^2 - u - 6\right) - 4\right)\ du \\ =& 960, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \left(3(v+8)^2 + 3v - 2, v^2 + (2-3v)^2 - 8, -v^2 + (v+8)^2 + 8\right) \cdot (1, 2v, -3)\ dv \\ =& \int_{-2}^{2} \left(2v\left(v^2 + (2-3v)^2 - 8\right) - 3\left(-v^2 + (v+8)^2 + 8\right) + 3(v+8)^2 + 3v - 2\right)\ dv \\ =& - 216, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \left(3(2-4u)^2 + u + 6, -2u^2 + (-u-6)^2 + 4, 2u^2 + (2-4u)^2 - 4\right) \cdot (-4, -4u, -1)\ du \\ =& \int_{-2}^{2} \left(-2u^2 - 4u\left(-2u^2 + (-u-6)^2 + 4\right) - (2-4u)^2 - 4\left(3(2-4u)^2 + u + 6\right) + 4\right)\ du \\ =& - 1664, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \left(3(-v-8)^2 - 3v + 2, v^2 + (3v-2)^2 - 8, -v^2 + (-v-8)^2 + 8\right) \cdot (-1, 2v, 3)\ dv \\ =& \int_{-2}^{2} \left(3\left(-v^2 + (-v-8)^2 + 8\right) + 2v\left(v^2 + (3v-2)^2 - 8\right) - 3(-v-8)^2 + 3v - 2\right)\ dv \\ =& - 56, \end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -976,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 211). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $4y'(t) = x''(t) - 5x'(t) - 1$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$4(x(t) + 3y(t)) = x''(t) - 5x'(t) - 1.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - 5x'(t) - 4x(t) - 12y(t) - 1 = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $4y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$x''(t) - 5x'(t) - 3\left(x'(t) - 5x(t) - t\right) - 4x(t) - 1 = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$x''(t) - 8x'(t) + 11x(t) + 3t - 1 = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \text{Traccia}(A)\, x'(t) + \text{Det}(A)\, x(t) = 1 - 3t.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 8\mu + 11$, di discriminante $\delta = 20$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = 4 - \sqrt{5}$ e $\mu_2 = 4 + \sqrt{5}$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{\left(4-\sqrt{5}\right)t}$ e $x_{o,2} := e^{\left(4+\sqrt{5}\right)t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\left(4-\sqrt{5}\right)t} & e^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} \\ \left(4-\sqrt{5}\right) e^{\left(4-\sqrt{5}\right)t} & \left(4+\sqrt{5}\right) e^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\left(4-\sqrt{5}\right)t} & e^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} \\ \left(4-\sqrt{5}\right) e^{\left(4-\sqrt{5}\right)t} & \left(4+\sqrt{5}\right) e^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-3t \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\left(4-\sqrt{5}\right)t}(1-3t)}{2\sqrt{5}} \\ \frac{e^{-\left(4+\sqrt{5}\right)t}(1-3t)}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$c(t) = \frac{e^{\left(\sqrt{5}-4\right)t}\left(3\left(\sqrt{5}-4\right)t - \sqrt{5} + 1\right)}{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-4\right)^2},$$

$$d(t) = \frac{e^{-\left(4+\sqrt{5}\right)t}\left(3\left(4+\sqrt{5}\right)t - \sqrt{5} - 1\right)}{2\sqrt{5}\left(4+\sqrt{5}\right)^2}.$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$x(t) = ce^{-\left(\sqrt{5}-4\right)t} + de^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} - \frac{3t}{11} - \frac{13}{121},\ c, d \in \mathbb{R},$$

$$\dot{x}(t) = \left(4-\sqrt{5}\right) ce^{-\left(\sqrt{5}-4\right)t} + \left(4+\sqrt{5}\right) de^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} - \frac{3}{11},\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(x'(t) - 5x(t) - t\right) = \frac{1}{484} e^{-\left(\sqrt{5}-4\right)t}\left(e^{\left(\sqrt{5}-4\right)t}\left(121\left(\sqrt{5}-1\right) de^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} + 44t + 32\right) - 121\left(1+\sqrt{5}\right)c\right),$$

$c, d \in \mathbb{R}$. In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) & = ce^{-\left(\sqrt{5}-4\right)t} + de^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} - \frac{3t}{11} - \frac{13}{121}, \\ y(t) & = \frac{1}{484} e^{-\left(\sqrt{5}-4\right)t}\left(e^{\left(\sqrt{5}-4\right)t}\left(121\left(\sqrt{5}-1\right) de^{\left(4+\sqrt{5}\right)t} + 44t + 32\right) - 121\left(1+\sqrt{5}\right)c\right), \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$. Studiamo ora la stabilità dell'origine per il sistema omogeneo associato. Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo l'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$ oppure, essendo nel caso 2×2 per mezzo dell'equazione

$$\lambda^2 - \text{Traccia}(A)\,\lambda + \det(A) = 0.$$

Gli autovalori sono $4+\sqrt{5}$ e $4-\sqrt{5}$. Gli autovalori sono reali e distinti. Essi sono entrambi strettamente positivi, l'origine è un nodo proprio instabile.

Svolgimento (Esercizio 212). Poniamo $f(x,y) = \frac{x^2(y^2-1)+\sqrt{x^2+y^2}+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$. L'insieme è simmetrico rispetto agli assi. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 1 + \rho^3\sin^4\theta + \rho^3\sin^2\theta\cos^2\theta - r\cos^2\theta = r^3\sin^2\theta - r\cos^2\theta + 1 = r^3 - (r^3+r)\cos^2\theta + 1,$$

da cui (si ricordi che $\rho > 0$ per definizione di Γ):

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \frac{r^3+1}{r(r^2+1)} = \cos^2\theta,\ \rho > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Per ogni $r \geq 1$ si ha $\frac{r^3+1}{r(r^2+1)} \leq 1$, quindi per ogni $r \geq 1$ esiste $\theta \in [0, 2\pi]$ tale che $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Gamma$. Ma allora l'insieme non è limitato, quindi non può essere compatto. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ascisse utilizziamo l'espressione in coordinate polari ponendo $\theta = 0, \pi$. Si ha $r = 1$, quindi $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$. Procediamo in modo analogo per le intersezioni con l'asse delle ordinate ponendo $\theta = \pi/2, 3\pi/2$. Non si ottengono intersezioni con tale asse.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x\left(x^2\left(y^2-1\right)+y^2\left(y^2-2\right)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}, \frac{y\left(2x^4+x^2\left(5y^2+1\right)+3y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\nabla f(P_1) = (-1, 0)$$
$$\nabla f(P_2) = (1, 0)$$

L'equazione della tangente in P_1 è $x = 1$ e in P_2 è $x = -1$. In P_1 e P_2, la tangente è verticale, quindi non è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$. È invece possibile ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamanete definita da $f(x, y) = 0$.

Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati, ricordando che, poiché l'insieme non è compatto, la loro esistenza non è garantita. Osserviamo infatti che per $r_n \to +\infty$ dall'equazione in coordinate polari si ottiene una successione di θ_n tali per cui $\cos^2\theta_n \to 1$, ma allora posto $x_n = r_n\theta_n$ si ha $|x_n| \to +\infty$, quindi non esistono massimi assoluti di h vincolati all'insieme.

Per quanto riguarda i minimi, osserviamo che $\partial_y f(x, y) = 0$ solo se $y = 0$, quindi le funzioni $x = x(y)$ implicitamente definite da Γ hanno massimo o minimo solo nei punti di ordinata nulla, quindi in P_1 e P_2, che risultano essere punti di minimo relativo.

Abbozziamo un grafico qualitativo di Γ. Per le simmetrie, è sufficiente studiare l'insieme nel primo quadrante. Utilizziamo la forma in coordinate polari, supponendo quindi $r \geq 1$ e $\theta \in [0, \pi/2]$. Dall'espressione in coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\theta = \dfrac{r(r^3+1)}{r^2+1}, \\ \\ y^2 = r^2(1-\cos^2\theta) = \dfrac{(r-1)r}{r^2+1}. \end{cases}$$

Per $r \to +\infty$ si ha $x \to +\infty$ e $y \to 1^-$, quindi l'insieme Γ ha le rette $y = \pm 1$ come asintoti orizzontali. Essendo inoltre $\partial_y f(x, y) > 0$ in tutto il primo quadrante ad eccezione di $(1, 0)$, si ha che $x = x(y)$ è strettamente monotona, quindi anche la sua inversa, laddove è definita, è strettamente monotona.

L'aspetto dell'insieme nel primo quadrante è quello di un arco strettamente crescente che parte da $(1,0)$ e tende asintoticamente a $y=1$. Si ricostruisce per simmetria l'insieme su tutto il piano.

Svolgimento (Esercizio 213). Utilizziamo coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ con $\rho\geq 0$ e $\theta\in[-\pi,\pi]$. L'elemento d'area è $dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\theta$. Si ha

$$
\begin{aligned}
D =&\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\leq\rho\leq 1,\ \rho\geq -\sin\theta,\ \tan\theta\leq\sqrt{3},\theta\in[-\pi/2,\pi/2]\}\\
=&\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\leq\rho\leq 1,\ \theta\in[0,\pi/3]\}\cup\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\, -\sin\theta\leq\rho\leq 1,\ \theta\in[-\pi/2,0]\}\\
D_1 =&\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\leq\rho\leq 1,\ \theta\in[0,\pi/3]\},\\
D_2 =&\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\, -\sin\theta\leq\rho\leq 1,\ \theta\in[-\pi/2,0]\}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{0}\int_{-\sin\theta}^{1}\rho^3\cdot\rho\,d\rho\,d\theta+\int_0^{\pi/3}\int_0^1\rho^3\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{0}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=-\sin\theta}^{\rho=1}d\theta+\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}d\theta\\
&=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{1+\sin^5\theta}{5}\,d\theta+\int_0^{\pi/3}\frac{1}{5}\,d\theta\\
&=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{5}\int_{-\pi/2}^{0}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 d\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^5}{2i}\,d\theta\\
&=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\left(e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right)}{2i}\,d\theta\\
&=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{0}(\sin(5\theta)-5\sin(3\theta)+10\sin\theta)\,d\theta\\
&=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}\left[\frac{\cos 5\theta}{5}-5\frac{\cos 3\theta}{3}+10\cos\theta\right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=0}\\
&=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+10\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{8}{75}.
\end{aligned}
$$

Svolgimento (Esercizio 214). Poniamo

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(x,y,z) &= (F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))\,,\\
\varphi(u,v) &= (\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))\,.
\end{aligned}
$$

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) =&\partial_x F_1(x,y,z)+\partial_y F_2(x,y,z)+\partial_z F_3(x,y,z)=2xy-2,\\
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) =&\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & x^2y\\ \vec{e}_2 & \partial_y & z^2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-2z\end{pmatrix}\\
=&\left(-2z,-2x,-x^2\right).
\end{aligned}
$$

Poiché rot $\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo. Si ha $\gamma'(t) = (\cos(t), 2\sin(t)\cos(t), 0)$, da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^4(t), 0, \sin^2(t)\right) \cdot (\cos(t), 2\sin(t)\cos(t), 0)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\cos(t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\, dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\, dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin^4(t)\cos(t)\, dt \\
&= \int_0^1 s^4\, ds + \int_1^{-1} s^4\, ds + \int_{-1}^0 s^4\, ds \\
&= \int_{-1}^1 s^4\, ds + \int_1^{-1} s^4\, ds = 0.
\end{aligned}$$

(si ricordi che la sostituzione $s = \sin t$, che implica $ds = \cos t\, dt$, è invertibile solo negli intervalli $]0, \pi/2[$, $]\pi/2, 3\pi/2[$ e $[3\pi/2, 2\pi[$, da cui la necessità di spezzare l'integrale in questo modo).

