Diario del corso di Analisi Matematica 2

G. Orlandi

a.a. 2010-11

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 4/10/10 (2 ore). Proprietà assiomatiche di una funzione distanza su un insieme: positività, simmetria, diseguaglianza triangolare. Spazi metrici. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ dotati della distanza euclidea. Distanza geodetica sulla sfera.

Proprietà assiomatiche di una norma su uno spazio vettoriale: positività, positiva 1-omogeneità, disuguaglianza triangolare. Esempi: il valore assoluto su $\mathbb{R}$, la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma ℓ^∞ su $\mathbb{R}^n$: per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_i|\,,\ i = 1, ..., n.\}$. Defnizione di norma ℓ^1 su $\mathbb{R}^n$: $||x||_{\ell^1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Una norma $||\cdot||$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V definita da $d(x, y) = ||x - y||$ per $x, y \in V$. Se V è uno spazio euclideo, dotato cioè di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quest'ultimo definisce una norma (detta norma euclidea) $||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$.

Lo spazio vettoriale $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ può essere dotato della norma ℓ^∞ (detta norma della convergenza uniforme) definita da $||f||_{\ell^\infty} = \sup\{|f(t)|\,,\ t \in [a, b]\}$. Si può definire su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ anche la norma ℓ^1 (detta norma della convergenza in media) ponendo $||f||_{\ell^1} = \int_a^b |f(t)|dt$. Definizione di norma ℓ^2 su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$:

$$||f||_{\ell^2} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Si tratta di una norma euclidea, indotta dal prodotto scalare $\langle f, g\rangle_{\ell^2} = \int_a^b f(t)g(t)dt$, definito per $f, g \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$. Questa norma (detta della convergenza in media quadratica) è spesso usata in problemi di minima distanza (cfr. *metodo dei minimi quadrati*).

Osservazione: $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ (e in genere gli spazi di funzioni che si considerano in analisi) è uno spazio vettoriale infinito dimensionale: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $E_n = \{1, x, ..., x^n\}$ è linearmente indipendente, in quanto una combinazione lineare non nulla di elementi di E è un polinomio, che per il Teorema fondamentale dell'Algebra si annulla solo in un numero di punti inferiore o uguale ad n, e non può coincidere quindi con la funzione identicamente nulla su $[a,b]$.

Nozione di limite di successione in uno spazio metrico: dati $x_n, x_0 \in X$, si dice che $x_n \to x_0$ in X se $d(x_n, x_0) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione di funzione continua tra spazi metrici: $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Caratterizzazione della continuità: $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ in X si ha $f(x_n) \to f(x_0)$ in Y.

Lezione del 6/10/10 (2 ore). Topologia in uno spazio metrico (X, d). Definizione di intorno sferico aperto (o palla aperta) di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$: $B(x,r) = \{y \in X\ ,\ d(x,y) < r\}$. Un insieme $A \subset X$ si dice aperto se $\forall\, x \in A\ \exists\, r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A$. La collezione dei sottoinsiemi aperti di X si dice topologia di X.

Un insieme $C \subset X$ si dice chiuso se il complementare $X \setminus C$ è aperto. Caratterizzazione: C è chiuso se per ogni successione di punti $x_n \in C$ convergente a $\bar{x} \in X$ si ha che $\bar{x} \in C$.

Due distanze su X si dicono *equivalenti* se inducono la stessa topologia su X (ovvero gli stessi insiemi aperti). In particolare, una successione in X converge rispetto alla prima distanza se e solo se converge rispetto alla seconda distanza, e una funzione definita su X è continua rispetto alla prima distanza se e solo se è continua rispetto alla seconda distanza.

Analogamente, due norme su uno spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se le distanze associate sono equivalenti. Caratterizzazione: due norme N_1, N_2 su V sono equivalenti se e solo se esistono delle costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che per ogni $v \in V$ si abbia $N_2(v) \le C_1 \cdot N_1(v)$ e $N_1(v) \le C_2 \cdot N_2(v)$ (ovvero la norma N_1 controlla la norma N_2 e viceversa).

In $\mathbb{R}^n$ (o in uno spazio vettoriale normato finito dimensionale) *tutte* le norme sono equivalenti. In particolare, per $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$||v||_\infty \le ||v||_2 \le ||v||_1 \le \sqrt{n}||v||_2 \le n||v||_\infty.$$

Se V ha dimensione infinita, le norme su V non possono essere tutte equivalenti tra di loro. Ad esempio, su $C^0([a,b])$ la norma ℓ^∞ controlla la norma ℓ^1, (ovvero $||f||_{\ell^1([a,b])} \le (b-a) \cdot ||f||_{\ell^\infty([a,b])}$ per ogni $f \in C^0([a,b])$), ma la norma ℓ^1 non controlla la norma ℓ^∞, come dimostra l'esempio della successione di funzioni $f_n \in C^0([0,1])$, definite ponendo $f_n(x) = n \cdot x$ per $0 \le x \le 1/n$, $f_n(x) = 2 - n \cdot x$ per $1/n \le x \le 2/n$, e $f_n(x) = 0$ per $2/n \le x \le 1$, che converge in media alla funzione identicamente nulla ($||f_n||_{\ell^1} = 1/n \to 0$ per $n \to +\infty$) ma non vi converge uniformemente (sia ha $||f_n||_{\ell^\infty} = 1$ per ogni n, quindi non può tendere a 0 per $n \to +\infty$).

Esempio di una funzione continua su $C^0([a,b])$: la funzione $F : C^0([a,b];\mathbb{R}) \to C^0([a,b];\mathbb{R})$ che associa ad f la sua funzione integrale $F(f)$ definita da $F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una funzione continua rispetto alla norma ℓ^∞. Infatti, si ha la seguente stima:

$$
\begin{aligned}
|F(f)(x) - F(g)(x)| = |F(f-g)(x)| &= |\int_a^x [f(t)-g(t)]\,dt| \\
&\le \int_a^x |f(t)-g(t)|dt \le \int_a^x ||f-g||_\infty dt \\
&\le ||f-g||_\infty \cdot (x-a) \qquad \forall\, a \le x \le b\,,
\end{aligned}
$$

da cui i ricava, passando al sup su $x \in [a,b]$ ad ambo i membri,

$$
||F(f) - F(g)||_\infty \le (b-a)||f-g||_\infty\,,
$$

da cui si deduce che se $||f-g||_\infty \to 0$, allora $||F(f)-F(g)||_\infty \to 0$. ovvero la continuità della funzione F.

Lezione del 7/10/10 (1 ora). Esercizio: la norma $\ell^2([a,b])$ controlla la norma $\ell^1([a,b])$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Il viceversa non è vero, come dimostra la successione $\{f_n\}_n \subset C^0([0,1])$ definita da $f_n(x) = \sqrt{n}$ per $0 \le x \le 1/n$, e $f_n(x) = 1/\sqrt{x}$ per $1/n \le x \le 1$. Posto $f(x) = 1/\sqrt{x}$ (NB: $f \notin C^0([0,1])$!), si ha che $||f_n - f||_{\ell^1} \to 0$ per $n \to +\infty$, mentre $||f_n - f||_{\ell^2} = +\infty$ per ogni n.

Motivazione dell'uso della norma ℓ^2 per problemi di minima distanza (*metodo dei minimi quadrati*), come ad esempio l'approssimazione di una funzione $f \in C^0([a,b])$ mediante polinomi di grado (inferiore o uguale a) n. Il polinomio che realizza la minima distanza (ovvero la migliore approssimazione in media quadratica) di f è la proiezione ortogonale di f (rispetto al prodotto scalare ℓ^2) sul sottospazio finito-dimensionale V :=span$< v_0, v_1, ..., v_n >$, dove per $i = 0,1,...,n$ si è posto $v_i(x) = x^i$, $x \in [a,b]$. Pertanto, il polinomio P_f che realizza la minima distanza è dato da

$$
P_f(x) = \sum_{i=0}^n \langle f,\, e_i\rangle_{\ell^2([a,b])} \cdot e_i(x) = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b f(t)e_i(t)dt\right] \cdot e_i(x)\,, \quad x \in [a,b],
$$

dove $\{e_i\}_{i=0,...,n}$ è una base ortonormale di V, costruibile applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ di V.

Lezione dell' 8/10/10 (2 ore). Spazi metrici completi. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$, con la distanza euclidea (o una qualunque norma). Completezza di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dotato della norma $||\cdot||_\infty$.

Dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{f_n\} \subset C^0([a,b];\mathbb{R})$, per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\ n_0$ tale che $\forall\, n,m > n_0$ $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. In particolare, per ogni $a \le x \le b$ si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, dunque $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\forall\ a \le x \le b$, ed è dunque convergente per la completezza di $\mathbb{R}$. Detto $f(x) = \lim_m f_m(x)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \le \epsilon$ $\forall n > n_0$, $\forall\ a \le x \le b$. Passando al sup su $x \in [a,b]$ si ottiene $||f_n - f||_\infty \le \epsilon$ $\forall n > n_0$, ovvero $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$. Resta da dimostrare la continuità di f: fissato $x_0 \in [a,b]$ sia$n > n_0$ fissato, e sia $\delta > 0$ tale che

$|f_n(x) - f_n(x_0| < \epsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (tale δ esiste per la continuità di f_n). Allora, per ogni $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$, si ha, per la diseguaglianza triangolare,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon\,,$$

ovvero f è continua in x_0, per ogni $x_0 \in [a, b]$. In altre parole, $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ e $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$, ovvero la successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ rispetto alla norma ℓ^∞. □

Osservazione: sia $L^\infty(I; \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\,,\ ||f||_\infty < +\infty\}$ lo spazio delle funzioni limitate, definite su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. La prima parte della dimostrazione della completezza di $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ dimostra in realtà che $L^\infty(I; \mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞ è uno spazio metrico completo.

Definizione di convergenza uniforme: date $f, f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che le f_n convergono uniformemente ad f in I se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \equiv \lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} = 0\,.$$

Defininzione di convergenza puntuale: le f_n convergono puntualmente ad f in I se $\forall\, x \in I$, $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La convergenza uniforme implica quella puntuale, mentre il viceversa non è vero in generale.

Esempio: si consideri la successione di funzioni $f_n \in C^0([-1, 1])$ definite da $f(x) = -1$ per $-1 \leq x \leq -1/n$, $f(x) = 1$ per $1/n \leq x \leq 1$ e $f(x) = n \cdot x$ per $-1/n \leq x \leq 1/n$. Sia $f(x)$ definita da $f(x) = -1$ per $x < 0$, $f(x) = 1$ per $x > 0$, ed infine $f(0) = 0$. Si ha che le $f_n(x)$ convergono puntualmente ad $f(x)$ per $-1 \leq x \leq 1$, ma, per la completezza di $C^0([-1, 1])$, non possono convergere uniformemente ad f su $[-1, 1]$, in quanto f non è continua su $[-1, 1]$. In effetti, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$||f_n - f||_{\ell^\infty([-1,1])} \geq \sup_{-1/n\leq x<0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-1/n\leq x<0} \{n \cdot x + 1\} = 1.$$

Alcune proprietà della convergenza uniforme: siano $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ tali che $||f_n - f||_{\ell^\infty(I)} \to 0$ per $n \to +\infty$.

