TUTORAGGIO ANALISI II

a. a. 2012/2013

dott. ssa Sconcella

LEZIONE DEL 23/1/2013

ESERCIZIO 1

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2}\,\underline{i} + \frac{3y}{x^2+y^2}\,\underline{j} + \underline{k}$$

attraverso la superficie S parametrizzata tramite $r: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$r(u,v) = u\cos(v)\,\underline{i} + u\sin(v)\,\underline{j} + u^2\underline{k} \qquad u\in[0,\tfrac{1}{2}],\ v\in[0,2\pi]$$

orientata in modo che il versore normale punti verso il basso.

SOLUZIONE

Per calcolare il flusso dobbiamo ricorrere alla definizione:

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_A F(r(u,v))\cdot(\partial_u r \wedge \partial_v r)\,du\,dv$$

Pertanto dobbiamo calcolare

$$\partial_u r(u,v) = \cos(v)\,\underline{i} + \sin(v)\,\underline{j} + 2u\,\underline{k}$$

$$\partial_v r(u,v) = -u\sin(v)\,\underline{i} + u\cos(v)\,\underline{j}$$

mentre

$$\partial_u r \wedge \partial_v r = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos(v) & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -2u^2\cos v\,\underline{i} - 2u^2\sin v\,\underline{j} + u\,\underline{k} = (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)$$

il vettore trovato punta verso l'esterno perché la terza componente è positiva. Ma il testo dell'esercizio ci richiedeva che la normale puntasse verso il basso. quando andremo a calcolare il flusso dobbiamo cambiare di segno al risultato.

Quindi

$$\Phi = -\int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{2u\cos(v)}{u^2}\,\underline{i} + \frac{3u\sin v}{u^2}\,\underline{j} + \underline{k} \right)\cdot\left(-2u^2\cos v\,\underline{i} - 2u^2\sin v\,\underline{j} + u\,\underline{k}\right) dv\,du$$

$$= -\int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \left(-4u\cos^2(v) - 6u\sin^2 v + u\right) dv\,du$$

$$= -\int_0^{1/2} \left(-4\pi u - 6\pi u + 2\pi u\right) du$$

$$= -\left(-4\pi \frac{u^2}{2}\Big|_0^{1/2} - 6\pi\frac{u^2}{2}\Big|_0^{1/2} + 2\pi\frac{u^2}{2}\Big|_0^{1/2}\right) = -\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

ESERCIZIO 2

Calcolare il flusso del rotore del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy,\ xy,\ 0)$$

attraverso la regione piana $S = S_1 \cup S_2$ con

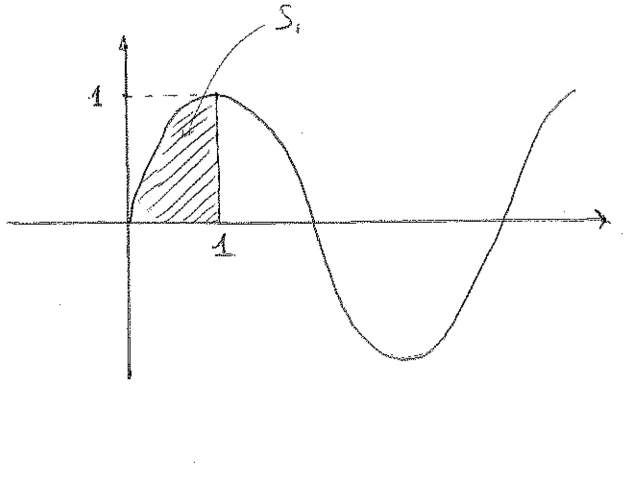
$$S_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le \sqrt{2},\ 0\le y\le \sqrt{2-x^2}\right\}$$