Lo Jacobiano della parametrizzazione è

$$\mathrm{Jac}\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi_1(u,v) & \partial_y\varphi_1(u,v) & \partial_z\varphi_1(u,v) \\ \partial_x\varphi_2(u,v) & \partial_y\varphi_2(u,v) & \partial_z\varphi_2(u,v) \\ \partial_x\varphi_3(u,v) & \partial_y\varphi_3(u,v) & \partial_z\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v)$ le colonne di Jac $\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \|\partial_u\varphi(u,v) \wedge \partial_v\varphi(u,v)\|\ du\, dv \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1(u,v) & \partial_v\varphi_1(u,v) \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2(u,v) & \partial_v\varphi_2(u,v) \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3(u,v) & \partial_v\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} \right| du\, dv \\
&= \sqrt{64u^2v^2 + (2u-2v)^2 + (2u+2v)^2}\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di Jac $\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (1,1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1(\varphi(u,v)) & \\ F_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} (u+v)^2\left(v^2-u^2\right) & 1 & 1 \\ \left(u^2+v^2\right)^2 & -2u & 2v \\ (u+v)^2-2\left(u^2+v^2\right) & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(8u^5v+2u^5+16u^4v^2-2u^4v+4u^3v^2-2u^3-16u^2v^4-4u^2v^3\right) dv\,du+ \\
&\quad + \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(2u^2v-8uv^5+2uv^4+2uv^2-2v^5-2v^3\right) dv\,du \\
&=0.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G}=\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1(\varphi(u,v)) & \\ G_2(\varphi(u,v)) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3(\varphi(u,v)) & \end{array}\right) dv\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} -2\left(u^2+v^2\right) & 1 & 1 \\ -2(u+v) & -2u & 2v \\ -(u+v)^2 & 2u & 2v \end{pmatrix} dv\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(16u^3v-2u^3-6u^2v-4u^2+16uv^3-6uv^2-2v^3+4v^2\right) dv\,du \\
&=0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot\,d\vec{\ell}$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario. L'immagine della frontiera con tale orientamento

è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{cases}
\gamma_1(u)=\varphi(u,-2)=\left(u-2,4-u^2,u^2+4\right),\ u\in[-2,2] \\
\gamma_2(v)=\varphi(2,v)=\left(v+2,v^2-4,v^2+4\right),\ v\in[-2,2] \\
\gamma_3(u)=\varphi(-u,2)=\left(2-u,4-u^2,u^2+4\right),\ u\in[-2,2] \\
\gamma_4(v)=\varphi(-2,-v)=\left(-v-2,v^2-4,v^2+4\right),\ v\in[-2,2],
\end{cases}$$

le cui derivate sono:

$$\begin{cases} \dot\gamma_1(u) = (1, -2u, 2u)\,,\ u \in [-2, 2] \\ \dot\gamma_2(v) = (1, 2v, 2v)\,,\ v \in [-2, 2] \\ \dot\gamma_3(u) = (-1, -2u, 2u)\,,\ u \in [-2, 2] \\ \dot\gamma_4(v) = (-1, 2v, 2v)\,,\ v \in [-2, 2]\,, \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} I_1 :=& \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((u-2)^2 \left(4-u^2\right), \left(u^2+4\right)^2, (u-2)^2 - 2\left(u^2+4\right) \Big) \cdot (1, -2u, 2u)\ du \\ =& \int_{-2}^{2} \Big(\left(4-u^2\right)(u-2)^2 - 2u\left(u^2+4\right)^2 + 2u\left((u-2)^2 - 2\left(u^2+4\right)\right) \Big)\ du \\ =& \frac{128}{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 :=& \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((v+2)^2 \left(v^2-4\right), \left(v^2+4\right)^2, (v+2)^2 - 2\left(v^2+4\right) \Big) \cdot (1, 2v, 2v)\ dv \\ =& \int_{-2}^{2} \Big(\left(v^2-4\right)(v+2)^2 + 2v\left(v^2+4\right)^2 + 2v\left((v+2)^2 - 2\left(v^2+4\right)\right) \Big)\ dv \\ =& -\frac{128}{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 :=& \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((2-u)^2 \left(4-u^2\right), \left(u^2+4\right)^2, (2-u)^2 - 2\left(u^2+4\right) \Big) \cdot (-1, -2u, 2u)\ du \\ =& \int_{-2}^{2} \Big(-\left(4-u^2\right)(2-u)^2 - 2u\left(u^2+4\right)^2 + 2u\left((2-u)^2 - 2\left(u^2+4\right)\right) \Big)\ du \\ =& -\frac{1408}{15}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 :=& \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ =& \int_{-2}^{2} \Big((-v-2)^2 \left(v^2-4\right), \left(v^2+4\right)^2, (-v-2)^2 - 2\left(v^2+4\right) \Big) \cdot (-1, 2v, 2v)\ dv \\ =& \int_{-2}^{2} \Big(-\left(v^2-4\right)(-v-2)^2 + 2v\left(v^2+4\right)^2 + 2v\left((-v-2)^2 - 2\left(v^2+4\right)\right) \Big)\ dv \\ =& \frac{1408}{15}, \end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 215). In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := \left(x^4\left(1-3y^2\right)-3\right)\,dx - 3x^5y\,dy =: p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0.$$

Poiché

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 9x^4 y =,$$

che è diverso da zero, l'equazione non è esatta. Cerchiamo dunque un fattore integrante per $\omega(x,y)=0$. Osserviamo che

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = 9x^4 y = -\frac{3}{x}q(x,y) = f(x)q(x,y),$$

quindi un fattore integrante è dato da

$$\lambda(x,y) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{-3\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{-3\log|x|} = \frac{1}{|x|^3}.$$

Studiamo il caso $x>0$. Scegliamo un punto del dominio della forma $\lambda\omega$ con ascissa positiva, ad esempio $P=(P_x,P_y)=(1,1)$, e integriamo tale forma dal punto scelto al punto generico (x_0,y_0) mediante una spezzata γ con lati paralleli agli assi contenuta nel dominio, in dettaglio prima lungo il segmento $\gamma_1(x) := (x,P_y)$ per x da P_x a x_0, e poi lungo il segmento $\gamma_2(y) := (x_0,y)$ da P_y a y_0:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda\omega &= \int_{\gamma_1}\lambda\omega + \int_{\gamma_2}\lambda\omega\\ &= \int_1^{x_0}\frac{-2x^4-3}{x^3}\,dx + \int_1^{y_0} -3x_0^2 y\,dy\\ &= -3x_0^2y_0^2 + x_0^2 + \frac{3}{x_0^2} - 1\end{aligned}$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale:

$$V(x,y) = -3x^2y^2 + x^2 + \frac{3}{x^2},$$

Per calcolo diretto si ha che la funzione V così trovata è un potenziale di $\lambda\omega$ anche nella regione con $x<0$. Le soluzioni sono descritte in forma implicita da $V(x,y)=c$, e in forma esplicita da

$$y = \pm\frac{\sqrt{x^4-cx^2+3}}{\sqrt{3}x^2}.$$

La soluzione soddisfacente a $y(1)=1$ corrisponde al segno positivo e alla scelta $c=1$, ovvero

$$y = \frac{\sqrt{x^4-x^2+3}}{\sqrt{3}x^2}.$$

Tale espressione è definita su $]0,+\infty[$, è asintotica a $\sqrt{3}/3$. Derivando, si ottiene

$$y'(x) = \frac{x^2-6}{\sqrt{3}x^3\sqrt{x^4-x^2+3}}.$$

Si ha che $x=\sqrt{6}$ è punto di minimo, e il valore del minimo è $\sqrt{11}/6$.

Svolgimento (Esercizio 216). Poniamo $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - \left(x^2+y^2\right)^{3/2} + 6x^2 - 6y^2$. L'insieme è simmetrico rispetto agli assi e all'origine. In coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = 6\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + \rho^5 - \rho^3 = \rho^2(\rho^3-\rho+6\cos 2\theta).$$

L'espressione $\rho^3-\rho+\cos 2\theta = 0$ comprende anche l'origine (basta scegliere $\theta=\pi/4$), pertanto

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) :\ \rho^3-\rho+6\cos 2\theta = 0,\ \rho\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

Da tale espressione si ricava che $|\rho^3-\rho|\le 6$ e quindi necessariamente ρ è limitato. Pertanto l'insieme è limitato, ed è anche chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite la funzione continua f, quindi è compatto. Per studiare le intersezioni con le bisettrici, risolviamo l'equazione $\rho_k^3 - \rho_k +$

$\cos 2\theta_k = 0$ per $\theta_k = \pi/4 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $\rho_k^3 - \rho_k = 0$ da cui $\rho_k = 0$ e $\rho_k = 1$ (si ricordi che $\rho_k \geq 0$). Si ottengono quindi i punti $O(0,0)$ e $P_k(\rho_k \cos\theta_k, \rho_k \sin\theta_k)$ ovvero $P_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2 = -P_0$, $P_3 = -P_1$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(5x\left(x^2+y^2\right)^{3/2} - 3x\sqrt{x^2+y^2} + 2x, 5y\left(x^2+y^2\right)^{3/2} - 3y\sqrt{x^2+y^2} - 2y\right).$$

Nel nostro caso si ha: $\nabla f(O) = (0,0)$, $\nabla f(P_0) = (7\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$, $\nabla f(P_1) = (-7\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$, $\nabla f(P_2) = (-7\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$, $\nabla f(P_3) = (7\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. Le rette tangenti sono quindi $r_{P_0}; y = \frac{7x}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}$, $r_{P_1} : y = -\frac{7x}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}$, $r_{P_2} : y = \frac{7x}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5}$, $r_{P_3} : y = -\frac{7x}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5}$. In P_k, $k = 0, 1, 2, 3$ la tangente non è verticale, quindi è possibile applicare il Teorema di Dini per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$.

Per quanto riguarda l'origine, osserviamo che se $(x_n, y_n) \in \Gamma$ con $x_n \to 0$ allora anche $(x_n, -y_n) \in \Gamma$, pertanto l'insieme non può definire implicitamente y in funzione di x in un intorno di $x = 0$ a meno che non si abbia $y = 0$ in un intorno di $x = 0$, ma ciò è assurdo perché $F(x, 0) = 0$ è un insieme finito, quindi non può contenere un intorno di $x = 0$.

In coordinate polari si ha $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2$, quindi per determinarne i massimi e minimi vincolati all'insieme è sufficiente studiare i massimi e minimi di ρ soggetto a $g(\rho, \theta) = \rho^3 - \rho + 6\cos 2\theta = 0$ con la condizione $\rho \geq 0$. Sicuramente il minimo assoluto di ρ è raggiunto nell'origine, perché l'origine appartiene a Γ.