1) se le f_n sono continue, allora f è continua (vedasi dimostrazione completezza di $C^0([a, b]; \mathbb{R})$.

2) se $I = [a, b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).

Infatti, dall'esempio della lezione del 6/10/10 (continuità della trasformata integrale F) si deduce, ponendo $g = f_n$ ed $x = b$, che

$$|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt| \leq (b - a) \cdot ||f_n - f||_{\ell^\infty([a,b])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Osservazione: lo spazio $C^0([a.b])$ *non è completo* rispetto alla convergenza in media, o in media quadratica: si consideri ad esempio la successione $f_n \in C^0([-1,1])$ e la funzione discontinua f dell'esempio cui sopra: si ha $||f_n - f||_{\ell^1} = 1/n \to 0$. Quindi f_n è una successione di Cauchy rispetto alla norma ℓ^1 (in quanto convergente), ma il limite f non è una funzione continua.

Lo spazio metrico completo rispetto alla norma ℓ^1 è lo spazio delle funzioni sommabili *secondo Lebesgue* $L^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ \int_a^b |f(x)|dx < +\infty\}$. Analogamente è completo rispetto alla norma ℓ^2 lo spazio $L^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ \int_a^b |f(x)|^2dx < +\infty\}$ delle funzioni a quadrato sommabile *secondo Lebesgue*.

Lezione dell' 11/10/10 (2 ore). Convergenza uniforme e derivazione: se $f_n \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ (ossia $f_n, f_n' \in C^0([a,b];\mathbb{R})$) e $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$, allora $g = f'$ su $[a,b]$.

Infatti, si ha $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$, ed il primo membro converge a $f(x) - f(a)$ perchè le f_n in particolare convergono puntualmente, mentre il secondo membro converge a $\int_a^b g(t)dt$ per la convergenza uniforme di f_n' su $[a,b]$ ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Nel caso delle serie di funzioni, cioè quando $f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$, con $u_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, le proprietà della convergenza uniforme si traducono come segue: date $u_k \in C^0([a,b];\mathbb{R})$, se la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$, allora converge ad una funzione continua. Inoltre, vale

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty u_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b u_k(t)dt \qquad \text{(integrazione per serie).}$$

Se inoltre $u_k \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ e $\sum_{k=0}^\infty u_k'(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ allora

$$\left(\sum_{k=0}^\infty u_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^\infty u_k'(x) \qquad \text{(derivazione per serie).}$$

Un criterio utile per la convergenza uniforme di una serie di funzioni è il criterio di convergenza totale (di Weierstrass). Lo enunciamo nel quadro più generale degli spazi normati.

Teorema della convergenza totale: sia $(X, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato completo. Sia $\{u_k\} \subset X$. Se la serie delle norme $\sum_{k=0}^\infty ||u_k||$ è convergente in $\mathbb{R}$, allora la serie $\sum_{k=0}^\infty u_k$ è convergente in X, ovvero $\lim_n || \sum_{k=n}^\infty u_k|| = 0$.

Dimostrazione: detta $y_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la successione delle somme parziali, dimostriamo che $\{y_n\}$ è di Cauchy in X: si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$||y_n - y_m|| = || \sum_{k=n+1}^m u_k|| \le \sum_{k=n+1}^m ||u_k|| < \epsilon \quad \text{per ogni } m > n > n_0\,,$$

dato che la successione numerica $s_n = \sum_{k=0}^n ||u_k||$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ipotesi, e $\sum_{k=n+1}^m ||u_k|| = s_m - s_n$. $\square$

Applicazione alla convergenza delle serie di potenze. Sia $\sum_{k=0}^\infty a_n x^n$ una serie di potenze reali centrata in $x_0 = 0$, e sia $r > 0$ il suo raggio di convergenza. La serie converge uniformemente in $[-R, R]$ per ogni $0 < R < r$. Dimostrazione: si ha

$$\sum_{k=0}^\infty \sup_{|x|\le R} |a_k| \cdot |x|^k = \sum_{k=0}^\infty |a_k| R^k < +\infty\,,$$

poichè per il criterio della radice $\sqrt[k]{|a_k|R^k} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot R \to r^{-1}R < 1$. Si può dunque applicare il criterio di convergenza totale nello spazio $C^0([-R, R]; \mathbb{R})$ dotato della norma ℓ^∞. $\square$

In particolare, per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie. Si può così calcolare ad esempio

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (b^{2k+1} - a^{2k+1})}{(2k+1)k!}\,.$$

Inoltre, dato che la serie delle derivate di una serie di potenze è a sua volta una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza, vale anche il teorema di derivazione per serie. Questo fatto può essere utilizzato ad esempio per la ricerca di soluzioni di equazioni differenziali sotto forma di serie di potenze $\sum a_k x^k$ (esempio: equazioni lineari a coefficienti polinomiali come l'equazione di Bessel (di ordine n) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$), trasformando l'equazione differenziale in un sistema triangolare per i coefficienti a_k.

Lezione del 12/10/10 (1 ora). Il principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli): dato (X, d) spazio metrico completo, $T : X \to X$ una contrazione (ossia $\exists\, K < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \le K \cdot d(x, y)\ \forall\, x, y \in X$), allora esiste un'unico punto fisso $\bar{x} \in X$ di T (ovvero un'unica soluzione $\bar{x}$ in X dell'equazione $x = T(x)$).

La dimostrazione è costruttiva, mediante uno schema iterativo, e fornisce anche una stima dell'errore. Sia $x_0 \in X$, definiamo per ricorrenza la successione $x_{n+1} = T(x_n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Due i casi: o $x_{n+1} = x_n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, e quindi $x_n = x_{n+1} = T(x_n)$ è punto fisso di T, oppure rimane definita una successione $\{x_n\} \subset X$, che risulta essere di Cauchy in X. Infatti, si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \le K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \le \cdots \le K^n \cdot d(x_1, x_0)\,,$$

da cui si deduce che, per $m > n + 1 > n_0$, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=n}^{m-1} K^j \cdot d(x_1, x_0) = K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-n-1} K^j \\ &\le K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^\infty K^j \le K^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1 - K} < \epsilon \end{aligned}$$

per n_0 sufficientemente grande, e per ogni $m > n+1 > n_0$, ovvero $\{x_n\}$ è di Cauchy in X. Sia $\lim_m x_m = \bar{x} \in X$ per la completezza di X.

Passando al limite per $m \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene la stima dell'errore $d(\bar{x}, x_n) \leq K^n \frac{d(x_1,x_0)}{1-K}$. Inoltre, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione di ricorrenza $x_{n+1} = T(x_n)$, dato che $x_{n+1} \to \bar{x}$ e $T(x_n) \to T(\bar{x})$ per la continuità di T (data dalla stima $d(T(\bar{x}), T(x_n)) \leq K \cdot d(\bar{x}, x_n)$), si deduce $\bar{x} = T(\bar{x})$, e dunque $\bar{x}$ è un punto fisso di T.

Supponendo $\hat{x} \in X$ sia un qualunque punto fisso di T, si ha $d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T(\hat{x}), T(\bar{x})) \leq K \cdot d(\hat{x}, \bar{x})$, ossia $(1-K) \cdot d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$, da cui $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$ e dunque $\hat{x} = \bar{x}$, ovvero l'unicità del punto fisso. $\square$

Il principio delle contrazioni si applica nelle più svariate situazioni: ad esempio, per dimostrare il Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy (per equazioni e sistemi di equazioni differenziali), oppure il Teorema del Dini delle funzioni implicite/inverse (esistenza e unicità locale per soluzioni di sistemi di equazioni algebriche non lineari, dipendenza continua delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati del problema, oppure esistenza e unicità locale di soluzioni di equazioni alle derivate parziali non lineari).

.

Esempio: risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$, dati $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in M^n(\mathbb{R})$. Ponendo $C = I - A$, il sistema diventa l'equazione di punto fisso $x = Cx + b$ su $\mathbb{R}^n$. L'applicazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $Tx = Cx + b$ verifica la stima

$$||Tx_1 - Tx_2|| = ||Cx_1 - Cx_2|| = ||C(x_1 - x_2)|| \leq |||C||| \cdot ||x_1 - x_2|| \,,$$

dove $||| \cdot |||$ e $|| \cdot ||$ sono opportune norme, rispettivamente su $M^n(\mathbb{R})$ ed $\mathbb{R}^n$, verificanti la proprietà $||Cv|| \leq |||C||| \cdot ||v||$ per ogni matrice C e per ogni vettore v. Questo è il caso, ad esempio, della norma ℓ^1, definita, per $C = [c_{ij}]$, da $|||C|||_{\ell^1} := \sum_{i,j} |c_{ij}|$. Tale norma verifica la proprietà $|||C_1 C_2|||_{\ell^1} \leq |||C_1|||_{\ell^1} \cdot |||C_2|||_{\ell^1}$. In particolare, se x è un vettore colonna, si ha $||Cx||_{\ell^1} \leq |||C|||_{\ell^1} \cdot ||x||_{\ell^1}$.

L'applicazione T è dunque una contrazione se $|||C||| = |||I - A||| < 1$. In tal caso, dallo schema iterativo $x_{n+1} = Cx_n + b$, inizializzato ponendo $x_0 = b$, si deduce

$$x_n = \left[\sum_{k=0}^{n} C^k \right] b \to \left[\sum_{k=0}^{\infty} C^k \right] y = (I - C)^{-1} y \,.$$

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} C^k$ è detta serie di Neumann della matrice C, e converge a $(I - C)^{-1}$ (in perfetta analogia con la somma della serie geometrica) quando $|||C||| < 1$.