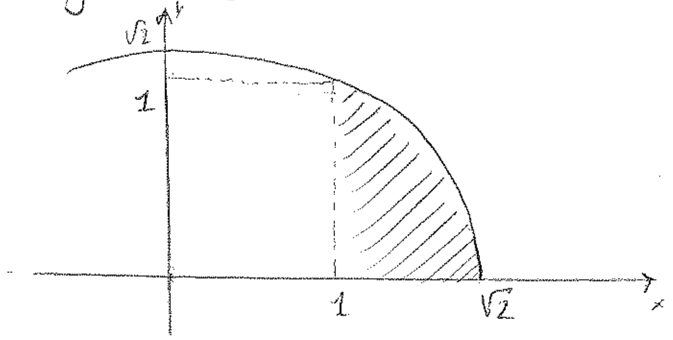
orientata con normale verso l'alto.

SVOLGIMENTO

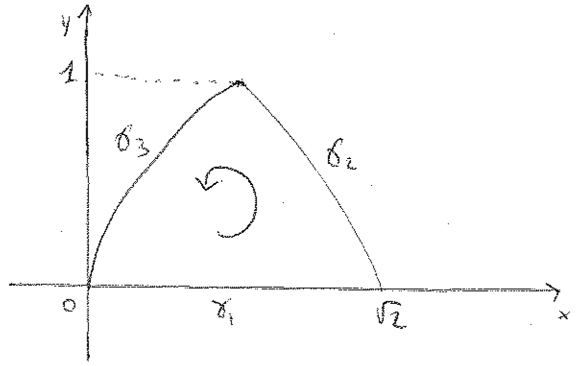
Andiamo a disegnare S_1, si ha che quando $x=1$ allora $y=\sin(\pi/2)$. Quindi otteniamo il seguente grafico



Andiamo a disegnare S_2



quindi $S_1 \cup S_2$ è dato da



La normale deve essere rivolta verso l'alto. Quindi è uscente dal foglio. Pertanto in base alla regola della mano destra l'orientamento del bordo è il verso antiorario.

Applichiamo il teorema di Stokes:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

Andiamo a parametrizzare le tre curve:

$\gamma_1(t) = t(\sqrt{2},0,0)+(1-t)(0,0,0)=(\sqrt{2}t, 0, 0)$ con $t(0,1)$ $\quad \dot{\gamma}_1(t) = (\sqrt{2},0,0)$

$\gamma_2(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 0)$ con $t(0, \pi/4)$ $\quad \dot{\gamma}_2(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)$

$\gamma_3(t) = (t, \sin(\frac{\pi}{2}t), 0)$ con $t \in (0,1)$ $\quad \dot{\gamma}_3(t) = (1, \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t), 0)$

↳ quando andremo a calcolare dobbiamo mettere un segno − davanti all'integrale in quanto questa parametrizzazione non ha verso concorde.

Quindi

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 - \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\gamma_3$$

Calcoliamo il primo integrale

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_2 = \int_0^1 0\, dt = 0$$

Andiamo a calcolare il secondo integrale:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\gamma_2 = \int_0^{\pi/4} (2\cos t\cdot\sin t,\ 2\cos t\cdot\sin t,\ 0)\cdot(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(-2\sqrt{2}\cos t\cdot\sin^2 t + 2\sqrt{2}\sin t\cos^2 t\right) dt$$

$y = \sin t \quad dy = \cos t\, dt \qquad z = \cos t \quad dz = -\sin t\, dt$

$$= -2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} y^2\, dy - 2\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}/2} z^2\, dz$$

$$= -2\sqrt{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} - 2\sqrt{2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}/2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot 1 = -\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Andiamo a calcolare il terzo integrale

$$\int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\gamma_3 = \int_0^1 \left(t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),\ t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),\ 0\right)\cdot\left(1, \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), 0\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t\cdot\frac{1}{2}\sin(\pi t)\, dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot t\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt - \frac{1}{4}\cos(\pi t)\cdot t\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \cos(\pi t)\, dt$$

$$= 0 + \frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sin(\pi t)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4}$$

quindi in definitiva

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot T\, ds = -\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{11}{12}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare il flusso del campo vettoriale $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = (y, x, z^3)$$

attraverso la superficie sferica S di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 orientata con normale uscente.