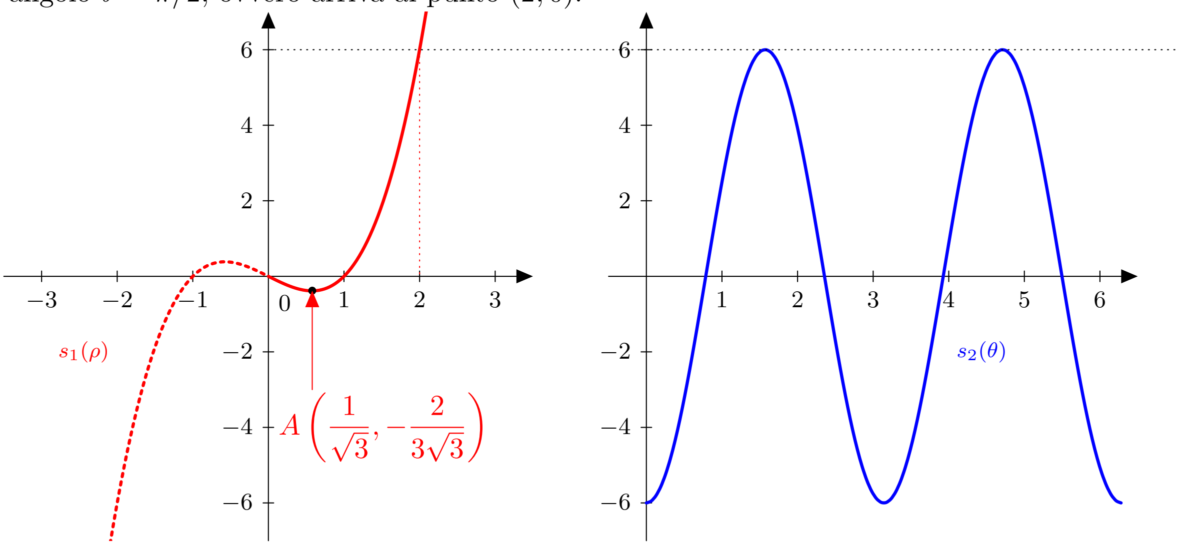
- *Primo metodo:* L'equazione $g(\rho, \theta) = \rho^3 - \rho + 6\cos 2\theta = 0$ definisce implicitamente ρ come funzione di θ laddove $\partial_\rho g(\rho, \theta) \neq 0$ ovvero per $3\rho^2 - 1 \neq 0$, quindi $\rho = 1/\sqrt{3}$ che dovrà essere studiato a parte. La funzione implicitamente definita $\rho = \rho(\theta)$ ha derivata $\dfrac{d}{d\theta}\rho(\theta) = -\dfrac{-12\sin 2\theta}{3\rho^2 - 1}$, che si annulla per $\sin 2\theta = 0$, quindi $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Questo corrisponde alle intersezioni di Γ con gli assi coordinati. Avendo già stabilito la natura dell'origine, consideriamo il caso $\rho \neq 0$. Si ha quindi $\rho^3 - \rho + 6 = 0$ (se $\theta = 0, \pi$) oppure $\rho^3 - \rho - 6 = 0$ (se $\theta = \pi/2, 3\pi/2$). Nel primo caso l'unica soluzione reale è negativa, quindi non accettabile. Nel secondo caso l'unica soluzione reale è $\rho = 2$ che porge i punti $(0, \pm 2)$, che quindi sono di massimo assoluto (tenendo conto anche del valore $\rho = 1/\sqrt{3}$ precedentemente escluso)
- *Secondo metodo:* Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con Lagrangiana $L(\rho, \theta, \lambda) = \rho + \lambda(\rho^3 - \rho + 6\cos 2\theta)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(\rho, \theta, \lambda) = 0$. I punti di Γ con ∇g nullo vanno studiati a parte, tali punti soddisfano necessariamente a $\partial_\theta g = 0$, ovvero $\sin 2\theta = 0$, e $\partial_\rho g = 0$, ovvero $\rho = 1/\sqrt{3}$. Sostituendo, si vede che tali punti non appartengono a Γ. L'equazione $\partial_\theta L(\rho, \theta, \lambda) = 0$ porge $\sin 2\theta = 0$, ovvero $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, quindi le intersezioni di Γ con gli assi. L'equazione $F(x, 0) = 0$ porge $(|x|^3 - |x| + 6)|x|^2 = 0$, ovvero $x = 0$ (infatti $t^3 - t + 6 = 0$ ammette $t = -2$ come radice intera, com'è facile osservare cercando tra i divisori del termine noto, da cui $(t^3 - t + 6) = (t + 2)(t^2 - 2t + 3)$ per la regola di Ruffini, e $t^2 - 2t + 3$ non ha radici reali, tuttavia $t = -2$ non è accettabile perché $t = |x|$), da cui l'origine. L'equazione $F(0, y) = 0$ porge $(|y|^3 - |y| - 6)|y|^2 = 0$, ovvero $y = 0$, $y = \pm 2$ (infatti $t^3 - t - 6$ ammette $t = 2$ come radice intera e per Ruffini si ha $t^3 - t - 6 = (t - 2)(t^2 + 2t + 3)$. Il polinomio $t^2 + 2t + 3$ non ha radici reali, quindi si ottiene come unica radice $t = 2$ da cui $|y| = 2$). Si ottengono i punti $(0, \pm 2)$.

In definitiva, il minimo assoluto di h vincolato a Γ è nell'origine e vale 0, il massimo assoluto di h vincolato a Γ è raggiunto in $(0, \pm 2)$ e vale 4. Geometricamente, Γ è inscritto nel cerchio centrato nell'origine e di raggio 2, ed è tangente a tale cerchio nei punti $(0, \pm 2)$. Per tracciare il grafico di Γ, tracciamo prima i grafici delle funzioni $s_1(\rho) = \rho^3 - \rho$ (con condizione $\rho \geq 0$) e $s_2(\theta) = -6\cos 2\theta$ (con condizione $\theta \in [0, 2\pi]$).

Vogliamo studiare il sistema

$$\begin{cases} s = \rho^3 - \rho, \\ s = -6\cos 2\theta \end{cases}$$

Un rapido studio di $s_1(\cdot)$ per $\rho > 0$ porge che tale funzione ammette minimo relativo per $3\rho^2 = 1$ ovvero $\rho = 1/\sqrt{3}$ e $\lim_{\rho \to +\infty} s_1(\rho) = +\infty$. Inoltre $s_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, da cui $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$. Per quanto riguarda $s_2(\cdot)$ il suo grafico si ottiene da quello di $\cos\theta$ mediante ribaltamento, dilazione verticale e compressione orizzontale. I massimi sono in $\pi/2$ e in $3\pi/2$ e valgono 6, i minimi sono in $0, \pi$ e valgono -6. Il dominio in θ dell'insieme è dato dai punti soddisfacenti $-6\cos 2\theta \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, da cui $\cos 2\theta \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}$. Studiamo l'insieme nel primo quadrante, poi ricostruiremo per simmetria l'insieme. Consideriamo quindi il punto corrispondente a $\rho^* = 1/\sqrt{3}$ e $\theta^* = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9\sqrt{3}}$. Da questo punto, muovendosi nella direzione degli angoli crescente, si originano due rami: uno con ρ decrescente che arriva all'origine per $\theta = \pi/4$, e l'altro con ρ crescente che arriva al massimo $\rho = 2$ in corrispondenza dell'angolo $\theta = \pi/2$, ovvero arriva al punto $(2, 0)$.



Svolgimento (Esercizio 217). In coordinate cilindriche, posto $s = \rho^2$, $ds = 2\rho\, d\rho$ si ha

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{\arctan(\rho^2)}^{\pi/4} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(\rho^2)\right)\rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan s\right) ds\, d\theta = \frac{\pi \log 2}{8}, \end{aligned}$$

ove si è calcolata per parti la primitiva

$$\int \arctan s\, ds = s\arctan s - \int s \cdot \frac{1}{1+s^2}\, ds = s\arctan s - \frac{1}{2}\log(1+s^2).$$

Svolgimento (Esercizio 218). Parametrizziamo l'insieme in coordinate polari, si ha $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ e $z^3 + z = \sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi[$. Poiché la funzione $z \mapsto z^3 + z$ è strettamente crescente e di classe C^1, la sua inversa è strettamente crescente, e si avrà che z raggiunge il valore massimo quando $\cos\theta - \sin\theta$ è massimo, ovvero (come si vede facilmente calcolando le derivate) per $\theta = -\pi/4$ Pertanto si avrà $x = \sqrt{2}/2$, $y = -\sqrt{2}/2$ e z sarà l'unica soluzione reale di $z^3 + z = 2$, quindi $z = 1$. Infine, per il teorema della funzione inversa, si ottiene la parametrizzazione $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = h\left(\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta)\right)$, $\theta \in [-\pi, \pi[$, essendo $h(\cdot)$ la funzione inversa di $z \mapsto z^3 + z$, che per il teorema della funzione inversa è di classe C^1. Si ottiene quindi una parametrizzazione dell'insieme di classe C^1.

Svolgimento (Esercizio 219). Il dominio della funzione f è dato da

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 1\}$$

e tale dominio è compatto e simmetrico rispetto agli assi e all'origine. Su D la funzione f è continua, pertanto ammette massimo e minimo assoluti, inoltre f è simmetrica rispetto all'asse x e antisimmetrica rispetto all'asse y. Sugli assi f si annulla. Pertanto limitiamo lo studio al primo quadrante $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Poniamo $x = \rho\cos\theta$, $y^2 = \rho\sin\theta$, $0 \leq \rho \leq 1$ e $\theta \in [0, \pi/2]$, si ha allora

$$\tilde{f}(\rho, \theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\rho^3 \sin^2\theta\cos\theta\right)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Osserviamo che l'argomento del seno è sempre compreso tra 0 e $\pi/2$, pertanto - a parità di ρ - esso è massimo quando $\sin^2\theta\cos\theta = (1 - \cos^2\theta)\cos\theta$ è massimo, quindi per $\hat{\theta} \in [0, \pi/2]$ caratterizzato da $\cos\hat{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\hat{\theta} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, come si può verificare derivando l'espressione precedente. Pertanto si ha

$$\tilde{f}(\rho, \theta) \leq \tilde{f}(\rho, \hat{\theta}) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\rho^3\right)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Indichiamo con $g_1(\rho)$ il numeratore e con $g_2(\rho)$ il denominatore dell'espressione di destra. Si ha $g_1(\rho) \geq 0$, $g_1'(\rho) \geq 0$ e $g_2(\rho) \geq 0$, $g_2'(\rho) \leq 0$ per $\rho \in [0, 1]$, da cui

$$\frac{d}{d\rho}\tilde{f}(\rho, \hat{\theta}) = \frac{g_1'(\rho)g_2(\rho) - g_1'(\rho)g_2(\rho)}{g_2^2(\rho)} \geq 0.$$

Pertanto $\tilde{f}(\rho, \hat{\theta})$ è crescente in ρ, quindi il massimo è raggiunto per $\rho = 1$ e vale

$$\tilde{f}(1, \hat{\theta}) = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right).$$

Tali valori corrispondono ai punti $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{3}}\right)$, che quindi sono di massimo assoluto. I simmetrici rispetto all'asse y sono punti di minimo assoluto.