Si osservi che la convergenza della serie di Neumann discende anche dal criterio di convergenza totale nello spazio $M^n(\mathbb{R})$ dotato di una qualunque norma $|||\cdot|||$ verificante la proprietà $|||A_1 A_2||| \leq |||A_1||| \cdot |||A_2|||$. Si ha infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} |||C^k||| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |||C|||^k < +\infty \qquad \text{per } |||C||| < 1 \,.$$

Lezione del 13/10/10 (2 ore). Esempio: data A matrice $n\times n$, si consideri il problema di Cauchy dato dal sistema di n equazioni differenziali $y' = Ay$, con la condizione iniziale $y(0) = y_0$. Detta $y : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}^n$ la soluzione, integrando su $[0,t]$ ambo i membri del sistema di equazioni differenziali e tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene che $y(t)$ verifica l'equazione di punto fisso $y = Ty$, dove la trasformazione $T : C^0([-\delta,\delta];\mathbb{R}^n) \to C^0([-\delta,\delta];\mathbb{R}^n)$ è definita da $Ty(t) = y_0 + \int_0^t A\cdot y(s)\,ds$. Si ha

$$||Ty_1 - Ty_2||_{\ell^\infty([-\delta,\delta])} = \left|\left|\int_0^t A(y_1(s)-y_2(s))\,ds\right|\right|_{\ell^\infty([-\delta,\delta])} \le \delta|||A|||_{\ell^1}\cdot||y_1-y_2||_{\ell^\infty([-\delta,\delta])}\,,$$

ossia T è una contrazione sullo spazio metrico completo $C^0([-\delta,\delta];\mathbb{R}^n)$ dotato della norma ℓ^∞ non appena $\delta\cdot|||A|||_{\ell^1} < 1$. Inizializzando lo schema iterativo ponendo $y_0(t) = y_0$ per $-\delta \le t \le \delta$, si ottiene $y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^kA^k}{k!}y_0$, che converge alla soluzione

$$y(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^kA^k}{k!}y_0 = \exp(tA)\cdot y_0, \qquad (\text{nota: } \forall\, t\in\mathbb{R}\,),$$

dove per una matrice quadrata B, si pone $\exp(B) = \sum_{k=0}^\infty \frac{B^k}{k!}$. La matrice $\exp(B)$ si dice esponenziale della matrice B, ed è ben definita per ogni B: infatti, si ha

$$\sum_{k=0}^\infty |||\frac{B^k}{k!}|||_{\ell^1} \le \sum_{k=0}^\infty \frac{|||B|||_{\ell^1}^k}{k!} = e^{|||B|||_{\ell^1}} < +\infty,$$

da cui la convergenza di $\sum_{k=0}^\infty \frac{B^k}{k!}$ per il criterio di convergenza totale.

Calcolo dell'esponenziale della matrice del sistema dell'oscillatore armonico.

Sviluppi in serie di Fourier per funzioni 2π-periodiche. Ad una funzione $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ tale che $\int_{-\pi}^\pi |f(t)|^2dt$ si associa la funzione$S_n(f)$ che rappresenta la migliore approssimazione in norma $\ell^2([-\pi,\pi])$ di f mediante polinomi trigonometrici di grado (inferiore o uguale a) n, ovvero un elemento dello spazio $(2n+1)$-dimensionale

$$X =< 1, \quad \cos kt\,, \quad \sin kt >_{k=1,\dots,n}\ .$$

Osservando che la base di X è ortogonale, si ottiene la formula di rappresentazione $S_n(f)(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^n a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$, con i coefficienti di Fourier di f dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)\sin(kt)dt, \quad k = 1,...,n.$$

Lezione del 15/10/10 (2 ore). Forma complessa dei coefficienti di Fourier: posto $c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}$ per $j > 0$, $c_j = a_{-j} + ib_{-j}$ per $j < 0$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, si ha

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k\cdot e^{ikt}\,, \qquad \text{con } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)e^{-ikt}dt\,.$$

Diseguaglianza di Bessel:

$$||f - S_n(f)||^2_{\ell^2([-\pi.\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \left(\pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, facendo tendere $n \to +\infty$ si otiene il decadimento a zero dei coefficienti di Fourier $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$ (lemma di Riemann-Lebesgue).

Teorema di Fourier: se $f \in L^2([-\pi,\pi])$ (ad es. f continua a tratti) allora $||f - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \to 0$ per $n \to +\infty$, ovvero la serie di Fourier di f, definita da $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)$ converge in media quadratica ad f. Altrimenti detto, $Y =< 1, \quad \cos kt\,, \quad \sin kt >_{k\in\mathbb{N}}$ è denso in $L^2([-\pi,\pi])$, ovvero la chiusura $\bar{Y}$ di Y in $L^2([-\pi,\pi])$ coincide con tutto lo spazio $L^2([-\pi,\pi])$.

Dal Teorema di Fourier si ottiene l'identità di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\,.$$

Esercizio: sia $f \in C^0([a,b])$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$. Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Convergenza puntuale delle serie di Fourier: se (l'estensione periodica di) f è continua a tratti in $\mathbb{R}$ (e le discontinuità sono di tipo salto), e per ogni x in cui f è continua esistono finite la derivata destra e sinistra, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente alla media dei limiti destro e sinistro di f (in particolare ad f nei punti di continuità di f).

Esercizio: serie di Fourier dell'onda quadra.

Coefficienti di Fourier della derivata: sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$ derivabile con derivata $f' \in L^2([-\pi,\pi])$. Detti a_k, b_k (o, in forma complessa, c_k) i coefficienti di Fourier di f, e rispettivamente α_k, β_k e γ_k i coefficienti di Fourier di f' si ha la relazione $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = kb_k$, $\beta_k = ka_k$ e $\gamma_k = (-ik)c_k$, ossia ad un'operazione differenziale su f corrisponde un'operazone algebrica (moltiplicazione) sui suoi coefficienti di Fourier.

Dall'identità di Parseval si ottiene in particolare

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt\,,$$

da cui si deduce che quanto più una funzione è regolare (ossia quante più derivate possegga) tanto più rapido è il decadimento a zero dei suoi coefficienti di Fourier.

Convergenza uniforme delle serie di Fourier: sia f 2π- periodica, di classe C^1 a tratti (ossia f continua a tratti e con derivata continua a tratti. In realtà basta f continua a tratti e $f' \in L^2([-\pi,\pi])$). Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in ogni intervallo $[a,b]$ in cui f è continua.

Dimostrazione nel caso $f \in C^0([-\pi,\pi])$ e $f' \in L^2([-\pi,\pi])$: dallo studio della convergenza totale della serie di Fourier di f si ricava

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)| &\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(k|a_k| + k|b_k|) \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{2}(a_k^2 + b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|dt \, < +\infty \, ,\end{aligned}$$

da cui la convergenza uniforme della serie di Fourier su $[-\pi,\pi]$ (e, per periodicità, su tutto $\mathbb{R}$) ad una funzione periodica $g \in C^0([-\pi,\pi])$. Questa coincide con f, come si può dedurre invocando il teorema di convergenza puntuale, o quello di Fourier di convergenza in media quadratica: si ha infatti

$$||g - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \le \sqrt{2\pi}||g - S_n(f)||_{\ell^\infty([-\pi,\pi])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

ossia $||g - f||_{\ell^2([-\pi,\pi])} = 0$, come si deduce da

$$||g - f||_{\ell^2([-\pi,\pi])} \le ||g - S_n(f)||_{\ell^2([-\pi.\pi])} + ||S_n(f) - f||_{\ell^2([-\pi.\pi])} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Dalla condizione $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - f(t)|^2 dt = 0$ si deduce, per la continuità di $|g(t) - f(t)|$, che $|g(t) - f(t)| = 0$ per ogni $t \in [-\pi,\pi]$, ossia $g = f$.

Lezione del 19/10/10 (1 ora). Funzioni di più variabili reali. Domini (si considereranno domini D che siano insiemi aperti, o contenuti nella chiusura di insiemi aperti). Insiemi di livello, sottolivello, sopralivello. Funzioni continue. Gli insiemi di livello di una funzione continua sono chiusi nel dominio della funzione, i sopra- e sottolivelli sono aperti nel dominio. Grafico Γ_f di una funzione di più variabili $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\Gamma_f = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) : \ (x_1, ..., x_n) \in D, \ x_{n+1} = f(x_1, ..., x_n)\}$.

Insiemi compatti per successioni. Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un insieme compatto per successioni di $\mathbb{R}^n$ (in generale, su uno spazio metrico compatto per successioni) ammette massimo e minimo. Dimostrazione: sia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D compatto per successioni. Data una successione massimizzante $\{p_n\} \subset D$ (ossia $f(p_n) \to \sup_D f$) esiste una sottosuccessione $p_{n_k} \to \bar{p} \in D$, da cui $f(p_{n_k}) \to f(\bar{p})$ per continuit'a di f. D'altra parte, si ha anche $f(p_{n_k}) \to \sup_D f$, da cui la tesi.

Definizione: dato X spazio metrico, $A \subset X$ si dice limitato se $A \subset B(x_0, r)$ per un certo $x_0 \in X$ ed $r > 0$. L'insieme A si dice totalmente limitato se $\forall \, \epsilon > 0$ esiste una ϵ-rete di A, ovvero $\exists \, x_1, ..., x_N \in A$ (con N dipendente da ϵ) tale che $A \subset \cup_j B(x_j, \epsilon)$.

Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni: in $\mathbb{R}^n$, un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato; in generale, uno spazio metrico (X, d) è compatto per successioni se e solo se è completo e totalmente limitato.

Lezione del 20/10/10 (2 ore). Dimostrazione della caratterizzazione degli insiemi sequenzialmente compatti in $\mathbb{R}^n$:

($\Leftarrow$) sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $\{X_k\} \subset C$ una successione. Essendo C limitato si ha $C \subset [-M, M]^n$ per un certo $M > 0$, per cui se $X_k = (x_1^k, .., x_n^k)$, si ha $|x_j^k| \leq M$ per ogni j, k. In particolare, la successione $\{x_1^k\}$ è limitata in $\mathbb{R}$, e dunque ammette una sottosuccessione $\{x_1^m\}_{m\in N_1}$, con $N_1 \subset \mathbb{N}$ convergente a $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$. Analogamente, la successione $\{x_2^m\}_{m\in N_1}$ è limitata in $\mathbb{R}$ e dunque ammette una sottosuccessione $\{x_2^m\}_{m\in N_2}$, $N_2 \subset N_1$, convergente a $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$. Di questo passo si ottengono, per $j = 1, ..., n$, delle sottosuccessioni $\{x_j^m\}_{m\in N_j}$, $N_j \subset N_{j-1}$, convergenti a $\bar{x}_j \in \mathbb{R}$. In particolare, la sottosuccessione $X_m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$, $m \in N_n$, converge a $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. D'altra parte, siccome C è chiuso, si ha $\bar{X} \in C$.

($\Rightarrow$) Se C non fosse limitato, allora esisterebbe una successione di punti $\{x_n\} \subset C$ tale che $|x_n| \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, $|x_n| \to +\infty$, e quindi questa proprietà vale anche per ogni possibile sottosuccessione di $\{x_n\}$, che dunque non può convergere. Se C non fosse chiuso, allora o non esiste nessuna successione in C convergente in $\mathbb{R}^n$, oppure ne esiste almeno una che converge ad $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus C$, per cui ogni sua sottosuccessione, dovendo convergere a x_0, non converge in C. Dunque C non è compatto per successioni.

