Foglio 5

31 ottobre 2013

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Sia $L : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ l'applicazione definita da

$$L \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Verificare che L è una applicazione lineare
2. Trovare una base del nucleo di L e dell'immagine di L.

Esercizio 2 (Punti 4)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5, e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base di V. Sia V_1 il sottospazio generato dai vettori $\{v_1, v_2\}$ e V_2 il sottospazio generato da $\{v_3, v_4, v_5\}$. Si dimostri che $V = V_1 \oplus V_2$. Si trovino le dimensioni di V_1 e V_2.

Esercizio 3 (Punti 6)**.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $[x \quad y \quad z \quad t]^T \longmapsto [x + 2y - z + t \quad y - x + 2z \quad x - z - t]^T$.

1. Provare che f è un'applicazione lineare.
2. Determinare base e dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
3. $v = [1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]^T$ è un elemento del nucleo di f?
4. $w = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ è un elemento dell'immagine di f?
5. Trovare tutti gli elementi $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = [1 \quad -1 \quad -1]^T$

Esercizio 4 (Punti 3)**.** Sia $\mathbb{C}[x]_{<4}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dei polinomi a coefficienti complessi di grado < 4. Sia $D : \mathbb{C}[x]_{<4} \to \mathbb{C}[x]_{<4}$ definita da $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$.

1. Verificare che D è lineare
2. D è iniettiva? È suriettiva?

Esercizio 5 (Punti 5)**.** Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

1. Si verifichi che $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Di che dimensione? Se ne determini una base.
2. Qual'è la dimensione di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$? Se ne determini una base.
3. La funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $a + ib \longmapsto a - ib$ è un'applicazione lineare tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali? È una applicazione lineare tra $\mathbb{C}$-spazi vettoriali?
4. Si trovi una applicazione lineare biettiva tra gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6 (Punti 6)**.** Sia V l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali.

1. Dimostrare che l'insieme S delle matrici simmetriche $n \times n$ è un sottospazio di V di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Trovare un sottospazio T di V tale che $V = T \oplus S$. Determinare una base e la dimensione di T.