Svolgimento (Esercizio 220). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 0+0+0 = 0.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & y^2-z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x^3 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x^2-y \end{pmatrix} = \left(-1, -2x-1, 3x^2-2y\right).\end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot\gamma(t) = (-\sin(t), 2\cos(t), 0)$ da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4\sin^2(t), \cos^3(t), \cos^2(t) - 2\sin(t)\right)\cdot(-\sin(t), 2\cos(t), 0)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\left(\cos^4(t) - 2\sin^3(t)\right)\right)\ dt \\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-2u-2v)^2 + (4uv+2v)^2 + (1-2v)^2}\,du\,dv. \\ &= \left(\sqrt{4(u+v)^2 + 4(2uv+v)^2 + (1-2v)^2}\right)\ du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,0,2) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (1,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(\frac{6}{\sqrt{53}}, -\frac{4}{\sqrt{53}}, -\frac{1}{\sqrt{53}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F}, \Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma := \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1 \circ \varphi(u,v) & \\ F_2 \circ \varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3 \circ \varphi(u,v) & \end{array}\right) du\, dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} -u^2 - v^2 + \left(u - v^2\right)^2 & 1 & -1 \\ (u-v)^3 & 1 & -2v \\ (u-v)^2 + v^2 - u & 2u & 2v \end{pmatrix} du\, dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(-2u^4 + 4u^3 v - 8u^2 v^3 - 2u^2 v + u^2 + 4uv^5 - 12uv^3 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. +4uv^2 - u + 2v^5 + 2v^4 - 6v^3 + 2v^2\right) du\, dv \\
&= 64.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G}, \Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, d\sigma := \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1 \circ \varphi(u,v) & \\ G_2 \circ \varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3 \circ \varphi(u,v) & \end{array}\right) du\, dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2(u-v) - 1 & 1 & -2v \\ 3(u-v)^2 - 2\left(u - v^2\right) & 2u & 2v \end{pmatrix} du\, dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(-6u^2 v + 7u^2 + 12uv^2 - 6uv - 10v^3 + v^2\right) du\, dv \\
&= \frac{512}{3}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2] \times [-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u, -2) = \left(u + 2, u - 4, u^2 + 4\right),\ u \in [-2, 2], \\
\gamma_2(v) &:= \varphi(2, v) = \left(2 - v, 2 - v^2, v^2 + 4\right),\ v \in [-2, 2], \\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u, 2) = \left(-u - 2, -u - 4, u^2 + 4\right),\ u \in [-2, 2], \\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-2, -v) = \left(v - 2, -v^2 - 2, v^2 + 4\right),\ v \in [-2, 2].
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(u) &:= (1, 1, 2u)\,,\ u \in\,]-2, 2[\,,\\
\dot{\gamma}_2(v) &:= (-1, -2v, 2v)\,,\ v \in\,]-2, 2[\,,\\
\dot{\gamma}_3(u) &:= (-1, -1, 2u)\,,\ u \in\,]-2, 2[\,,\\
\dot{\gamma}_4(v) &:= (1, -2v, 2v)\,,\ v \in\,]-2, 2[\,.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_1(u)) \cdot \dot{\gamma}_1(u)\, du\\
&= \int_{-2}^{2} \big(12 - 8u, (u+2)^3, u^2 + 3u + 8\big) \cdot (1, 1, 2u)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} 3u^3 + 12u^2 + 20u + 20\, du\\
&= 144.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_2(v)) \cdot \dot{\gamma}_2(v)\, dv\\
&= \int_{-2}^{2} \left(v^2\left(v^2 - 5\right), (2-v)^3, 2(v-1)^2\right) \cdot (-1, -2v, 2v)\ dv\\
&= \int_{-2}^{2} v\left(v^3 - 8v^2 + 21v - 12\right)\ dv\\
&= \frac{624}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\gamma_3 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_3(u)) \cdot \dot{\gamma}_3(u)\, du\\
&= \int_{-2}^{2} \big(8u + 12, -(u+2)^3, u^2 + 5u + 8\big) \cdot (-1, -1, 2u)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} 3u^3 + 16u^2 + 20u - 4\, du\\
&= \frac{208}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_4(v)) \cdot \dot{\gamma}_4(v)\, dv\\
&= \int_{-2}^{2} \left(v^2\left(v^2 + 3\right), (v-2)^3, 2\left(v^2 - 2v + 3\right)\right) \cdot (1, -2v, 2v)\ dv\\
&= \int_{-2}^{2} -v\left(v^3 - 16v^2 + 37v - 20\right)\ dv\\
&= -\frac{2512}{15}.
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{512}{3},$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 221). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{X(x)T'(t) - T(t)X''(x) + T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{T'(t)}{T(t)} = 1 - \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ -X''(x) - \lambda X(x) + X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$. Il polinomio caratteristico è $p(\mu) = -\lambda - \mu^2 + 1$, il cui discriminante è $\Delta_x(\lambda) = -4(\lambda - 1)$.

Se $\Delta_x(\lambda) > 0$, le soluzioni sono date da:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} e^{\frac{1}{2}x\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} + c_{2,\lambda} e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{\Delta_x(\lambda)}}.$$

Dalle condizioni al contorno, si ottiene $c_{1,\lambda} + c_{2,\lambda} = 0$ da $X(0) = 0$, quindi $c_{1,\lambda} = -c_{2,\lambda}$. Da $X(\pi) = 0$ si ha:

$$c_{1,\lambda} e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} + c_{2,\lambda} e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} = 0,$$

da cui $c_{1,\lambda} = c_{2,\lambda} = 0$ essendo $\Delta_x(\lambda) \neq 0$. Questo caso non è accettabile.

Se $\Delta_x(\lambda) = 0$, le soluzioni sono date da:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} + x c_{2,\lambda}.$$

Sostituendo le condizioni si ha $c_{1,\lambda} = 0$ da $X(0) = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene ancora $c_{2,\lambda} = 0$. Quindi anche questo caso non è accettabile.

Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ le soluzioni sono:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} \cos\left(\frac{1}{2}x\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) - c_{2,\lambda} \sin\left(\frac{1}{2}x\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right).$$

Sostituendo $X(0) = 0$ si ha $c_{1,\lambda} = 0$. Sostituendo $X(\pi) = 0$ si ha

$$c_{1,\lambda} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) - c_{2,\lambda} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) = 0.$$

Dovendosi avere $c_{2,\lambda} \neq 0$, e poiché $\Delta_x(\lambda) < 0$, necessariamente $-\dfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, quindi

$$\lambda_n = n^2 + 1,\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0.$$

Questo caso è accettabile.

Si ha $\Delta_x(\lambda) < 0$ se e solo se $\lambda > 1$. Si ottengono quindi le soluzioni relative a λ_n (il segno di n è assorbito nella costante moltiplicativa):

$$X_n(x) := c_n \sin(nx), \qquad c_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo i valori accettabili di λ_n nell'equazione per $T(t)$ si ottiene:

$$\left(n^2 + 1\right) T_n(t) + T_n'(t) = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $q(\mu) = \mu + n^2 + 1$.Tale polinomio si annulla per $\mu = -n^2 - 1$, quindi si hanno le soluzioni:

$$T_n(t) := d_n e^{(-n^2-1)t},\ d_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Posto $b_n = c_n d_n$, si hanno le soluzioni elementari:

$$u_n(t,x) := T_n(t)X_n(x) = b_n e^{(-n^2-1)t} \sin(nx),\ b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cerchiamo di ottenere il dato iniziale con una sovrapposizione di soluzioni elementari:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,x),$$

ovvero

$$\frac{x^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli seni di $\frac{x^2}{2}$. Ciò vuol dire prolungare per disparità tale funzione da $[0,\pi]$ a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{x^2}{2}) \sin(nx)\, dx \\ &= -\frac{\pi^2(-1)^n n^2 - 2(-1)^n + 2}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

La soluzione risulta quindi:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\left(\pi^2(-1)^n n^2 - 2(-1)^n + 2\right) e^{(-n^2-1)t} \sin(nx)}{\pi n^3}.$$

Vista la presenza dell'esponenziale negativa, la serie e le sue derivate convergono totalmente, definendo quindi una soluzione classica del probblema.

Svolgimento (Esercizio 222). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $2y'(t) = x''(t) - 4x'(t) - 4$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$2(6y(t) - x(t)) = x''(t) - 4x'(t) - 4.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - 4x'(t) + 2x(t) - 12y(t) - 4 = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $2y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$x''(t) - 4x'(t) - 6\left(x'(t) - 4x(t) - 4t\right) + 2x(t) - 4 = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$x''(t) - 10x'(t) + 26x(t) + 24t - 4 = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \mathrm{Traccia}(A)\, x'(t) + \mathrm{Det}(A)\, x(t) = 4 - 24t.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 10\mu + 26$, di discriminante $\delta = -4$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = 5 - i$ e $\mu_2 = 5 + i$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{5t}\cos(t)$ e $x_{o,2} := -e^{5t}\sin(t)$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t}\cos(t) & -e^{5t}\sin(t) \\ 5e^{5t}\cos(t) - e^{5t}\sin(t) & -e^{5t}\cos(t) - 5e^{5t}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{5t}\cos(t) & -e^{5t}\sin(t) \\ 5e^{5t}\cos(t) - e^{5t}\sin(t) & -e^{5t}\cos(t) - 5e^{5t}\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 - 24t \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{5t}(4-24t)\sin(t)}{-e^{10t}\cos^2(t) - e^{10t}\sin^2(t)} \\ \frac{e^{5t}(4-24t)\cos(t)}{-e^{10t}\cos^2(t) - e^{10t}\sin^2(t)} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned} c(t) &= -\frac{2}{169}e^{-5t}((390t + 7)\sin(t) + (78t + 17)\cos(t)), \\ d(t) &= \frac{2}{169}e^{-5t}((78t + 17)\sin(t) - (390t + 7)\cos(t)). \end{aligned}$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{5t}\cos(t) - de^{5t}\sin(t) - \frac{2}{169}(78t + 17),\ c, d \in \mathbb{R}, \\ \dot{x}(t) &= -ce^{5t}\sin(t) + 5ce^{5t}\cos(t) - 5de^{5t}\sin(t) - de^{5t}\cos(t) - \frac{12}{13},\ c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ha:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left(x'(t) - 4x(t) - 4t\right) \\ &= \frac{1}{338}\left(-169e^{5t}(c + d)\sin(t) + 169e^{5t}(c - d)\cos(t) - 4(13t + 5)\right),\ c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) &= ce^{5t}\cos(t) - de^{5t}\sin(t) - \frac{2}{169}(78t + 17), \\ \\ y(t) &= \frac{1}{338}\left(-169e^{5t}(c + d)\sin(t) + 169e^{5t}(c - d)\cos(t) - 4(13t + 5)\right), \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 223). Poniamo $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{5/2} - 4\left(x^2 + y^2\right)^{3/2} + 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2y$. L'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate $f(x, y) = f(-x, y)$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho(\rho^4 - 4\rho^2 + 2 - 2\sin\theta) = \rho\left(\rho^2(\rho^2 - 2) + 2(1 - \sin\theta)\right),$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho^2(\rho^2 - 4) = 2(\sin\theta - 1),\ \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Dalla scrittura $\rho^2(\rho^2 - 4) = 2(\sin\theta - 1)$ si ricava che ρ è limitato, quindi, poiché l'insieme è chiuso, è anche compatto. Per determinare le intersezioni con l'asse delle ascisse, studiamo $\theta = 0, \pi$, ovvero l'equazione $\rho^2(\rho^2 - 4) = -2$, le cui soluzioni sono $\rho^2 = 2 \pm \sqrt{2}$, cui va aggiunta l'origine. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = \left(-\sqrt{2 - \sqrt{2}}, 0\right)$, $P_3 = \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}, 0\right)$, $P_4 = \left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}}, 0\right)$, $P_5 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}, 0\right)$. Per studiare le intersezioni con l'asse delle ordinate, studiamo $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, ovvero le equazioni $\rho^2(\rho^2 - 4) = 0$ e $\rho^2(\rho^2 - 4) = -4$, cui va aggiunta l'origine. Le intersezioni con l'asse delle ordinate sono $P_6 = (0, 0)$, $P_7 = (0, 2)$, $P_8 = \left(0, -\sqrt{2}\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=5x\left(x^2+y^2\right)^{3/2}-12x\sqrt{x^2+y^2}+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \partial_y f(x,y)=5y\left(x^2+y^2\right)^{3/2}-12y\sqrt{x^2+y^2}+\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}-2.\end{cases}$$

Nel nostro caso, nei punti P_2, P_3, P_4, P_5, P_7 il gradiente di f è diverso da $(0,0)$, quindi le rette tangenti in tali punti sono:

$$\begin{aligned} r_{P_2}:\ y&=4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(x+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),\\ r_{P_3}:\ y&=4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-x\right),\\ r_{P_4}:\ y&=-4\left(1+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),\\ r_{P_5}:\ y&=-4\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-x\right),\\ r_{P_7}:\ y&=2.\end{aligned}$$

Si ha $\partial_y(P_1)=-2\neq0$, $\partial_y(P_2)=-2\neq0$, $\partial_y(P_3)=-2\neq0$, $\partial_y(P_4)=-2\neq0$, $\partial_y(P_5)=-2\neq0$, $\partial_y(P_7)=32\neq0$ quindi le tangenti in tali punti non sono verticali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $y=y(x)$ implicitamente definita da $f(x,y)=0$. Si ha $\partial_x(P_2)=-2+12\left(2-\sqrt{2}\right)-5\left(2-\sqrt{2}\right)^2\neq0$, $\partial_x(P_3)=2-12\left(2-\sqrt{2}\right)+5\left(2-\sqrt{2}\right)^2\neq0$, $\partial_x(P_4)=-2+12\left(2+\sqrt{2}\right)-5\left(2+\sqrt{2}\right)^2\neq0$, $\partial_x(P_5)=2-12\left(2+\sqrt{2}\right)+5\left(2+\sqrt{2}\right)^2\neq0$ quindi le tangenti in tali punti non sono orizzontali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $x=x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y)=0$. In coordinate polari si ha $h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2$. Il minimo assoluto vincolato è raggiunto nell'origine $\rho=0$. Per determinare il massimo, studiamo la scrittura in coordinate polari. Infatti si deve avere $\rho^2(\rho^2-4)=2(\sin\theta-1)$, da cui $-2\leq\rho^2(\rho^2-4)\leq0$, da cui si ricava $0\leq\rho\leq2$ perché $\rho\geq0$. Quindi il massimo di ρ^2 vincolato a Γ vale 4 ed è raggiunto per $\rho=2$ e $\theta=\pi/2$, ovvero nel punto $(0,2)$.