$\square$

Funzioni vettoriali di una variabile reale: derivazione per componenti, interpretazione geometrica della derivata come vettore tangente alla curva immagine. Equazione parametrica della retta tangente alla curva immagine: una parametrizzazione canonica è data dallo sviluppo di Taylor di f arrestato al primo ordine.
Funzioni scalari di più variabili. Derivata direzionale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p_0 \in \Omega$: data una direzone $e \in \mathbb{R}^2$ (ossia $e = (a, b)$ con $a^2+b^2 = 1$), la retta passante per $p_0 = (x_0, y_0)$ avente direzione e è data da $t \mapsto r(t) = (x_0+ta, y_0+tb)$, e la derivata nella direzione e di f in p_0 è definita da $D_e f(p_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(r(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0+ta, y_0+tb)$. Se $e = (1, 0)$ (risp. $e = (0, 1)$) si pone $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (risp. $D_e f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$), e tale derivata si chiama derivata parziale rispetto a x (risp. rispetto a y). Esempi di calcolo di derivate direzionali.

Interpretazione geometrica delle derivate direzionali: sia $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\,,\ (x, y) \in \Omega\,\}$ il grafico di f. La mappa $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb))$ ha come immagine la curva costituita dalla restrizione del grafico di f alla retta $r(t)$ di cui sopra, passante per $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ per $t = 0$. Il vettore

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)) = (a, b, D_e f(x_0, y_0)\,),$$

applicato nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, è dunque un vettore tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la cui componente orizzontale è la direzione $e = (a, b)$, e la cui componente verticale è la derivata direzionale di f nella direzione e in p_0.

Esempio di funzione che ammette derivate parziali ma non è continua. Esempio di una funzione f che ammette tutte le derivate direzionali in un certo punto p_0, ma il cui grafico non ammette piano tangente nel punto $(p_0, f(p_0))$.

Lezione del 21/10/10 (1 ora). Funzioni differenziabili. Differenziale $df(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto $p_0 \in \Omega$. Si tratta di un'applicazione lineare che verifica

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - df(p_0) \cdot (p - p_0)|}{|p - p_0|} = 0 \, .$$

Se f è differenziabile in p_0 allora esistono le derivate direzionali di f in p_0 e si ha $D_e f(p_0) = df(p_0) \cdot e$ per ogni direzione $e \in \mathbb{R}^n$.

Se f è differenziabile in p_0, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(p_0, f(p_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è data da $x_{n+1} = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0)$, ovvero

$$x_{n+1} = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0), \quad \text{dove } p = (x_1, ..., x_n) \quad \text{e } p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}).$$

Detta $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, il piano tangente al grafico è generato dai vettori $\{e_i + e_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\}_{i=1,\dots,n}$ (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$).

Lezione del 22/10/10 (2 ore). Rappresentazione del differenziale $df(p_0)$ si rappresenta con il gradiente $\nabla f(p_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)) \in \mathbb{R}^n$, ovvero si ha $df(p_0) \cdot v = \langle \nabla f(p_0), v \rangle$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Il gradiente individua la direzione di massima crescita di f in p_0, ossia

$$\max_{|e|=1} D_e f(p_0) = \max_{|e|=1} \langle \nabla f(p_0), e \rangle = |\nabla f(p_0)| \, , \quad \text{per } e = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}.$$

Una funzione differenziabile in p_0 è continua in p_0. Dimostrazione della continuità di una funzione differenziabile. Teorema del differenziale totale: se in un intorno $B(p_0, r)$ esistono le derivate parziali di f e sono continue in p_0, allora f è differenziabile in p_0. Dimostrazione del teorema del differenziale totale. Funzioni di classe C^1.

Differenziale di funzioni vettoriali. Se $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$ e $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha la rappresentazione mediante la matrice Jacobiana $Df(p_0) \equiv \frac{\partial\{f_1,\dots,f_m\}}{\partial\{x_1,\dots,x_n\}}(p_0)$:

$$df(p_0) \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobiana $\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}}$ della trasformazione in coordinate polari.

Regola della catena per il differenziale composto: se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ sono funzioni differenziabili rispettivamente in $p_0 \in \Omega$ e $q_0 = f(p_0) \in U$, allora $h = g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile in p_0 e vale $dh(p_0) = d(g \circ f)(p_0) = dg(f(p_0)) \cdot df(p_0)$. In termini delle matrici Jacobiane,

$$\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0)\right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\right] \cdot \left[\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\right] \, , \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0) \, .$$

Lezione del 26/10/10 (1 ora). Trasformazioni in coordinate cilindriche e sferiche e rispettive matrici Jacobiane.

Superfici parametriche, vettori tangenti, vettore normale. Data la parametrizzazione (di classe C^1) $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$, con $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, i vettori colonna della matrice Jacobiana $D\vec{r}(p_0)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p_0) \end{bmatrix} , \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(p_0) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(p_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(p_0) \end{bmatrix}$$

sono vettori tangenti alla superficie $S = \{\vec{r}(u,v)\,, (u,v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ nel punto $\vec{r}(p_0) \in S$, e ne generano il piano tangente qualora siano linearmente indipendenti. Un vettore $N(p_0)$ normale alla superficie in $\vec{r}(p_0) \in S$ si ottiene, in modo canonico, mediante il prodotto vettoriale $N = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.

Lezione del 26/10/09 (2 ore). Equazione parametrica ed equazione cartesiana del piano tangente ad una superficie parametrica in un punto p_0. Formula nel caso la superficie sia cartesiana (ovvero sia il grafico di una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$): nel caso $n = 2$ si ha, detto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)\,.$$

Sia dato l'insieme di livello $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, di una funzione $f \in C^1(D; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in f^{-1}(c)$ e $\nabla f(p_0) \neq 0$, tale vettore risulta ortogonale a $f^{-1}(c)$ in p_0. Dimostrazione (caso $n = 2$): supponendo che intorno a p_0 l'insieme di livello si possa descrivere mediante una curva parametrica $p(t) = (x(t), y(t))$ di classe C^1, detta $g(t) = f((x(t), y(t))$ la funzione composta, si ha, applicando la regola della catena:

$$0 = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =< \nabla f, \frac{dp}{dt} >\,,$$

ovvero la condizione di ortogonalità. L'ipotesi che l'insieme di livello sia parametrizzabile intorno a p_0 è sempre soddisfatta nel caso $\nabla f(p_0) \neq 0$, in virtù del Teorema delle funzioni implicite.

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana delle derivate parziali seconde.Teorema di Schwarz: se $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ (ovvero esistono le derivate parziali seconde e sono continue in D) allora la matrice Hessiana $D^2 f(p) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)]$ è simmetrica per ogni $p \in D$.

Lezione del 28/10/10 (1 ora). Sviluppo di Taylor al secondo ordine per $f \in C^2(D; \mathbb{R})$ in $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \equiv p(t) = p_0 + tv \in D$ per $0 \leq t \leq t_0$. Posto $g(t) = f(p(t))$, si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p(t)) v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle\,, \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p(t)) v_j v_i = \langle D^2 f(p) \cdot v,\, v \rangle\,.$$

Dallo sviluppo di Taylor $g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + o(t^2)$ si ottiene

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0),\, (p - p_0)\rangle + o(|p - p_0|^2)\,.$$

Studio della natura dei punti critici di $f \in C^2(D, \mathbb{R})$: se p_0 è un punto critico di f (ossia $\nabla f(p_0) = 0$), allora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine si riduce a

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0),\, (p - p_0)\rangle + o(|p - p_0|^2)\,.$$

Sia $R \in O(n)$ tale che $R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R =$diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di $D^2 f(p_0)$, e sia $p - p_0 = R \cdot w$, con $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned}\langle D^2 f(p_0) \cdot (p - p_0),\, (p - p_0)\rangle &= \langle D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w,\, R \cdot w\rangle = \langle R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R \cdot w,\, w\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2\,.\end{aligned}$$

Otteniamo dunque, tenendo conto che $|w|^2 = |Rw|^2 = |p - p_0|^2$,

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 \; + o(|w|^2)\,,$$

da cui si deduce che se gli autovalori di $D^2 f(p_0)$ sono tutti positivi (risp. negativi) allora p_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale per f. Se vi sono autovalori di segno discorde, p_0 è detto un punto di sella. Se qualche autovalore di $D^2 f(p_0)$ risulta nullo (e gli altri non sono di segno discorde), allora il solo sviluppo di Taylor al secondo ordine non permette di decidere sulla natura del punto critico.

Lezione del 29/10/10 (1 ora). Massimi e minimi di funzioni su domini $D \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e limitati: vanno ricercati tra i punti critici interni a D e tra i massimi e minimi vincolati alla frontiera (o bordo) ∂D. Espressione del vincolo in forma parametrica o in forma implicita (ovvero come insieme di livello). Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma parametrica. Introduzione al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Lezione del 2/11/10 (1 ora). Applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange al calcolo dei massimi e minimi vincolati di una forma quadratica sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per $p = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sia data la forma quadratica

$$Q(p) = p^t A p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Osservando che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_j x_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j\,,$$

si ha che $Q(p) = p^tAp = \frac{1}{2}p^t[A + A^t]p$, ovvero $Q(p) = p^tBp$ con B matrice simmetrica ($B = \frac{1}{2}[A + A^t]$). Quindi non è restrittivo supporre che la matrice A che rappresenta la forma quadratica Q sia già in partenza simmetrica.

Consideriamo il problema di massimo (risp. minimo) vincolato

$$\max_{|p|=1} Q(p)\,, \qquad \min_{|p|=1} Q(p)\,.$$

Il vincolo può essere espresso dall'equazione $g(p) = 0$, con $g(p) = |p|^2-1 = \sum_{i=1}^n x_i^2-1$. Impostando il problema con i moltiplicatori di Lagrange, siamo condotti a risolvere il sistema

$$\nabla Q(p) = \lambda \cdot \nabla g(p)\,, \qquad g(p) = 0\,,$$

ovvero, effettuando i calcoli,

$$2Ap = 2\lambda p\,, \qquad |p|^2 = 1\,.$$

Pertanto i punti di estremo vincolato (tra cui il massimo ed il minimo) sono gli autovettori unitari di A. Osservando che, se p è un autovettore unitario, si ha

$$Q(p) = p^tAp =< Ap, p >= \lambda < p, p >= \lambda,$$

si ha che i valori estremi corrispondono agli autovalori di A.

Lezione del 3/11/10 (2 ore). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione di massimi e minimi vincolati: se $f, g \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, e $p_0 \in g^{-1}(0) \cap \Omega$ è tale che $\nabla g(p_0) \neq 0$, allora p_0 è un punto di estremo vincolato per f ristretta a $g^{-1}(0)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$. Ciò equivale a dire che $(p_0, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}$ è punto critico della funzione (di Lagrange) $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(p, \mu) = f(p) - \mu \cdot g(p)$.

