Università degli Studi di Verona
CL in Matematica Applicata
Algebra

Anno Accademico 2016-2017

Foglio di Esercizi n°10 - 21/12/2016

(Da consegnare il giorno 11/01/2017)

Esercizio 1

Sia $n \geq 3$ un numero intero e denotiamo con D_n il gruppo formato dalle isometrie del piano che lasciano immutati i poligoni regolari di n lati.

1) (*4 punti*) Dimostrare che D_n ha $2n$ elementi e che D_n è generato da una riflessione e una rotazione di angolo $2\pi/n$.

Consideriamo il sottogruppo H di S_4 generato dagli elementi (1234) e (12)(34).

2) (*3 punti*) Elencare tutti gli elementi di H.

3) (*4 punti*) Dimostrare che H è isomorfo a D_4.

Esercizio 2

Sia $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

1) (*3 punti*) Determinare il campo di riducibilità completa E del polinomio f su $\mathbb{Q}$ e il grado dell'estensione $\mathbb{Q} \subset E$.

2) (*3 punti*) Scrivere gli elementi di $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ come permutazioni delle radici di f.

3) (*3 punti*) Descrivere i sottocampi di E, specificando quali sono estensione normale di $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3

(*10 punti*) Sia F un campo e sia p un numero primo diverso dalla caratteristica di F. Sia a un elemento non nullo di F e supponiamo che a non sia una potenza p-esima di alcun elemento di F. Consideriamo il campo di spezzamento $E = F(\alpha, \zeta)$ del polinomio $x^p - a$ su F, dove $\alpha^p = a$ e ζ è una radice primitiva p-esima dell'unità. Dimostrare che $F \subset F(\alpha)$ è normale se e solo se $\zeta \in F$.