Svolgimento (Esercizio 224). Passando in coordinate polari e sfruttando la simmetria del dominio e della funzione rispetto alla bisettrice $y=x$, si ha

$$\begin{aligned} I&=2\int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{3/(\cos\theta+\sin\theta)}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta\\ &=2\int_0^{\pi/4}\left(\frac{3}{\cos\theta+\sin\theta}-2\sin\theta\right)\cdot(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\\ &=2\int_0^{\pi/4}\left(3-2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\right)\,d\theta\\ &=\frac{3}{2}\pi-2\int_0^{\pi/4}\sin2\theta\,d\theta-4\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\,d\theta\\ &=\frac{3}{2}\pi-1+2\int_0^{\pi/4}(\cos2\theta-1)\,d\theta=\frac{3}{2}\pi-1-\frac{\pi}{2}+1=\pi.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 225). Si veda la soluzione dell'Esercizio 220.

Svolgimento (Esercizio 226). Si veda la soluzione dell'Esercizio 221.

Svolgimento (Esercizio 227). Poniamo $f(x,y) = x^4 + 2x^3 - 3x + 2y^3 + y$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\cos^4(\theta) + 2\rho^3\sin^3(\theta) + 2\rho^3\cos^3(\theta) + \rho\sin(\theta) - 3\rho\cos(\theta),$$

da cui:

$$\Gamma := \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) :\ \rho^4\cos^4(\theta) + 2\rho^3\sin^3(\theta) + 2\rho^3\cos^3(\theta) + \rho\sin(\theta) - 3\rho\cos(\theta) = 0,\ \rho \geq 0\, \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Per determinare le intersezioni con l'asse delle ascisse, studiamo $f(x,0) = 0$, ovvero l'equazione $x^4 + 2x^3 - 3x = 0$, ovvero $0 = x(x^3 + 2x^2 - 3) = x(x-1)(x^2 + 3x + 3)$, le cui soluzioni sono 0, 1. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$. Per determinare le intersezioni con l'asse delle ordinate, studiamo $f(0,y) = 0$, ovvero l'equazione $2y^3 + y = 0$, che si annulla solo in 0. L' intersezione con l'asse delle ordinate è $P_1 = (0,0)$. Per ogni x fissato, si ha che $f(x,y)$ è un polinomio di terzo grado in y, quindi ammette sempre almeno una radice reale. Ciò implica che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ esiste almeno un y tale che $(x,y) \in \Gamma$, da cui si deduce che Γ non è limitato. Γ è chiuso perché controimmagine dello zero mediante una funzione continua.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0,y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da: $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 + 6x^2 - 3, 6y^2 + 1\right)$ e non si annulla mai. Quindi le rette tangenti in P_1 e P_2 sono $r_{P_1} : y = 3x$, $r_{P_2} : y = -7(x-1)$. Si ha $\partial_y(P_1) = 1 \neq 0$, $\partial_y(P_2) = 1 \neq 0$ quindi le tangenti in tali punti non sono verticali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Si ha $\partial_x(P_1) = -3 \neq 0$, $\partial_x(P_2) = 7 \neq 0$ quindi le tangenti in tali punti non sono orizzontali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$.

Il gradiente di f non è mai identicamente nullo. Poiché $(0,0) \in \Gamma$, $h(x,y) \geq 0$ e $h(0,0) = 0$, is ha che il minimo assoluto di $h(\cdot)$ vincolato a Γ è raggiunto in $(0,0)$ e vale 0. Poiché l'insieme è illimitato, h non ammette massimo assoluto vincolato a Γ.

Svolgimento (Esercizio 228). Il dominio D può essere scritto come $D = D_1 \cup D_2$ dove $D_2 = D \cap \{(x,y) : |y| \leq 1\}$. Il dominio D_2 è simmetrico rispetto agli assi e, indicata con f, la funzione integranda, si ha $f(x,y) = -f(x,-y)$, quindi l'integrale di f su D_2 è nullo. Per quanto riguarda $D_1 = \{(x,y) : x \in [-1,1], 1 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$, tale dominio è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e si ha $f(x,y) = f(-x,y)$, quindi

$$I = 2\int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-x^2}} (x^2y + x^4y^3)\, dy\, dx = 2\int_0^1 \left(\frac{x^8}{4} - x^6 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{64}{315}.$$

Svolgimento (Esercizio 229). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 2xz + 1 + 1 = 2xz + 2.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x+y-z \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x-y+z \end{pmatrix} = \left(0, x^2-1, 1\right).\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.

Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), 0, \cos(t))$ da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} \big(\sin(t)\cos^2(t), \cos(t)-\sin(t), \sin(t)+\cos(t)\big)\cdot(-\sin(t),0,\cos(t))\;dt\\ &= \int_0^{2\pi} \big(\cos(t)\big(\sin(t)+\cos^3(t)\big)\big)\;dt\\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}\operatorname{Jac}\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v)\\ \nabla\varphi_2(u,v)\\ \nabla\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v))\\ &= \begin{pmatrix} 2u+v & u\\ v & u-2v\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{(2u^2-4uv-2v^2)^2+(-u-v)^2+(3v-u)^2}\,du\,dv.\\ &= \left(\sqrt{4\left(-u^2+2uv+v^2\right)^2+(u-3v)^2+(u+v)^2}\right)\,du\,dv.\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\operatorname{Jac}\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,-1,1) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\operatorname{Jac}\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right).$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma := \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \det\begin{pmatrix} 0 & 2u+v & u \\ u^2(u+v)^2-1 & v & u-2v \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} -u^5-3u^4v-3u^3v^2-u^2v^3+2u^2-4uv+u-2v^2+v\,du\,dv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u,-2) = ((u-2)u, -2(u+2), u-2)\,,\ u\in[-2,2]\,,\\
\gamma_2(v) &:= \varphi(2,v) = (2(v+2), -(v-2)v, v+2)\,,\ v\in[-2,2]\,,\\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u,2) = ((u-2)u, -2(u+2), 2-u)\,,\ u\in[-2,2]\,,\\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-2,-v) = (2(v+2), -(v-2)v, -v-2)\,,\ v\in[-2,2]\,.
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (2(u-1), -2, 1)\,,\ u\in\,]-2,2[\,,\\
\dot\gamma_2(v) &:= (2, 2-2v, 1)\,,\ v\in\,]-2,2[\,,\\
\dot\gamma_3(u) &:= (2(u-1), -2, -1)\,,\ u\in\,]-2,2[\,,\\
\dot\gamma_4(v) &:= (2, 2-2v, -1)\,,\ v\in\,]-2,2[\,.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\gamma_1 = \int_{-2}^{2}\vec{F}(\gamma_1(u))\cdot\dot\gamma_1(u)\,du \\
&= \int_{-2}^{2}\big((u-2)^3u^2, u^2-5u-2, u^2+u+2\big)\cdot(2(u-1),-2,1)\ du \\
&= \int_{-2}^{2} 2u^6-14u^5+36u^4-40u^3+15u^2+11u+6\,du \\
&= \frac{22328}{35}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\gamma_2 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_2(v))\cdot\dot{\gamma}_2(v)\,dv \\
&= \int_{-2}^{2} \left(4(v+2)^3, -v^2+3v+2, v^2+v+6\right)\cdot(2, 2-2v, 1)\ dv \\
&= \int_{-2}^{2} 10v^3+41v^2+99v+74\,dv \\
&= \frac{1544}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\gamma_3 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_3(u))\cdot\dot{\gamma}_3(u)\,du \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-(u-2)^3u^2, u^2-3u-6, u^2-u+6\right)\cdot(2(u-1), -2, -1)\ du \\
&= \int_{-2}^{2} -2u^6+u^5(v+12)-6u^4(v+4)+4u^3(3v+4)-u^2(9v+1)+3uv+u+6(v-1)\,du \\
&= -\frac{64184}{105}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec{F}\cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec{F}(\gamma_4(v))\cdot\dot{\gamma}_4(v)\,dv \\
&= \int_{-2}^{2} \left(-4(v+2)^3, -v^2+v+6, v^2+3v+2\right)\cdot(2, 2-2v, -1)\ dv \\
&= \int_{-2}^{2} -6v^3-61v^2-97v-54\,dv \\
&= -\frac{1624}{3}.
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1+I_2+I_3+I_4=0,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 230). L'equazione assegnata ammette $y(x)\equiv 0$ come soluzione. In forma di equazione totale si ha:

$$\omega(x,y) := \left(18x^2y^4-y^6\right)\ dx + \left(-2xy^5-9\right)\ dy = p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy.$$

Poiché:

$$\partial_y p(x,y)-\partial_x q(x,y) = 72x^2y^3-4y^5,$$

l'equazione totale non è esatta. Cerchiamo un fattore integrante per $\omega(x,y)$. Osserviamo che:

$$\frac{\partial_y p(x,y)-\partial_x q(x,y)}{-p(x,y)} = -\frac{4}{y} =: f(y),$$

è una funzione della sola variabile y, pertanto si ha il fattore integrante

$$\lambda(x,y) = e^{\int f(y)\,dy} = \frac{1}{y^4}.$$

Scegliamo un punto del dominio con $y>0$, ad esempio $(0,1)$ e integriamo la forma $\lambda\omega$ da tale punto al punto generico (x_0,y_0) mediante una spezzata con lati paralleli agli assi:

$$\int_0^{x_0} 18x^2-1\,dx + \int_1^{y_0} \frac{-2x_0y^5-9}{y^4}\,dy$$

Trascurando le costanti additive si ottiene il potenziale

$$V(x,y) := 6x^3 - xy^2 + \frac{3}{y^3}.$$

Tale funzione è un potenziale anche per $y < 0$. Le soluzioni in forma implicita sono date da $V(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. La soluzione soddisfacente a $y(1) = 1$ è quella corrispondente a $c = 8$, ovvero

$$F(x,y) := 2(3x^3 - 4)y^3 - xy^5 + 3 = 0,$$

con la condizione $y > 0$. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $F(x,y) = 0$. Parametrizziamo l'insieme $\Gamma := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ mediante rette per l'origine, ovvero studiamo $F(x,mx) = 0$. Si ottiene $-m^5x^6 + 2m^3\left(3x^3 - 4\right)x^3 + 3 = 0$, che è un'equazione di secondo grado in x^3. Risolvendo, si ha la seguente parametrizzazione di Γ

$$\begin{cases} x_\pm^3(m) = \dfrac{1}{m^3} \cdot \dfrac{-4m^3 \pm \sqrt{16m^6 + 3m^5 - 18m^3}}{m^2 - 6} = \dfrac{-4m^2 \pm \sqrt{p(m)}}{m^2(m^2 - 6)}, \\[2ex] y_\pm^3(m) = m^3 x_\pm^3(m) = m \cdot \dfrac{-4m^2 \pm \sqrt{p(m)}}{m^2 - 6}, \end{cases}$$

dove $p(m) = m(16m^3 + 3m^2 - 18)$. Studiamo brevemente il segno di $p(m)$. Si ha $p(0) = 0$. La derivata di $q(m) = 16m^3 + 3m^2 - 18$ è nulla per $m = -1/8$ e $m = 0$. Per tali valori di m la funzione è negativa, pertanto $p(m)$ si annulla, oltre all'origine, in un unico punto m'. Osservato che $q(1) > 0$, si ha $0 < m' < 1$. Pertanto i rami esistono per $m < -\sqrt{6}$, $-\sqrt{6} < m < 0$, $m' < m < \sqrt{6}$ o $m > \sqrt{6}$. Si ha anche

$$x_\pm^3(m) = \frac{1}{-4m^2 \mp \sqrt{p(m)}} \frac{16m^4 - p(m)}{m^2(m^2 - 6)} = \frac{3}{m(4m^2 \pm \sqrt{p(m)})}$$

Calcoliamo ora i limiti dei vari rami agli estremi dei loro intervalli di definizione.

