EX 2 fila B   Analisi Matematica II

Verificare che l'equazione $e^{x+y} + x^2 - y^2 = e(x+1) - 1$ definisca implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x=0$ con $y(0) = 1$

Disegnare il grafico in un intorno di $x=0$ e dimostrare che $x=0$ è punto di massimo.

Ris

$f(x,y) = e^{x+y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f(0,1) = e + 0 - 1 - e + 1 = 0$; $f_y(x,y) = e^{x+y} - 2y$, $f_y(0,1) = e^1 - 2 \neq 0$

Sono verificate le hp del teorema di Dini $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da $f(x,y)=0$ in un intorno U di 0 t.c. $y(0)=1$, tale funzione è derivabile infinite volte in U.

Derivo rispetto ad x la seguente identità in U:

$$e^{x+y(x)} + x^2 - (y(x))^2 - e(x+1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x+y}(1+y') + 2x - 2yy' - e = 0$$

in $x=0$ e $y = y(0) = 1$ ~~sol~~: $e^1(1+y'(0)) + 0 - 2y'(0) - e = 0$

$$e + e\,y'(0) - 2y'(0) - e = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$$

derivo rispetto ad x $\Rightarrow$

$$e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}y''(x) + 2 - 2(y')^2 - 2yy'' = 0$$

sostituisco $x=0,\ y=1,\ y'=y'(0)=0 \Rightarrow e^{0+1}\cdot(1+0)^2 + e^{0+1}y''(0) + 2 - 0 - 2y''(0) = 0$

$e + e\,y''(0) + 2 - 2y''(0) = 0$ $(e-2)\,y''(0) = -2-e$

$$\Rightarrow y''(0) = -\frac{2+e}{e-2} < 0$$

Essendo $y'(0) = 0$ e $y''(0) < 0 \Rightarrow x=0$ è punto di massimo locale