La dimostrazione del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange segue dal Teorema del Dini delle funzioni implicite: se $g \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, $p_0 \equiv (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in g^{-1}(0)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0) \neq 0$, allora esiste $\delta > 0$, ed un intorno $R_\delta = \prod_{i=1}^n [x_{0,i} - \delta, x_{0,i} + \delta]$ tale che $g^{-1}(0) \cap R_\delta = \{(x_1, ..., x_n) \in R_\delta\,,\ x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})\}$, dove $\phi : \prod_{i=1}^{n-1} [x_{0,i}-\delta, x_{0,i}+\delta] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.

Il teorema del Dini dà delle condizioni affinchè l'insieme di livello $g^{-1}(0)$ possa rappresentarsi, localmente, come grafico di una opportuna funzione ϕ, la quale risulta definita implicitamente dall'equazione $g = 0$, e le cui derivate possono essere calcolate derivando implicitamente la relazione $g = 0$. In particolare, dalla relazione $0 = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, .., x_{n-1}, \phi(x_1, ..., x_{n-1}))$, $i = 1, ..., n-1$, si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}) = - \left.\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)}\right|_{x_n=\phi(x_1,...,x_{n-1})} \qquad i = 1, ..., n-1.$$

Dato che i vettori $\tau_i = e_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} e_n$, $i = 1, ..., n-1$, generano il piano tangente al grafico di ϕ, la relazione precedente afferma che $\langle \nabla g(p), \tau_i \rangle = 0\ \forall\, i = 1, ..., n-1$, per ogni

$p \in g^{-1}(0) \cap R_\delta$, ovvero rimane dimostrato che se $g \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ e $\nabla g(p) \neq 0$, allora $\nabla g(p)$ è ortogonale, nel punto p, all'insieme di livello di g contenente p.

Dimostrazione del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: se $\nabla g(p_0) \neq 0$ allora almeno una delle sue componenti $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ non è nulla. Supponiamo per semplicità che sia $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p_0) \neq 0$. Per il Teorema del Dini, si ha intorno a p_0 $g(x_1, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})$, per cui , se p_0 è un estremo vincolato di f, si ha, adottando le notazioni di cui sopra,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{n-1}, \phi(x_1, ..., x_{n-1}))\Big|_{p_0} = \langle \nabla f(p_0), \tau_i \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$: infatti, dato che anche $\langle \nabla g(p_0), \tau_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, ..., n-1$, l'insieme $\{\nabla g(p_0), \tau_i\}_{i=1,...,n-1}$ forma una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$, e quindi, posto $\lambda = \frac{\langle \nabla f(p_0), \nabla g(p_0) \rangle}{|\nabla g(p_0)|^2}$, si ha necessariamente $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

Lezione del 4/11/10 (1 ora). Il teorema del Dini delle funzioni implicite: sia $G : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 nelle variabili $(x, y) \equiv (x_1, .., x_n, y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e $\det \frac{\partial\{G_1,...,G_k\}}{\partial\{y_1,...,y_k\}} \neq 0$. Allora $\exists\, \delta, \sigma > 0$, ed esiste $\phi : B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to B_\sigma(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ tali che $G^{-1}(0) \cap (B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)) = \{(x, y) : x \in B_\delta(x_0)\,,\ y = \phi(x)\}$. Inoltre, ϕ è di classe C^1 e vale

$$D\phi(x) = -\left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{y_1, ..., y_k\}}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{x_1, ..., x_n\}}\right]\Bigg|_{y=\phi(x)} ,$$

ovvero vale la formula di derivazione implicita

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(G_i(x, \phi(x))\right) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, \phi(x)) + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_\ell}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x)\,.$$

Dimostrazione nel caso $n = m = 1$. Supponendo $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, esiste $\sigma > 0$ tale che $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) > 0$ per $x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma$ e $y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma$. Possiamo anche supporre senza perdita di generalità che

$$\inf\{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y),\ x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma\,,\ y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma\} = \ell > 0\,.$$

In particolare, la funzione $t \mapsto G(x_0, t)$ è strettamente crescente per $y_0 - \sigma \leq t \leq y_0 + \sigma$, e dunque vale $G(x_0, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x_0, y_0 + \sigma) > 0$. Per la continuità di G esiste $0 < \delta < \sigma$ tale che $G(x, y_0 - \sigma) < 0$ e $G(x, y_0 + \sigma) > 0$ per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$. Per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, la stretta monotonia della funzione $t \mapsto G(x, t)$ implica che esiste un unico punto $y \equiv \phi(x) \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $G(x, y) = G(x, \phi(x)) = 0$. Verifichiamo che la funzione implicita ϕ sia di classe C^1: siano x e $x+h$ in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, consideriamo la restrizione di G al segmento di estremi $p = (x, \phi(x))$ e $q = (x + h, \phi(x + h))$, ovvero la funzione

$$f(t) = G(p + t(q - p)) = G(x + th, \phi(x) + t(\phi(x + h) - \phi(x)))\,, \qquad 0 \leq t \leq 1\,.$$

Per il teorema di Lagrange del valor medio, si ha, per un certo $0 < \tau < 1$,

$$f(1) - f(0) = f'(\tau) = \frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau) \cdot h + \frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau) \cdot (\phi(x+h) - \phi(x)) \,,$$

dove $p_\tau = p + \tau(q-p)$. Essendo $f(1) = f(0) = 0$, si ottiene in particolare

$$\phi(x+h) - \phi(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)} h \,.$$

Dalla relazione precedente si ricava, dato che $p_\tau \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$,

$$|\phi(x+h) - \phi(x)| \leq h\frac{M}{\ell} \quad \text{ con } M = \max\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,y),\ x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta,\ y_0 - \sigma \leq y \leq y_0 + \sigma\} \,.$$

Facendo tendere h a zero, si ottiene così la continuità di ϕ per ogni $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.

Ora, stabilito che ϕ è continua, si può dedurre che per $h \to 0$ il punto $p_\tau = (x + \tau h, \phi(x) + \tau(\phi(x+h) - \phi(x)))$ tende effettivamente a $p = (x, \phi(x))$, da cui, passando al limite per $h \to 0$ nella relazione

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)} \,,$$

si ottiene che ϕ è derivabile e vale la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))} \,.$$

D'altra parte, il secondo membro della precedente relazione è costituito dalla composizione di funzioni continue, pertanto è continuo. Si deduce pertanto che ϕ è in realtà di classe C^1.

Lezione del 5/11/10 (1 ora). Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di k vincoli: sia $G = (G_1, ..., G_k) : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ di classe C^1, a sia $f \in C^1(A; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in G^{-1}(0)$ è un estremo vincolato per f ristretta a $G^{-1}(0)$ e se $DG(p_0)$ ha rango massimo k, allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(p_0) = \lambda_1 \nabla G_1(p_0) + ... + \lambda_k \nabla G_k(p_0)$.

Lezione del 9/11/10 (1 ora). Teorema della funzione inversa: se $g : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è di classe C^1 e se $\det Dg(p_0) \neq 0$ (ovvero $\exists\ [Dg(p_0)]^{-1}$), allora $\exists\ U \subset D$ intorno di p_0 e $V \subset \mathbb{R}^k$ intorno di $q_0 = g(p_0)$ tale che $g : U \to V$ è invertibile. Inoltre, l'inversa g^{-1} è di classe C^1 (si dice che g è un diffeomorfismo locale), e $[Dg^{-1}(q_0)] = [Dg(p_0)]^{-1}$.

Idea della dimostrazione: per q vicino a q_0 si consideri lo schema di tipo Newton $p_{n+1} = f(p_n)$, con

$$f(p) = p + [Dg(p_0)]^{-1}(q - g(p)) \,.$$

Si ha $p = f(p)$, ossia p è punto fisso di f, se e solo se $q = g(p)$. In altre parole, se il punto fisso p esiste ed è unico, allora $p = g^{-1}(q)$, l'immagine inversa di q secondo g, ossia g è invertibile.

Dimostriamo che f è una contrazione se p è sufficientemente vicino a p_0, in modo da garantire esistenza e unicità del punto fisso di f, ovvero l'invertibilità locale di g intorno a p_0.

Dimostriamo preliminarmente la stima

$$|f(p) - f(p')| \leq M\sqrt{k}|p - p'| \quad \forall\, p, p' \in B_r(p_0), \quad \text{con } M = \sup_{p \in B_r(p_0)} ||Df(p)||_1 \,.$$

Si ha, per il teorema fondamentale del calcolo applicato a $t \mapsto f(p + t(p' - p))$

$$\begin{aligned}
|f(p) - f(p')| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(p' - p))dt \right| = \left| \int_0^1 [Df(p + t(p' - p)] \cdot (p' - p)dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |\, Df(p + t(p' - p)) \cdot (p' - p)\,|dt \\
&\leq \int_0^1 ||Df(p + t(p' - p)) \cdot (p' - p)||_1 dt \\
&\leq \int_0^1 ||Df(p + t(p' - p))||_1 ||p' - p||_1 dt \\
&\leq \int_0^1 M\sqrt{k}|p' - p|dt \leq M\sqrt{k}|p - p'| \,.
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo $Df(p)$ per ogni $p \in B_r(p_0)$, e dimostriamo che si ha $||Df(p)||_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ per ogni $p \in B_r(p_0)$ a patto di scegliere r sufficientemente piccolo (in particolare $M\sqrt{k} < 1/2$ e duque f è una contrazione). Si ha

$$Df(p) = I - [Dg(p_0)]^{-1}[Dg(p)] = [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)] \,,$$

da cui

$$||Df(p)||_1 = ||\, [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)]\, ||_1 \leq ||Dg(p_0)^{-1}||_1 ||Dg(p_0) - Dg(p)||_1 \,,$$

e dato che g è di classe C^1 si ha che per $p \to p_0$ vale $||Dg(p_0) - Dg(p)||_1 \to 0$, da cui discende che $||Df(p)||_1$ può essere reso piccolo a piacere per p sufficientemente vicino a p_0.

Esempio: la trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ verifica $\det\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}} = r \neq 0 \;\forall\, r > 0,\; \forall\, \theta \in \mathbb{R}$. Tale trasformazione è dunque un diffeomorfismo locale. Si osservi che la trasformazione non è globalmente invertibile, in quanto (r, θ) ed $(r, \theta + 2k\pi)$ hanno la stessa immagine $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Lezione del 10/11/10 (2 ore). Integrali doppi e tripli per funzioni continue definite su un prodotto di intervalli. Teorema di Fubini-Tonelli (formula dell'integrale iterato).