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \to \sqrt{6}^\mp} x_-^3(m) = \pm\infty, && \lim_{m \to \sqrt{6}^\mp} y_-^3(m) = \pm\infty \\
&\lim_{m \to \sqrt{6}} x_+^3(m) = \frac{\sqrt{6}}{96}, && \lim_{m \to \sqrt{6}} y_+^3(m) = \frac{6}{16}, \\
&\lim_{m \to 0^-} x_\pm^3(m) = \pm\infty, && \lim_{m \to 0^-} y_\pm^3(m) = 0, \\
&\lim_{m \to -\sqrt{6}} x_-^3(m) = -\frac{\sqrt{6}}{96}, && \lim_{m \to -\sqrt{6}} y_-^3(m) = \frac{6}{16}, \\
&\lim_{m \to \pm\infty} x_\pm^3(m) = 0, && \lim_{m \to -\infty} y_+^3(m) = -\lim_{m \to +\infty} y_-^3(m) = +\infty,
\end{aligned}$$

Dall'equazione dell'insieme, passando al limite per $x \to 0$, si ottiene anche

$$\lim_{m \to -\infty} y_-(m) = \lim_{m \to +\infty} y_+(m) = \sqrt[3]{3}/2,$$

in quanto $F(0,y) = 0$ solo se $y = \sqrt[3]{3}/2$.

Determiniamo il ramo cui appartiene la condizione iniziale. Si deve avere $(x(m^*), y(m^*)) = (1,1)$. Essendo $y(m^*) = m^* x(m^*)$, questo implica $m^* = 1$ e $p(m^*) = 1$. Quindi $x_+(m^*) = y_+(m^*) = 3/5$ e $x_-(m^*) = y_-(m^*) = 1$: la condizione iniziale appartiene al ramo $(x_-(m), y_-(m))$ per $m \in]m', \sqrt{6}[$. Osservato che

$$\lim_{m \to \sqrt{6}^-} y_-(m) - \sqrt{6}x(m) = \lim_{m \to \sqrt{6}^-} (m - \sqrt{6}) \sqrt[3]{\frac{-4m - \sqrt{p(m)}}{m(m^2 - 6)}} = 0,$$

si ha quindi $y = \sqrt{6}x$ è asintoto obliquo per questo ramo a $x \to +\infty$. Lungo questo ramo si ha $x, y > 0$, pertanto l'equazione ammette un'unica soluzione locale che quindi deve coincidere con il ramo stesso. Se ne conclude in particolare che per $x > x(m')$ (e in particolare per $x \geq 1$) la soluzione esiste sempre ed è asintotica a $y = \sqrt{6}x$. Nel punto $(x_-(m'), y_-(m'))$ confluiscono i rami $m \mapsto (x_\pm(m), y_\pm)$ e l'equazione è soddisfatta, pertanto la soluzione $y = y(x)$ prosegue sul ramo $(x_+(m), y_+(m))$ per $m \in]m', \sqrt{6}[$. Dai limiti calcolati, tale ramo prosegue con continuità anche in $m = \sqrt{6}$ e quindi è definito per $m \in]m', +\infty[$ e congiunge i punti $(0, \sqrt[3]{3}/2)$ con $(x_-(m'), y_-(m'))$. La soluzione prosegue poi sul ramo $(x_-(m), y_-(m))$ per $m \in]-\infty, -\sqrt{6}[$, che è l'unico a connettersi al punto $(0, \sqrt[3]{3}/2)$. Il teorema di esistenza e unicità assicura che la connessione sia C^1. Tale ramo prosegue per continuità anche per $m = -\sqrt{6}$ ed è quindi definito per $m \in]-\infty, 0[$. Dai limiti calcolati, si ha che $y = y(x)$ è quindi definita per tutti gli $x < 0$ ed ammette l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$.

Riassumendo, la soluzione risulta quindi definita su tutto $\mathbb{R}$, e ammette l'asintoto obliquo $y = \sqrt{6}x$ per $x \to +\infty$ e l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$. Poiché $F(x, 0) \neq 0$, la soluzione è sempre strettamente positiva, e quindi la sua derivata si annulla solo se $18x^2 = y^2$ ovvero per $m = \pm 3\sqrt{2}$. Per $m = 3\sqrt{2}$ siamo sul ramo $(x_+(m), y_+(m))$, quindi il punto critico è $x = x_+(3\sqrt{2})$ e il suo valore è $y = y_+(3\sqrt{2})$, tale punto è un minimo relativo per $m = -3\sqrt{2}$ siamo sul ramo $(x_-(m), y_-(m))$, quindi il punto critico è $x = x_-(-3\sqrt{2})$ e il suo valore è $y = y_-(-3\sqrt{2})$, tale punto è un massimo relativo.

Svolgimento (Esercizio 231). Si veda la soluzione dell'Esercizio 181.

Svolgimento (Esercizio 232). La regione oggetto di studio è la parte dello spazio compresa tra le sfere centrate in $(0, 0, 1)$ di raggio 2 e $(0, 0, -2)$ di raggio 3. Utilizzando coordinate cilindriche $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, si ottiene $|z - 1| \leq \sqrt{4 - r^2}$, $|z + 2| \leq \sqrt{9 - r^2}$, da cui $1 - \sqrt{4 - r^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{4 - r^2}$, $-2 - \sqrt{9 - r^2} \leq z \leq -2 + \sqrt{9 - r^2}$, con le condizioni $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq r \leq 3$. Ponendo a sistema tali condizioni, si ha $0 \leq r \leq 2$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $1 - \sqrt{4 - r^2} \leq z \leq -2 + \sqrt{9 - r^2}$, il che implica $3 - \sqrt{4 - r^2} \leq \sqrt{9 - r^2}$, e quindi $0 \leq r \leq \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Pertanto il volume è dato da ($t = r^2$, $dt = 2r\,dr$)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \int_{1-\sqrt{4-r^2}}^{-2+\sqrt{9-r^2}} dz\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \int_{1-\sqrt{4-r^2}}^{-2+\sqrt{9-r^2}} dz\, r\, dr = \pi \int_0^{\frac{32}{9}} \left((-2 + \sqrt{9 - t}) - (1 - \sqrt{4 - t})\right) dt$$
$$= \pi \left[-\frac{32}{3} + \int_0^{\frac{32}{9}} (9 - t)^{1/2}\, dt + \int_0^{\frac{32}{9}} (4 - t)^{1/2}\, dt \right] = 4\pi.$$

La superficie è data dall'unione delle due superfici parametrizzate da

$$\varphi_+(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, -2 + \sqrt{9 - r^2}), \qquad \varphi_-(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - \sqrt{4 - r^2}),$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq r \leq \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Le matrici Jacobiane delle parametrizzazioni sono

$$\mathrm{Jac}\varphi_+(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \\ -\frac{r}{\sqrt{9-r^2}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Jac}\varphi_-(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \\ -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

e i rispettivi elementi di area sono $\dfrac{3r}{\sqrt{9 - r^2}}$ e $\dfrac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}$. Pertanto l'area è data da

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \left[\frac{3r}{\sqrt{9 - r^2}} + \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} \right] dr\, d\theta = 6\pi \int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \frac{r\, dr}{\sqrt{9 - r^2}} + 4\pi \int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \frac{r\, dr}{\sqrt{4 - r^2}} = 4\pi + \frac{16}{3}\pi = \frac{28}{3}\pi.$$

Svolgimento (Esercizio 233). Poniamo $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 0+1+2 = 3.\\
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & yz^2\\ \vec{e}_2 & \partial_y & y+z\\ \vec{e}_3 & \partial_z & 2z-2x\end{pmatrix} = \left(-1, 2yz+2, -z^2\right).
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), 1, \cos(t))$ da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} \left(t\sin^2(t), t+\sin(t), 2\sin(t)-2\cos(t)\right)\cdot(-\sin(t),1,\cos(t))\;dt\\
&= \int_0^{2\pi} \left(t - t\sin^3(t) + \sin(t) + \sin(2t) - 2\cos^2(t)\right)\;dt\\
&= \frac{2}{3}\pi(3\pi-1).
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v)\\ \nabla\varphi_2(u,v)\\ \nabla\varphi_3(u,v)\end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v))\\
&= \begin{pmatrix} 4u+v & u\\ v & u-4v\\ 1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1\\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2\\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3\end{pmatrix}\right|\\
&= \sqrt{\left(4u^2-16uv-4v^2\right)^2 + (-3u-v)^2 + (5v-u)^2}\,du\,dv.\\
&= \left(\sqrt{16\left(-u^2+4uv+v^2\right)^2 + (u-5v)^2 + (3u+v)^2}\right)\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = (0,-2,1) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = (0,1)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P)\wedge\partial_v\varphi(P)\|} = \left(\frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, -2\sqrt{\frac{2}{21}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma := \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\left(\begin{array}{c|c} F_1\circ\varphi(u,v) & \\ F_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right)du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\begin{pmatrix} (u-2v)v(u+v)^2 & 4u+v & u \\ u+(u-2v)v+v & v & u-4v \\ 2(u+v)-2u(2u+v) & 1 & 1\end{pmatrix}du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} -u^4v-16u^4+5u^3v^2+56u^3v+8u^3+3u^2v^3+ \\
&+48u^2v^2-27u^2v-3u^2-13uv^4+8uv^3-35uv^2-4uv-10v^5-6v^3-v^2\,du\,dv \\
&= \frac{2304}{5}.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma := \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right)du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\det\begin{pmatrix} -1 & 4u+v & u \\ 2(u-2v)v(u+v)+2 & v & u-4v \\ -(u+v)^2 & 1 & 1\end{pmatrix}du\,dv \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} -4u^4+2u^3v+36u^2v^2+38uv^3-5u+8v^4-7v\,du\,dv \\
&= \frac{6144}{5}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-2,2]\times[-2,2]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u,-2) = (2(u-1)u, -2(u+4), u-2)\,,\ u\in[-2,2]\,, \\
\gamma_2(v) &:= \varphi(2,v) = (2(v+4), -2(v-1)v, v+2)\,,\ v\in[-2,2]\,, \\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u,2) = (2(u-1)u, -2(u+4), 2-u)\,,\ u\in[-2,2]\,, \\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-2,-v) = (2(v+4), -2(v-1)v, -v-2)\,,\ v\in[-2,2]\,.
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (4u-2,-2,1)\,,\ u\in\,]-2,2[\,,\\
\dot\gamma_2(v) &:= (2,2-4v,1)\,,\ v\in\,]-2,2[\,,\\
\dot\gamma_3(u) &:= (4u-2,-2,-1)\,,\ u\in\,]-2,2[\,,\\
\dot\gamma_4(v) &:= (2,2-4v,-1)\,,\ v\in\,]-2,2[\,.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\gamma_1} \vec F\cdot d\gamma_1 = \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_1(u))\cdot\dot\gamma_1(u)\,du\\
&= \int_{-2}^{2} \left(-2(u-2)^2(u+4), -u-10, -4u^2+6u-4\right)\cdot(4u-2,-2,1)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} 4\left(-2u^4+u^3+23u^2-42u+20\right)\ du\\
&= \frac{10624}{15}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\gamma_2} \vec F\cdot d\gamma_2 = \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_2(v))\cdot\dot\gamma_2(v)\,dv\\
&= \int_{-2}^{2} \left(-2(v-1)v(v+2)^2, -2v^2+3v+2, -2(v+6)\right)\cdot(2,2-4v,1)\ dv\\
&= \int_{-2}^{2} -4\left(v^4+v^3+4v^2-3v+2\right)\ dv\\
&= -\frac{2528}{15}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} \vec F\cdot d\gamma_3 = \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_3(u))\cdot\dot\gamma_3(u)\,du\\
&= \int_{-2}^{2} \left(-2(u-2)^2(u+4), -3(u+2), -4u^2+2u+4\right)\cdot(4u-2,-2,-1)\ du\\
&= \int_{-2}^{2} -8u^4+2u^3v+100u^2-u(21v+130)+38v-4\,du\\
&= \frac{10784}{15}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} \vec F\cdot d\gamma_4 = \int_{-2}^{2} \vec F(\gamma_4(v))\cdot\dot\gamma_4(v)\,dv\\
&= \int_{-2}^{2} \left(-2v(v+1)(v+2)^2, -2v^2-3v-2, -6v-20\right)\cdot(2,2-4v,-1)\ dv\\
&= \int_{-2}^{2} -4\left(v^4+v^3+2v^2-8v-4\right)\ dv\\
&= -\frac{448}{15}.
\end{aligned}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$I_1+I_2+I_3+I_4 = \frac{6144}{5},$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 234). Poniamo $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Derivando la prima equazione, si ottiene $2y'(t) = x''(t) - 2x'(t) - 8$.