SVOLGIMENTO

Applichiamo il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial S} \vec{F} \cdot \hat{n}_e \, dS = \iiint_S \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$

Calcoliamo la divergenza

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + 3z^2 = 3z^2$$

Essendo la superficie una sfera, andremo calcolare il flusso attraverso il primo ottante ed infine moltiplicheremo il risultato per 8, cioè

$$\iiint_S \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz = 8 \iiint_{\tilde{S}} \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

dove $\tilde{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Passiamo alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ z = \rho \cos(\varphi) & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad dV = \rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi$$

$y = \cos\varphi$
$dy = -\sin\varphi\, d\varphi$

Quindi

$$\text{Flusso} = 8 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 3\rho^2 \cos^2(\varphi) \cdot \rho^2 \sin(\varphi)\, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho = 24 \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= 24 \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^0 -y^2 dy = 24 \cdot \frac{2^5}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 y^2 dy = \frac{12\pi}{5} \cdot 2^5 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2^6}{15}\pi = 4\pi \cdot \frac{32}{5}$$

ESERCIZIO 4

Calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$$

dove $F=(x^2,1,z)$ ed S è il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ ed $\hat{n}$ è la normale tale che $\vec{n}\cdot\vec{i}>0$ (cioè 3° componente positiva).

SVOLGIMENTO

Andiamo a calcolare il $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ si ha

$$\mathrm{rot}\,F=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & 1 & z \end{vmatrix} = \left(\partial_y(z)-\partial_z(1)\right)\underline{i}-\left(\partial_x(z)-\partial_z(x^2)\right)\underline{j}+\left(\partial_x(1)-\partial_y(x^2)\right)\underline{k}$$

$$=0+0+0=(0,0,0)$$

quindi $\iint_S (0,0,0)\cdot\hat{n}\,ds=0$

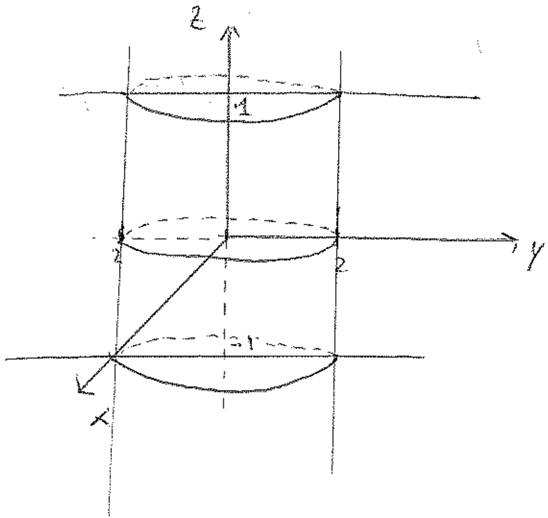
ESERCIZIO 5

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z^4)$$

attraverso la superficie S del cilindro circolare di equazione $x^2+y^2=4$, delimitato dai piani $z=-1$ e $z=1$, dove S ha normale uscente.

SVOLGIMENTO



Applichiamo il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial S} \vec{F} \cdot \hat{n}_e \, ds = \iiint_S \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx\,dy\,dz$$

Calcoliamo la divergenza

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 4z^3 = 2 + 4z^3$$

La superficie S è

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, \; x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

passiamo in coordinate cilindriche. Si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta & \rho \in [0, 2] \\ y = \rho \sin \vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in [-1, 1] \end{cases} \qquad dV = \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz$$

quindi il flusso diventa

$$\Phi = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} (2 + 4z^3) \rho \, dz \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_0^2 8\pi \rho \, d\rho = 8\pi \cdot \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^2 = 16\pi$$