Estensione al caso di domini normali rispetto agli assi coordinati: nel caso degli integrali doppi, se ad esempio $h_1, h_2 \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ e $D = \{(x,y),\ a \le x \le b\,,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$, ed inoltre $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, si ha

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx\,.$$

Nel caso degli integrali tripli, se esistono funzioni continue $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ ed $h_1(x)$ e $h_2(x)$ tali che $D = \{(x,y,z),\ a \le x \le b\,,\ h_1(x) \le y \le g_2(x)\,,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$, ed $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, allora si ha

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx\,.$$

Calcolo di aree e volumi. Per $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha $\text{Area}(D) = \iint_D dx\,dy$. Per $D \subset \mathbb{R}^3$ si ha $\text{Volume}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz$. Esercizi sugli integrali doppi e tripli.

Lezione dell' 11/11/10 (1 ora). Formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli: se $T : R \subset \mathbb{R}^n \to D = T(R) \subset \mathbb{R}^n$, è di classe C^1 ed iniettiva tranne al più sui punti della frontiera ∂R del dominio, allora, per $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, posto $x = (x_1, ...x_n) = T(u_1, ..., u_n) = T(u)$, vale la formula

$$\int_D f(x)\,dx_1...dx_n = \int_R f(T(u)) \left|\det \frac{\partial\{T_1, ..., T_n\}}{\partial\{u_1, ..., u_n\}}(u)\right| du_1...du_n\,.$$

Uno dei passaggi chiave della formula è l'espressione del volume del parallelepipedo $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori $v_j = (v_{1,j}, ...v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, ..., n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j, si ha $\text{vol}\,(P) = |\det A|$.

Lezione del 12/11/10 (2 ore). Esempi di calcolo di integrali multipli utilizzando trasformazioni di coordinate polari, sferiche e cilindriche. Calcolo di baricentri e momenti d'inerzia di figure piane e solide.

Cenno sugli integrali multipli impropri (non visto a lezione): data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiva, nel caso in cui il dominio D non sia limitato, o la funzione non sia limitata su D, se $D = \bigcup\limits_{r>0} D_r$, dove $D_r \subset D_R \subset D$ per $r < R$, D_r è un dominio limitato su cui f è limitata ed integrabile, si definisce l'integrale improprio $\displaystyle\int_D f = \lim_{r\to+\infty} \int_{D_r} f$. Tale definizione è indipendente dalla scelta della famiglia di domini crescenti D_r che invadono D. Osservazione: l'integrale improprio può anche valere $+\infty$. Calcolo di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Posto $f(x,y) = e^{-x^2}e^{-y^2}$ e $D_R = \{(x,y)\,,\ ||(x,y)||_{\ell^\infty} \le R\}$, si ha

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-y^2} \left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right] dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2\,.$$

D'altra parte, scegliendo $D_R = B_R((0,0))$ e trasformando in coordinate polari, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r\, drd\theta = \pi\,,$$

da cui la formula $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Lezione del 16/11/10 (1 ora). Integrali curvilinei di prima specie. Data una funzione continua $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed una curva parametrizzata $\gamma : [a,b] \to D$ di classe C^1 e iniettiva (ovvero una curva semplice), detto $\Gamma = \{\gamma(t)\,,\ a \leq t \leq b\}$ il suo sostegno, si definisce l'integrale curvilineo (di prima specie) di f lungo Γ come segue:

$$\int_\Gamma f d\ell := \int_a^b f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b f(x_1(t), ..., x_n(t))\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot x_i^2}\, dt\,.$$

Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando f, additività rispetto alla curva Γ (ossia, se $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ con $\Gamma_i = \{\gamma_i(t)\,,\ a_i \leq t \leq b_i\}$, γ_i di classe C^1 e iniettiva, $\gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$ per ogni i, si ha $\int_\Gamma f d\ell = \sum_i \int_{\Gamma_i} f d\ell$).

L'integrale curvilineo di prima specie è un integrale non orientato, e si utilizza per il calcolo di lunghezze di curve (caso $f \equiv 1$), masse di oggetti filiformi (se f rappresenta la densità lineare dell'oggetto) o baricentri e/o momenti d'inerzia (rispettivamente nel caso $f(x_1, ..., x_n) = x_i$, o f rappresenti la distanza al quadrato da un asse, come ad esempio $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, la distanza al quadrato dall'asse z). Formula per la lunghezza del grafico di una funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Lezione del 17/11/10 (2 ore). Integrali superficiali di prima specie. Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una superficie $S = \{\vec r(u,v),\ (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2\} \subset D$ definita mediante una parametrizzazione di classe C^1 iniettiva, si definisce l'integrale superficiale di f su S come segue:

$$\iint_S f da := \iint_R f(\vec r(u,v)) \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| dudv = \iint_R f(\vec r(u,v))\sqrt{\det([D\vec r]^t \cdot [D\vec r])}\, dudv\,.$$

Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, linearità, additività. Calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure bidimensionali.

Campi vettoriali. Integrale curvilineo (detto di seconda specie) per campi vettoriali su curve orientate: se $F : d \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori continuo e $\Gamma \subset D$ è una curva orientata di primo estremo A e secondo estremo B, parametrizzata mediante $\gamma : [a,b] \to D$ di classe C^1, con $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, si pone

$$\int_\Gamma F \cdot d\ell := \int_a^b < F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > dt\,.$$

Notazione con le 1-forme differenziali: se $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, si pone

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot d\ell &= \int_\Gamma F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz = \\ &= \int_a^b F_1(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

L'applicazione $(x,y,z) \mapsto F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$ si dice 1-forma differenziale.

Proprietà dell'integrale curvilineo di seconda specie: indipendenza dalla parametrizzazione (a patto che conservi l'orientazione di Γ), linearità, additività. L'integrale curvilineo di seconda specie dipende dall'orientazione di Γ: se indichiamo con Γ_{AB} la curva Γ orientata da A a B e Γ_{BA} la stessa curva orientata da B ad A, si ha

$$\int_{\Gamma_{BA}} F \cdot d\ell = -\int_{\Gamma_{AB}} F \cdot d\ell\,.$$

Lezione del 18/11/10 (1 ora). Campi conservativi, potenziale scalare. Condizioni equivalenti alla proprietà di essere conservativo per un campo di vettori di classe C^0: indipendenza dalla traiettoria, circuitazione nulla. Determinazione di una funzione potenziale per un campo conservativo $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: fissato $p_0 \in D$, si pone $\phi(p) = \int_{\Gamma_{p_0 p}} F \cdot d\ell$, dove, per $p \in D$, $\Gamma_{p_0 p}$ è una curva orientata che collega p_0 a p. La definizione è consistente, per l'indipendenza della traiettoria. Dimostriamo che ad esempio $\frac{\partial \phi}{\partial x}(p) = F_1(p)$, la prima componente di F: detto $S = \{p + te_1\,,\ 0 \le t \le h\}$ il segmento che unisce p a $p + he_1$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\phi(p+he_1) - \phi(p)}{h} &= \frac{1}{h}\int_S F \cdot d\ell = \frac{1}{h}\int_0^h < F(p+te_1), e_1 > dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h F_1(p+te_1)dt = F_1(p + \bar{t}e_1)\end{aligned}$$

per un certo $0 \le \bar{t} \le h$. La conclusione segue passando al limite per $h \to 0$, stante la continuità di F_1.

Condizione necessaria affinché un campo F di classe C^1 sia conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è che la matrice Jacobiana DF sia una matrice simmetrica (infatti, se $F = \nabla\phi$ in A allora $DF = D^2\phi$, che è simmetrica per il teorema di Schwarz).

Lezione del 19/11/10 (2 ore). Definizione di rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Campi irrotazionali. Un campo conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è irrotazionale in A. Nozione di insieme semplicemente connesso (definizione data in $\mathbb{R}^2$): $A \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni $\Gamma \subset A$ curva semplice chiusa, si ha $\Gamma = \partial D$ con $D \subset A$ (Γ è il bordo di un dominio interamente contenuto in A). La condizione $D\vec{F}$

simmetrica (ovvero rot$F = 0$) su un dominio A semplicemente connesso è sufficiente affinchè F sia conservativo in A. Esempi di insiemi semplicemente connessi: palle, insiemi convessi, insiemi stellati.

Esempio fondamentale: il campo $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ è irrotazionale. Tuttavia non è conservativo su tutto il suo dominio di definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (un insieme non semplicemente connesso), in quanto il suo integrale curvilineo lungo una circonferenza di centro l'origine è diverso da zero. Sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0,\ x \geq 0\}$, che è semplicemente connesso, si ha $F = \nabla\theta$, dove θ è la funzione angolare definita dalla funzione inversa della trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ristretta a $(0,+\infty) \times (0, 2\pi)$.

Esempi di campi conservativi: il campo elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa puntiforme, dato da $\vec{F}(x,y,z) = \pm\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ è conservativo. Si ha $\vec{F} = \nabla\phi$, con $\phi(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Il campo di una forza di richiamo elastica $F(x,y,z) = -k(x,y,z)$ è conservativo: si ha $F = \nabla\phi$ con $\phi(x,y,z) = \frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

Formule di Gauss-Green nel piano: sia $F = (F_1, F_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, sia $D \subset A$ un dominio tale che $\Gamma = \partial D$ sia una curva semplice chiusa di classe C^1 a tratti. Allora vale

$$\oint_\Gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

dove Γ è orientata in senso antiorario. Dimostrazione nel caso di domini normali rispetto ad entrambi gli assi coordinati.

Lezione del 23/11/10(1 ora). Applicazioni del teorema di Gauss-Green al calcolo di aree di figure piane.

Notazione per gli integrali curvilinei (e superficiali) tramite forme differenziali: tale formalismo è giustificato dalla regola di cambiamento di variabili negli integrali multipli, e si rivela adeguato per generalizzazioni in dimensione arbitraria, e per le applicazioni fisiche e geometriche.

Una 1-forma differenziale ω di classe C^1 su un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è una funzione $p \mapsto \omega(p)$, dove $\omega(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una applicazione lineare, ovvero si può scrivere $\omega(p) = F_1(p)dx + F_2(p)dy + F_3(p)dz$, dove $F_1, F_2, F_3 \in C^1(A;\mathbb{R})$ e dx, dy, dz sono rispettivamente i differenziali delle funzioni coordinate $(x,y,z) \mapsto x$, $(x,y,z) \mapsto y$, $(x,y,z) \mapsto z$.

Esempio: se $\phi \in C^1(A;\mathbb{R})$, l'applicazione $p \mapsto d\phi(p) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}(p)dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}(p)dz$ è la 1-forma differenziale che associa ad ogni punto $p \in A$ l'applicazione lineare $d\phi(p)$, ovvero il differenziale di ϕ in p.

Alla 1-forma $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ possiamo associare il campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$, e viceversa. L'integrale di ω lungo Γ corrisponde dunque all'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo Γ.