Sostituiamo l'espressione di $y'(t)$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$2(3x(t) + 2y(t)) = x''(t) - 2x'(t) - 8.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $x''(t) - 2x'(t) - 6x(t) - 4y(t) - 8 = 0$.

Sostituiamo l'espressione di $2y(t)$ ottenuta dalla prima equazione:

$$x''(t) - 2x'(t) - 2\left(x'(t) - 2x(t) - 8t\right) - 6x(t) - 8 = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$x''(t) - 4x'(t) - 2x(t) + 16t - 8 = 0.$$

In notazione compatta, si ha:

$$x''(t) - \text{Traccia}(A)\, x'(t) + \text{Det}(A)\, x(t) = 8 - 16t.$$

Il polinomio caratteristico è $\mu^2 - 4\mu - 2$, di discriminante $\delta = 24$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\mu_1 = 2 - \sqrt{6}$ e $\mu_2 = 2 + \sqrt{6}$, pertanto due soluzioni indipendenti per l'omogenea nella variabile $x(\cdot)$ sono $x_{o,1}(t) := e^{\left(2-\sqrt{6}\right)t}$ e $x_{o,2} := e^{\left(2+\sqrt{6}\right)t}$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea applichiamo il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana del sistema è:

$$W(t) := \begin{pmatrix} x_{o,1}(t) & x_{o,2}(t) \\ \dot{x}_{o,1}(t) & \dot{x}_{o,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\left(2-\sqrt{6}\right)t} & e^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} \\ \left(2-\sqrt{6}\right) e^{\left(2-\sqrt{6}\right)t} & \left(2+\sqrt{6}\right) e^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} \end{pmatrix}.$$

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\left(2-\sqrt{6}\right)t} & e^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} \\ \left(2-\sqrt{6}\right) e^{\left(2-\sqrt{6}\right)t} & \left(2+\sqrt{6}\right) e^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 - 16t \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c'(t) \\ d'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\left(2-\sqrt{6}\right)t}(8-16t)}{2\sqrt{6}} \\ \frac{e^{-\left(2+\sqrt{6}\right)t}(8-16t)}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Integrando, si ottiene:

$$c(t) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} e^{\left(\sqrt{6}-2\right)t} \left(\frac{2t}{\sqrt{6}-2} - \frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}-2\right)^2} \right),$$

$$d(t) = -\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\left(2+\sqrt{6}\right)t} \left(\sqrt{6} - 2\left(2+\sqrt{6}\right)t\right)}{\left(2+\sqrt{6}\right)^2}.$$

La soluzione per la $x(\cdot)$ è allora:

$$x(t) = ce^{-\left(\sqrt{6}-2\right)t} + de^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} + 8t - 20,\ c, d \in \mathbb{R},$$

$$\dot{x}(t) = \left(2-\sqrt{6}\right) ce^{-\left(\sqrt{6}-2\right)t} + \left(2+\sqrt{6}\right) de^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} + 8,\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) - 2x(t) - 8t\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} ce^{-\left(\sqrt{6}-2\right)t} + \sqrt{\frac{3}{2}} de^{\left(2+\sqrt{6}\right)t} - 12t + 24,\ c, d \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, la soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x(t) &= ce^{-(\sqrt{6}-2)t} + de^{(2+\sqrt{6})t} + 8t - 20, \\ \\ y(t) &= -\sqrt{\frac{3}{2}}ce^{-(\sqrt{6}-2)t} + \sqrt{\frac{3}{2}}de^{(2+\sqrt{6})t} - 12t + 24, \end{cases}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$. Studiamo ora la stabilità dell'origine per il sistema omogeneo associato. Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo l'equazione $\det(\lambda I - A) = 0$ oppure, essendo nel caso 2×2 per mezzo dell'equazione

$$\lambda^2 - \text{Traccia}(A)\,\lambda + \det(A) = 0.$$

Gli autovalori sono $2 + \sqrt{6}$ e $2 - \sqrt{6}$. Gli autovalori sono reali e distinti. Essi sono di segno discorde, l'origine è una sella.

Svolgimento (Esercizio 235). Poniamo $f(x,y) = (x+y)^4 + 2(x+y)^3 - 2(x+y)^2 + y^4$. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, si ha:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4\sin^4(\theta) + (\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^4 + 2(\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^3 - 2(\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^2,$$

da cui:

$$\Gamma := \big\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) :\ \rho^4\sin^4(\theta) + (\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^4 + \\ +2(\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^3 - 2(\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^2 = 0,\ \rho \geq 0\,\theta \in [0, 2\pi]\big\}\,.$$

Il coefficiente del termine di grado massimo in ρ è $\sin^4\theta + (\sin\theta + \cos\theta)^4$ che è sempre maggiore di una costante strettamente maggiore di zero, quindi se $\rho \to +\infty$ si ha $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \to +\infty$, e pertanto l'insieme è limitato.

Per determinare le intersezioni con l'asse delle ascisse, studiamo $f(x,0) = 0$, ovvero l'equazione $x^4 + 2x^3 - 2x^2 = 0$, le cui soluzioni sono 0, $-1-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono $P_1 = (0,0)$, $P_2 = \left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$, $P_3 = \left(\sqrt{3}-1, 0\right)$. Per determinare le intersezioni con l'asse delle ordinate, studiamo $f(0,y) = 0$, ovvero l'equazione $2y^4 + 2y^3 - 2y^2 = 0$, le cui soluzioni sono 0, $\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. Le intersezioni con l'asse delle ordinate sono $P_1 = (0,0)$, $P_4 = \left(0, \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right)$, $P_5 = \left(0, \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$.

Ricordiamo che se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora la retta per (x_0, y_0) tangente a Γ è data dall'equazione $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$. Il gradiente di f è dato da:

$$\nabla f(x,y) = \left(4(x+y)^3 + 6(x+y)^2 - 4(x+y), 4(x+y)^3 + 6(x+y)^2 - 4(x+y) + 4y^3\right).$$

Nel nostro caso, nei punti P_2, P_3, P_4, P_5 il gradiente di f è diverso da $(0,0)$, quindi le rette tangenti in tali punti sono:

$$\begin{aligned} r_{P_2} &:\ y = -x - \sqrt{3} - 1, \\ r_{P_3} &:\ y = -x + \sqrt{3} - 1, \\ r_{P_4} &:\ y = \frac{\sqrt{5}x + x - 3\sqrt{5} - 5}{5 + \sqrt{5}}, \\ r_{P_5} &:\ y = \frac{\sqrt{5}x - x - 3\sqrt{5} + 5}{\sqrt{5} - 5}. \end{aligned}$$

Si ha $\partial_y(P_2) = -4\left(-1-\sqrt{3}\right) + 6\left(-1-\sqrt{3}\right)^2 + 4\left(-1-\sqrt{3}\right)^3 \neq 0$, $\partial_y(P_3) = -4\left(\sqrt{3}-1\right) + 6\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 4\left(\sqrt{3}-1\right)^3 \neq 0$, $\partial_y(P_4) = -2\left(-1-\sqrt{5}\right) + \frac{3}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)^2 + \left(-1-\sqrt{5}\right)^3 \neq 0$, $\partial_y(P_5) = -2\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^3 \neq 0$ quindi le tangenti in tali punti non sono verticali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $y = y(x)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$. Si ha $\partial_x(P_2) = -4\left(-1-\sqrt{3}\right) + 6\left(-1-\sqrt{3}\right)^2 + 4\left(-1-\sqrt{3}\right)^3 \neq$

0, $\partial_x(P_3) = -4\left(\sqrt{3}-1\right) + 6\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 4\left(\sqrt{3}-1\right)^3 \neq 0$, $\partial_x(P_4) = -2\left(-1-\sqrt{5}\right) + \frac{3}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)^3 \neq 0$, $\partial_x(P_5) = -2\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)^3 \neq 0$ quindi le tangenti in tali punti non sono orizzontali ed è possibile applicare il Teorema di Dini in un intorno di ciascuno di tali punti per ottenere localmente una funzione $x = x(y)$ implicitamente definita da $f(x,y) = 0$.

Il gradiente di f è identicamente nullo nei punti $S_1 = (-2,0)$, $S_2 = (0,0)$, $S_3 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Si ha $f(S_1) = -8$, $f(S_2) = 0$, $f(S_3) = -\frac{3}{16}$ quindi $S_1 \notin \Gamma$, $S_2 \in \Gamma$, $S_3 \notin \Gamma$, da cui si dovrà studiare a parte S_2.

Applichiamo quindi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: sia $L(x,y,\lambda) = h(x,y) + \lambda f(x,y)$ e risolviamo il sistema $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$. Si ha:

$$\begin{cases} \lambda\left(4(x+y)^3 + 6(x+y)^2 - 4(x+y)\right) + 4(x+y)^3 & = 0, \\ \lambda\left(4(x+y)^3 + 6(x+y)^2 - 4(x+y) + 4y^3\right) + 4(x+y)^3 + 4y^3 & = 0, \\ (x+y)^4 + 2(x+y)^3 - 2(x+y)^2 + y^4 & = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date da $L_1 = (0,0)$, $L_2 = \left(\sqrt{3}-1, 0\right)$, $L_3 = \left(\frac{1}{3}\left(2+2^{3/4}\right), -\frac{2^{3/4}}{3}\right)$, $L_4 = \left(\frac{1}{3}\left(2-2^{3/4}\right), \frac{2^{3/4}}{3}\right)$, $L_5 = \left(-1-\sqrt{3}, 0\right)$. Si ha $h(L_1) = 0$, $h(L_2) = 28 - 16\sqrt{3}$, $h(L_3) = \frac{8}{27}$, $h(L_4) = \frac{8}{27}$, $h(L_5) = 4\left(7+4\sqrt{3}\right)$.

Ricordiamo che nei punti da studiare a parte vale $h(S_2) = 0$. Il minimo assoluto è quindi in L_1, S_2, mentre il massimo assoluto è in L_5.