Introduciamo un prodotto esterno $\wedge$ (wedge) anticommutativo, associativo, distributivo rispetto alla somma, definito sulle applicazioni lineari, con cui è possibile generalizzare la nozione di prodotto vettoriale. In particolare si ha $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, $dx \wedge dz = dz \wedge dx$, $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$, $dx \wedge dx = -dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, $dz \wedge dz = 0$. (lo spazio vettoriale generato dagli oggetti così definiti è quello delle applicazioni bilineari alternanti).

Definiamo una 2-forma differenziale ω di classe C^1 su $A \subset \mathbb{R}^3$ come una funzione $p \mapsto \omega(p)$, dove $\omega(p) = F_1(p)dy \wedge dz - F_2(p)dx \wedge dz + F_3(p)dx \wedge dy$, con $F_1, F_2, F_3 \in C^1(A; \mathbb{R})$. A tale 2-forma è associato il campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$ e viceversa.

Una 2-forma differenziale su $D \subset \mathbb{R}^2$ si rappresenta con $\omega(p) = f(p)dx \wedge dy$, con $f(p)$ una funzione scalare su D. Analogamente, una 3-forma differenziale su $D \subset \mathbb{R}^3$ è del tipo $\omega(p) = f(p)dx \wedge dy \wedge dz$, con $f(p)$ funzione scalare su D.

Una 3-forma differenziale su $D \subset \mathbb{R}^2$ è identicamente nulla, dovendo contenre almeno una ripetizione di dx o dy.

Generalizzando, si definiscono le k-forme differenziali su $D \subset \mathbb{R}^n$, per $0 \leq k \leq n$, in questo modo: le 0-forme sono le funzioni scalari su D, mentre per $k > 0$, dette $x_1, ..., x_n$ le coordinate su $\mathbb{R}^n$, una k-forma è data dalla somma di termini del tipo $\omega(p) = f(p)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ e $f(p)$ funzione scalare.

Definiamo un operatore d (differenziale esterno) che manda 1-forme in 2-forme, in questo modo: se $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$, si pone $d\omega = dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz$. questo operatore generalizza la nozione di differenziale per funzioni (ovvero 0-forme).

In generale, d manda k-forme in $(k+1)$-forme, ponendo per $\omega = f(p)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, $d\omega = df(p) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

In particolare, se la 1-forma differenziale ω è associata ad un campo vettoriale F, allora $d\omega$ è associata a $\mathrm{rot}\vec{F}$.

Una 1-forma differenziale ω tale che $d\omega = 0$ in un dominio A si dice chiusa in A, mentre se esiste una funzione scalare ϕ tale che $\omega = d\phi$ in A, allora ω si dice esatta in A.

Le 1-forme chiuse sono associate ai campi irrotazionali, quelle esatte ai campi conservativi, e pertanto una forma esatta è chiusa, mentre il viceversa è sicuramente vero su domini semplicemente connessi.

Lezione del 24/11/10 (2 ore). Integrazione per k-forme differenziali su k-superfici orientate in $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$. Definiamo dapprima l'integrazione di n-forme su domini $D \subset \mathbb{R}^n$, che si sottintendono orientati dalla base canonica di $\mathbb{R}^n$, ovvero da un sistema (ordinato) di coordinate $x_1, ..., x_n$. Per $\omega = f(p)\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, con $f(p)$ funzione scalare su D, si pone

$$\int_D \omega = \int_D f(p)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n := \int_D f(p)\, dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

dove l'ultima espressione è l'integrale multiplo (di prima specie) di f su D. Si osservi che viene così definito un integrale orientato, in quanto ad esempio, nel caso $n = 2$,

$$\int_D f(x,y) dy \wedge dx = \int_D (-f(x,y) dx \wedge dy) = -\int_D f(x,y)\, dxdy.$$

Formula di cambiamento di variabili per integrali di n-forme su domini di $\mathbb{R}^n$: data $T : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, iniettiva e di rango massimo n (tranne al più sul bordo ∂R), consideriamo il caso $n = 2$ (il caso generale si deduce in perfetta analogia). Espresse in coordinate $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ e $\omega = f(x, y)\, dx \wedge dy$ si ha, supponendo che $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ (ovvero supponendo che T conservi l'orientazione, in altre parole che l'orientazione naturale di $D = T(R)$ data dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ coincida con quella indotta dalla parametrizzazione T),

$$\begin{aligned}\int_{T(R)} \omega = \int_{T(R)} f(x, y)\, dx \wedge dy &= \int_{T(R)} f(x, y)\, dxdy \\ &= \int_R f(x(u, v), y(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, dudv \\ &= \int_R f(x(u, v), y(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du \wedge dv \\ &= \int_R f(x(u, v), y(u, v))\, dx(u, v) \wedge dy(u, v) \\ &=: \int_R T^*(f(x, y)\, dx \wedge dy)\end{aligned}$$

In altre parole, si ha la formula di cambiamento di variabili $\int_{T(R)} \omega = \int_R T^*\omega$, dove $T^*\omega$ è una n-forma su R, detta *pull-back* di ω secondo T. In generale, se ω è una k-forma in $D \subset \mathbb{R}^n$, e $T : R \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $k \leq m \leq n$ e $T(R) \subset D$, rimane definita la k-forma $T^*\omega$ sul dominio $R \subset \mathbb{R}^m$ come segue: se ad esempio su $\mathbb{R}^n$ poniamo le coordinate $p \equiv (x_1, ..., x_n)$ e su $\mathbb{R}^m$ le coordinate $q \equiv (u_1, ..., u_m)$, e se (senza perdita di generalità) consideriamo $\omega = f(p)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_k$, si pone

$$T^*(f(p)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_k) := f(T(q))\, dx_1(u_1, ..., u_m) \wedge dx_2(u_1, ..., u_m) \wedge ... \wedge dx_k(u_1, ..., u_m)\,.$$

In particolare, se $k = m$ si ha

$$T^*(f(p)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_k) = f(T(q)) \det \frac{\partial(x_1, ..., x_k)}{\partial(u_1, ..., u_k)} du_1 \wedge ... \wedge du_k\,.$$

A lezione abbiamo visto i casi $k = m = 2$ e $n = 2, 3$. Grazie al pull-back si può definire la nozione di integrale di una k-forma ω su una k-superficie orientata S di $\mathbb{R}^n$. Supponendo che S sia orientata da una parametrizzazione $T : R \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, con $S = T(R)$, T di classe C^1, DT di rango massimo k, T iniettiva tranne al più sul bordo ∂R (una tale parametrizzazione si dice *regolare*), si pone

$$\int_S \omega := \int_R T^*\omega\,.$$

Nel caso $k = 2$, $n = 3$, se $\omega = F_1 dy \wedge dz - F_2 dx \wedge dz + F_3 dx \wedge dy$ (ossia ω è associata al campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$), ponendo $T(q) = p$, o, in coordinate,

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_S F_1 dy\wedge dz - F_2 dx\wedge dy + F_3 dx\wedge dy = \int_R T^*(F_1 dy\wedge dz - F_2 dx\wedge dy + F_3 dx\wedge dy)\\
&= \int_R \left[F_1(T(q))\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - F_2(T(q))\det\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + F_3(T(q))\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\wedge dv\\
&= \int_R \langle F(T(q)), \frac{\partial T}{\partial u}\times\frac{\partial T}{\partial v}\rangle\, dudv\\
&= \int_R \langle F(T(q)), n(T(q))\rangle \left|\frac{\partial T}{\partial u}\times\frac{\partial T}{\partial v}\right| dudv\\
&= \int_S \langle F, n\rangle da\,,
\end{aligned}$$

con $n = \frac{\frac{\partial T}{\partial u}\times\frac{\partial T}{\partial v}}{\left|\frac{\partial T}{\partial u}\times\frac{\partial T}{\partial v}\right|}$ la normale unitaria che orienta S (individuata tramite la parametrizzazione T). In termini del campo F, dunque, l'integrale orientato di superficie rappresenta l'integrale di prima specie su S della componente normale di F, ossia il flusso del campo di vettori F attraverso la superficie orientata S.

Lezione del 25/11/10 (1 ora). Indipendenza dalla parametrizzazione degli integrali di k-forme su k-superfici orientate di $\mathbb{R}^n$. A lezione abbiamo visto il caso $k=2$, $n=3$, corrispondente agli integrali di flusso per campi vettoriali, ma l'argomento si ripete mutatis mutandis nel caso generale. Date due parametrizzazioni regolari $T : R\subset\mathbb{R}^k \to S\subset\mathbb{R}^n$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\Psi : R'\subset\mathbb{R}^k\to S$, $\Psi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ che inducano la stessa orientazione su S, e detta $g = \Psi^{-1}\circ T$, $g(u,v) = (s(u,v), t(u,v))$, e posto infine per semplicità $\omega = f(x,y,z)\,dx\wedge dy$, si ha da una parte

$$\int_R T^*\omega = \int_R f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\,du\wedge dv\,.$$

D'altra parte

$$\int_{R'} \Psi^*\omega = \int_{R'} f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s,t)\,ds\wedge dt\,.$$

Per la formula di cambiamento di variabile negli integrali di 2-forme in $\mathbb{R}^2$, dato che $\Psi\circ g = T$, ovvero, in coordinate, $(x(s(u,v),t(u,v)), y(s(u,v),t(u,v)), z(s(u,v),t(u,v))) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, (si osservi che il fatto che T e Ψ inducano la stessa orientazione su S si traduce nella condizione $\det\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v))} > 0$), si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{R'}\Psi^*\omega = \int_R g^*(\Psi^*\omega) =\\
&= \int_R f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s(u,v), t(u,v))\det\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}(u,v)\,du\wedge dv\,.
\end{aligned}$$

Ora, dato che $DT(u,v) = D\Psi(s(u,v),t(u,v)) \cdot Dg(u,v)$, ovvero

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s(u,v),t(u,v)) \cdot \frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}(u,v)\,,$$

si deduce in particolare

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s(u,v),t(u,v)) \cdot \det \frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}(u,v)\,,$$

da cui $\int_{R'} \Psi^*\omega = \int_R g^*(\Psi^*\omega) = \int_R T^*\omega$, ovvero la proprietà di indipendenza dalla parametrizzazione per $\int_S \omega$.

Si osservi a margine la seguente proprietà, detta *funtoriale* (nella fattispecie, controvariante), dell'operazione di pull-back, testè dimostrata: $(\Psi \circ g)^* = g^* \circ \Psi^*$.

Rivisitazione del Teorema di Gauss-Green nel piano alla luce degli integrali orientati: detta $\omega = F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$, considerata come 1-forma in $\mathbb{R}^3$, si ha che ω è associata al campo di vettori $F = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$. In particolare, come già visto, $d\omega = (-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x})\, dx \wedge dy$ è associata a $\operatorname{rot} F = (-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x})e_3$. Il teorema di Gauss-Green si può scrivere

$$\int_{\partial D} \langle F, \tau\rangle d\ell = \iint_D \langle \operatorname{rot} F, n\rangle da\,,$$

dove il dominio D giace in un piano orizzontale di $\mathbb{R}^3$, è orientato dalla normale diretta verso l'alto $n = e_3$, ed il bordo ∂D è di classe C^1 a tratti ed è orientato in senso antiorario dal versore τ, ovvero n e τ soddisfano la regola della mano destra, con n facente le veci del pollice.

Scritta in tale forma, la fomula precedente è un caso particolare del Teorema di Stokes.

In termini della 1-forma ω, la formula precedente si scrive $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$, con le stesse precedenti convenzioni circa le orientazioni di D e ∂D.

Lezione del 26/11/10 (2 ore). Teorema di Stokes per superfici poliedrali triangolate in $\mathbb{R}^3$: si sfrutta l'invarianza per rotazioni degli integrali orientati per ottenere la validità della formula di Gauss-Green (versione Stokes) su un pezzo di superficie piana in $\mathbb{R}^3$ (ad es. un triangolo o un quadrilatero). dopodichè si sfrutta l'additività degl'integrali orientati per ottenere la validità della formula su una superficie ottenuta giustapponendo triangoli (o quadrilateri) non necessariamente complanari incollandoli tra loro lungo i rispettivi lati.

Teorema di Stokes nel caso di superfici C^1 regolari sino al bordo: sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfice con bordo ∂S, entrambi orientati da una parametrizzazione $T : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, rango DT massimo, e iniettiva sino al bordo ∂R, dove può risultare di classe C^1 a tratti. Allora si ha $\int_{\partial S} \langle F, \tau\rangle d\ell = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, n\rangle da$ per ogni campo vettoriale C^1.

Se ω è la 1-forma differenziale associata al campo F, il Teorema di Stokes recita $\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega$. Dimostrazione: senza perdita di generalità possiamo considerare che la forma ω sia del tipo $\omega = f(x,y,z)dx$ (e quindi $d\omega = -\frac{\partial f}{\partial y}dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial z}dx \wedge dz$) e possiamo considerare $T : R \subset \mathbb{R}^2 \to S$ con $R = [a,b] \times [c,d]$. Si ha da una parte

$$\begin{aligned}\int_S d\omega &= \int_R T^* d\omega \\ &= \int_R \left[-\frac{\partial f}{\partial y} \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u.v)} - \frac{\partial f}{\partial z} \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u.v)} \right] du \wedge dv\,,\end{aligned}$$

mentre d'altra parte

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial R} T^*(f(x,y,z)dx) &= \int_{\partial R} f(T(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}du + f(T(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}dv \\ &= \int_a^b f(T(u,c))\frac{\partial x}{\partial u}(u,c) - f(T(u,d))\frac{\partial x}{\partial u}(u,d)\,du+ \\ &+ \int_c^d f(T(b,v))\frac{\partial x}{\partial v}(b,v) - f(T(a,v))\frac{\partial x}{\partial v}(a,v)\,dv \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d -\frac{\partial}{\partial v}(f(T(u,v))\frac{\partial x}{\partial u})\,dv \right] du+ \\ &+ \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial u}(f(T(u,v))\frac{\partial x}{\partial v})\,du \right] dv \\ &= \int_R -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\,dudv+ \\ &+ \int_R \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\,dudv \\ &= \iint_S d\omega\,.\end{aligned}$$

Si osservi l'uso del teorema fondamentale del calcolo nel passaggio chiave e l'uso del teorema di Schwarz nel passaggio successivo.

Sia data $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva semplice chiusa orientata. Supponiamo $\Gamma = \partial S = \partial D$ per due superfici S e D orientate in modo da rispettare la regola della mano destra rispetto all'orientazione di Γ. Allora dal Teorema di Stokes si deduce che per ogni campo vettoriale F, $\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n\rangle da = \iint_D \langle \operatorname{rot} F, n\rangle da$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie a bordo fissato è indipendente dalla superficie. Equivalentemente, se Σ è una superficie orientata chiusa, ovvero $\partial\Sigma = \emptyset$, $\iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, n\rangle da = 0$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è nullo. Quindi i campi vettoriali F che sono rotori di altri campi vettoriali A (ossia $F = \operatorname{rot} A$), giocano dal punto di vista degli integrali di superficie di seconda specie lo stesso ruolo che giocano i campi conservativi (ossia i gradienti) nel caso degli integrali curvilinei di seconda specie. Se $F = \operatorname{rot} A$, il campo A viene detto potenziale vettore di F. L'esempio classico di un campo che ammette potenziale vettore è costituito dal campo magnetico $\vec{B}$, o il campo di velocità di un fluido incomprimibile.

Una condizione necessaria affinchè un campo di calsse C^1 sia un rotore è che abbia divergenza nulla, ovvero che sia solenoidale. Si ha cioè che $F = \text{rot}\, A$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ implica $\operatorname{div} F = 0$ su D, dove si definisce $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ (si osservi che la divergenza è una quantità scalare). Tale risultato è conseguenza del teorema di Schwarz. La condizione non è in generale sufficiente: si prenda ad esempio $F = \frac{i_r}{r^2} = \frac{p}{|p|^3}$ il campo elettrostatico generato da una carica positiva puntiforme situata nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Tale campo è solenoidale nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, ma non è il rotore di alcun campo vettoriale, in quanto detta Σ la superficie sferica di centro l'origine e raggio $R > 0$ (Σ è una superficie chiusa) orientata dal versore radiale $i_r = \frac{p}{|p|}$, si ha

$$\iint_\Sigma \langle F, n\rangle da = \iint_\Sigma \langle \frac{i_r}{R^2}, i_r\rangle da = \frac{1}{R^2}\int_\Sigma da = 4\pi \neq 0.$$

La condizione $\operatorname{div} F = 0$ risulta sufficiente affinchè sia $F = \text{rot}\, A$ ad esempio su domini convessi. In realtà detta implicazione è vera su domini D che verificano certe ipotesi meno stringenti (in buona sostanza, se per ogni superficie chiusa S in D, si ha $S = \partial V$ con V interamente contenuto in D).

Se ω è la 2-forma differenziale associata ad $F = \text{rot}\, A$, e α è la 1-forma differenziale associata ad A, si ha $\omega = d\alpha$. Pertanto $\iint_\Sigma d\alpha = 0$ per ogni superficie chiusa Σ. Inoltre, se ω è la 2-forma associata ad un campo F, la 3-forma $d\omega$ è assoiata alla funzione scalare $\operatorname{div} F$: infatti, per la linearità di d possiamo supporre senza perdita di generalità $F = F_1 e_1$, ossia $\omega = F_1 dy \wedge dz$. Si ha dunque

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} F) dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Anche nel caso delle 2-forme si ha, per quanto visto sopra, che $\omega = d\alpha$ in D implica $d\omega = 0$ in D (ossia una 2-forma esatta è chiusa), ed il viceversa è vero ad esempio su domini convessi.

Lezione del 30/11/10 (1 ora). In generale, data una k-forma esatta di classe C^1 su un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, ossia $\omega = d\alpha$, con α una opportuna $(k-1)$-forma di classe C^2 su D, si ha che $d\omega = d(d\alpha) \equiv 0$ su D, ovvero ω è chiusa in D. Questo fatto discende direttamente dal Teorema di Schwarz sulle derivate seconde. Il viceversa non è vero in generale, vale però il Lemma di Poincaré: se ω è una k-forma chiusa (ossia $d\omega = 0$) di classe C^1 su $D \subset \mathbb{R}^n$, D aperto convesso, allora ω è esatta in D, ovvero esiste una $(k-1)$-forma α su D tale che $\omega = d\alpha$.

Teorema della divergenza (o di Gauss): sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un dominio con bordo ∂V costituito da una superficie chiusa di classe C^1 a tratti, orientata dalla normale esterna a V, e sia F un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto $A \supset V$. Si ha

$$\iint_{\partial V} \langle F, n\rangle da = \iiint \operatorname{div} F\, dxdydz\,.$$

Dimostrazione nel caso di domini V normali rispetto a tutti e tre gli assi coordinati: dimostriamo ad esempio che la formula è vera nel caso $F = (0, 0, F_3)$. Il caso generale segue per linearità. Possiamo descrivere V in forma normale rispetto all'asse z, ovvero $V = \{(x,y) \in R,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$, con $R \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $g_i : R \to \mathbb{R}$ di classe C^1 per $i = 1, 2$. Si ha, da una parte,

$$\iiint \operatorname{div} F \, dxdydz = \iint_R dxdy \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \right]$$
$$= \iint_R \left[F_3(x,y,g_2(x,y)) - F_3(x,y,g_1(x,y)) \right] dxdy.$$

D'altro canto, $\partial V = \Gamma_{g_2} \cup \Gamma_{g_1} \cup \Sigma$ con $\Sigma \subset \partial R \times \mathbb{R}$ un'eventuale superficie laterale a normale orizzontale. In particolare, $\iint_\Sigma \langle F_3 e_3, n \rangle da = 0$. Tenuto conto delle orientazioni di Γ_{g_2} (normale verso l'alto) e Γ_{g_1} (normale verso il basso), si ha inoltre

$$\iint_{\Gamma_{g_2}} \langle F_3 e_3, n \rangle da = \iint_R \langle (0, 0, F_3(x,y,g_2(x,y)), (-\frac{\partial g_2}{\partial x}, -\frac{\partial g_2}{\partial y}, 1) \rangle \, dxdy$$
$$= \iint_R F_3(x,y,g_2(x,y)) \, dxdy \,,$$

e

$$\iint_{\Gamma_{g_1}} \langle F_3 e_3, n \rangle da = \iint_R \langle (0, 0, F_3(x,y,g_1(x,y)), (\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, -1) \rangle \, dxdy$$
$$= -\iint_R F_3(x,y,g_1(x,y)) \, dxdy \,.$$

La somma dei flussi è pertanto uguale all'integrale triplo della divergenza di F su V.

Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ è, così come il teorema di Stokes per superfici in $\mathbb{R}^3$, o il teorema di Gauss-Green nel piano, una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo. A livello di forme differenziali, si tratta di casi particolari del teorema di Stokes per forme: data $S \subset D \subset \mathbb{R}^n$ una k-superficie di classe C^1 con bordo ∂S di classe C^1 a tratti contenuta in un dominio D di $\mathbb{R}^n$, immagine di una parametrizzazione regolare sino al bordo $T : R \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, con R un rettangolo (prodotto di intervalli) in $\mathbb{R}^k$ (detta parametrizzazione prescrive simultaneamente l'orientazione di S e di ∂S), e data ω una $(k-1)$-forma su D di classe C^1, si ha

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \,.$$