Svolgimento (Esercizio 236). Utilizziamo una parametrizzazione in coordinate cilindriche $x = x$, $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$. Le condizioni assegnate porgono

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 + 3\rho^2, \\ 16\rho^2 \le x^2, \\ \rho^2 \le 1/4. \end{cases}$$

Poiché $\rho \ge 0$ per definizione e $x \ge 0$ dalla prima disequazione, estraendo la radice nella seconda disequazione si ha $4\rho \le x$. In particolare, si deve avere $4\rho \le x \le 1 + 3\rho^2$, pertanto $\rho \ge 0$ deve soddisfare a $3\rho^2 - 4\rho + 1 \ge 0$, il che implica $\rho \ge 1$ oppure $0 \le \rho \le 1/3$. Dalla terza disequazione si ha $\rho \le 1/2$, quindi $0 \le \rho \le 1/3$. Si ha allora

$$D := \{(x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 : \rho \in [0,1/3],\ 4\rho \le x \le 1 + 3\rho^2, \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Il modulo del determinante Jacobiano della parametrizzazione è ρ, quindi il volume richiesto è

$$\begin{aligned} V = & \int_0^{2\pi}\int_0^{1/3}\int_{4\rho}^{1+3\rho^2} \rho\,dx\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0 1/3(3\rho^2 - 4\rho + 1)\rho\,d\rho \\ = & 2\pi\left[\frac{3}{4}\rho^4 - \frac{4}{3}\rho^3 + \frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=1/3} = 2\pi\left[\frac{3}{4\cdot 81} - \frac{4}{3\cdot 27} + \frac{1}{2\cdot 9}\right] = \frac{5\pi}{162} \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 237). Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

La divergenza e il rotore del campo $\vec{F}$ sono dati da

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1(x,y,z) + \partial_y F_2(x,y,z) + \partial_z F_3(x,y,z) = 0 + 2 + 3 = 5.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & y^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & x+2y \\ \vec{e}_3 & \partial_z & 2x-3y+3z \end{pmatrix} = (-3, -2, 1-2y)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rot}\,\vec{F} \neq 0$, il campo non è conservativo.
Si ha $\dot\gamma(t) = (-\sin(t), 1, \cos(t))$ da cui l'integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(t^2, 2t+\cos(t), -3t+3\sin(t)+2\cos(t)\big)\cdot(-\sin(t), 1, \cos(t))\;dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(t(2-t\sin(t)) + 2\cos^2(t) + (-3t+3\sin(t)+1)\cos(t)\big)\;dt \\
&= 2\pi(1+4\pi).
\end{aligned}$$

Lo Jacobiano della parametrizzazione è dato da:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) &= \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(u,v) \\ \nabla\varphi_2(u,v) \\ \nabla\varphi_3(u,v) \end{pmatrix} = (\partial_u\varphi(u,v)|\partial_v\varphi(u,v)) \\
&= \begin{pmatrix} 2u+v & u \\ v & u-3v^2 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Indicate con $\partial_u\varphi(u,v)$ e $\partial_v\varphi(u,v))$ le colonne di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$, l'elemento d'area 2-dimensionale $d\sigma$ riferito alla parametrizzazione φ è dato da:

$$\begin{aligned}
d\sigma = \|\partial_u\varphi(u,v)\wedge\partial_v\varphi(u,v)\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(2u^2-6uv^2-3v^3)^2 + (-4uv+u-2v^2)^2 + (5v^2-u)^2}\,du\,dv. \\
&= \left(\sqrt{(-2u^2+6uv^2+3v^3)^2 + (u-5v^2)^2 + (-4uv+u-2v^2)^2}\right)\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Per la regola di Binet, indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate di ordine 2 di $\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)$ ottenute sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza riga, l'elemento d'area può essere ottenuto anche come:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}.$$

Si ha che $P = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right) = \varphi(u,v)$ solo se $(u,v) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. La matrice Jacobiana di φ in P è:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La normale unitaria in P è data da:

$$\hat{n}(P) = \frac{\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)}{\|\partial_u\varphi(P) \wedge \partial_v\varphi(P)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{F},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} F_1\circ\varphi(u,v) & \\ F_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ F_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} v^2\left(u-v^2\right)^2 & 2u+v & u \\ u(u+v)+2v\left(u-v^2\right) & v & u-3v^2 \\ 2u(u+v)-3v\left(u-v^2\right)+3\left(v^2+u\right) & 1 & 2v \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4u^4 - 13u^3v^2 - 6u^3v + 7u^3 + 7u^2v^4 + 6u^2v^3 - 26u^2v^2 + \\
&\quad + 3u^2v - 11uv^6 - 18uv^5 - 7uv^4 - 17uv^3 + 5v^8 - 9v^6 - 5v^5\,du\,dv \\
&= -\frac{988}{105}.
\end{aligned}$$

Il flusso di $\vec{G} = \operatorname{rot}\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$ attraverso la superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{G},\Sigma) &= \int_\Sigma \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\sigma := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi(u,v) & \\ G_2\circ\varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u,v) \\ G_3\circ\varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} -3 & 2u+v & u \\ -2 & v & u-3v^2 \\ 1-2v\left(u-v^2\right) & 1 & 2v \end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -4u^3v + 16u^2v^3 + 2u^2 - 12uv^5 + 6uv^4 - 6uv^2 + 8uv + u - 6v^6 - 3v^3 - 11v^2\,du\,dv \\
&= -\frac{108}{7}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso Σ tramite il teorema di Stokes. Detto $\partial\Sigma$ il bordo di Σ con l'orientamento indotto da Σ si ha:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot\ell.$$

Il bordo $\partial\Sigma$ della superficie Σ è contenuto nell'immagine tramite la parametrizzazione φ della frontiera dello spazio dei parametri, ovvero della frontiera del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$. Affinché il bordo risulti orientato con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione, la frontiera del quadrato nello spazio dei parametri deve essere percorsa in senso antiorario.

L'immagine della frontiera con tale orientamento è data dall'unione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= \varphi(u,-1) = ((u-1)u, 1-u, u+1)\,,\ u\in[-1,1]\,, \\
\gamma_2(v) &:= \varphi(1,v) = \left(v+1, v-v^3, v^2+1\right),\ v\in[-1,1]\,, \\
\gamma_3(u) &:= \varphi(-u,1) = ((u-1)u, -u-1, 1-u)\,,\ u\in[-1,1]\,, \\
\gamma_4(v) &:= \varphi(-1,-v) = \left(v+1, v^3+v, v^2-1\right),\ v\in[-1,1]\,.
\end{aligned}$$

Le derivate sono date da:

$$
\begin{aligned}
\dot\gamma_1(u) &:= (2u-1,-1,1)\,,\; u \in \left]-1,1\right[\,,\\
\dot\gamma_2(v) &:= \left(1,1-3v^2,2v\right)\,,\; v \in \left]-1,1\right[\,,\\
\dot\gamma_3(u) &:= (2u-1,-1,-1)\,,\; u \in \left]-1,1\right[\,,\\
\dot\gamma_4(v) &:= \left(1,3v^2+1,2v\right)\,,\; v \in \left]-1,1\right[\,.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
I_1 := \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\gamma_1 &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\gamma_1(u))\cdot\dot\gamma_1(u)\,du\\
&= \int_{-1}^{1} \left((u-1)^2, u^2-3u+2, 2u(u+2)\right)\cdot(2u-1,-1,1)\;du\\
&= \int_{-1}^{1} 2u^3-4u^2+11u-3\,du\\
&= -\frac{26}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 := \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\gamma_2 &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\gamma_2(v))\cdot\dot\gamma_2(v)\,dv\\
&= \int_{-1}^{1} \left(v^2\left(v^2-1\right)^2, -2v^3+3v+1, 3v^3+3v^2-v+5\right)\cdot\left(1,1-3v^2,2v\right)\;dv\\
&= \int_{-1}^{1} v^6+6v^5+4v^4-5v^3-4v^2+13v+1\,dv\\
&= \frac{128}{105}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 := \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\gamma_3 &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\gamma_3(u))\cdot\dot\gamma_3(u)\,du\\
&= \int_{-1}^{1} \left((u+1)^2, u^2-3u-2, 2\left(u^2-u+3\right)\right)\cdot(2u-1,-1,-1)\;du\\
&= \int_{-1}^{1} 2u^3-2u^2(v-1)+u(v+4)+v-6\,du\\
&= -10.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 := \int_{\gamma_4} \vec{F}\cdot d\gamma_4 &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(\gamma_4(v))\cdot\dot\gamma_4(v)\,dv\\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left(v^3+v\right)^2, -2v^3-v+1, 3v^3+3v^2+5v-1\right)\cdot\left(1,3v^2+1,2v\right)\;dv\\
&= \int_{-1}^{1} v^6-6v^5+4v^4+13v^3+2v^2+v+1\,dv\\
&= \frac{212}{105}.
\end{aligned}
$$

Sommando i quattro contributi si ottiene:

$$
I_1+I_2+I_3+I_4 = -\frac{108}{7},
$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 238). Cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per $T(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{3X(x)T'(t) - T(t)X''(x) + T(t)X(x)}{T(t)X(x)} = 0.$$

Semplificando si ha:

$$\frac{3T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = 0.$$

Separando le variabili si ottiene:

$$-\frac{3T'(t)}{T(t)} = 1 - \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} 3T'(t) + \lambda T(t) = 0, \\ -X''(x) - \lambda X(x) + X(x) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni al contorno si ha $u(t,0) = T(t)X(0) = 0$ da cui $X(0) = 0$ e analogamente $X(\pi) = 0$. Studiamo l'equazione per $X(x)$. Il polinomio caratteristico è $p(\mu) = -\lambda - \mu^2 + 1$, il cui discriminante è $\Delta_x(\lambda) = -4(\lambda - 1)$.

Se $\Delta_x(\lambda) > 0$, le soluzioni sono date da:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} e^{\frac{1}{2}x\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} + c_{2,\lambda} e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{\Delta_x(\lambda)}}.$$

Dalle condizioni al contorno, si ottiene $c_{1,\lambda} + c_{2,\lambda} = 0$ da $X(0) = 0$, quindi $c_{1,\lambda} = -c_{2,\lambda}$. Da $X(\pi) = 0$ si ha:

$$c_{1,\lambda} e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} + c_{2,\lambda} e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta_x(\lambda)}} = 0,$$

da cui $c_{1,\lambda} = c_{2,\lambda} = 0$ essendo $\Delta_x(\lambda) \neq 0$. Questo caso non è accettabile.

Se $\Delta_x(\lambda) = 0$, le soluzioni sono date da:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} + x c_{2,\lambda}.$$

Sostituendo le condizioni si ha $c_{1,\lambda} = 0$ da $X(0) = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene ancora $c_{2,\lambda} = 0$. Quindi anche questo caso non è accettabile.

Se $\Delta_x(\lambda) < 0$ le soluzioni sono:

$$X_\lambda(x) = c_{1,\lambda} \cos\left(\frac{1}{2}x\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) - c_{2,\lambda} \sin\left(\frac{1}{2}x\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right).$$

Sostituendo $X(0) = 0$ si ha $c_{1,\lambda} = 0$. Sostituendo $X(\pi) = 0$ si ha

$$c_{1,\lambda} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) - c_{2,\lambda} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{-\Delta_x(\lambda)}\right) = 0.$$

Dovendosi avere $c_{2,\lambda} \neq 0$, e poiché $\Delta_x(\lambda) < 0$, necessariamente $-\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta_x(\lambda)} = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, quindi

$$\lambda_n = n^2 + 1,\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0.$$

Questo caso è accettabile.

Si ha $\Delta_x(\lambda) < 0$ se e solo se $\lambda > 1$. Si ottengono quindi le soluzioni relative a λ_n (il segno di n è assorbito nella costante moltiplicativa):

$$X_n(x) := c_n \sin(nx), \qquad c_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sostituendo i valori accettabili di λ_n nell'equazione per $T(t)$ si ottiene:

$$\left(n^2+1\right)T_n(t)+3T_n'(t)=0.$$

Il polinomio caratteristico è $q(\mu)=3\mu+n^2+1$.Tale polinomio si annulla per $\mu=\frac{1}{3}\left(-n^2-1\right)$, quindi si hanno le soluzioni:

$$T_n(t):=d_n e^{\frac{1}{3}\left(-n^2-1\right)t},\ d_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Posto $b_n=c_nd_n$, si hanno le soluzioni elementari:

$$u_n(t,x):=T_n(t)X_n(x)=b_n e^{\frac{1}{3}\left(-n^2-1\right)t}\sin(nx),\ b_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Cerchiamo di ottenere il dato iniziale con una sovrapposizione di soluzioni elementari:

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0,x),$$

ovvero

$$x^2+2=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx).$$

Pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli seni di x^2+2. Ciò vuol dire prolungare per disparità tale funzione da $[0,\pi]$ a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+2)\sin(nx)\,dx\\&=\frac{4\left((-1)^n-1\right)-2n^2\left(2(-1)^n+\pi^2(-1)^n-2\right)}{\pi n^3}.\end{aligned}$$

La soluzione risulta quindi:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(4\left((-1)^n-1\right)-2n^2\left(2(-1)^n+\pi^2(-1)^n-2\right)\right)e^{\frac{1}{3}\left(-n^2-1\right)t}\sin(nx)}{\pi n^3}.$$

Osserviamo che tale serie converge totalmente assieme alle sue derivate per $t>0$, porgendo quindi una soluzione classica del problema.