Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2011/12
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra

8 febbraio 2012

1. (a) Si dia la definizione di estensione normale.
   (b) Data un'estensione di campi $K \subset F$, si dia una condizione equivalente al fatto che $K \subset F$ è normale.
   (c) Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ è un'estensione normale per qualsiasi numero primo p.
   (d) Si dia un esempio di estensione non normale.

   (*10 punti*)

2. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^3 - 7$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Si determini una $\mathbb{Q}$-base di F e si verifichi che $\mathbb{Q} \subset F$ è un'estensione di Galois con gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong S_3$. (*3 punti*)
   (b) Si determinino tutti gli elementi di G. (*3 punti*)
   (c) Si determinino tutti i sottogruppi di G e tutti i campi intermedi $\mathbb{Q} \subset L \subset F$. (*6 punti*)
   (d) Si decida se $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ è un'estensione di Galois. (*2 punti*)

3. Si dimostri:
   (a) Se $f \in \mathbb{Q}[x]$ è un polinomio irriducibile di grado 3 con un unico zero reale, allora $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong S_3$.
   (b) Se f è un polinomio irriducibile di grado $d > 0$ su un campo finito K, allora il campo di riducibilità completa di f su K è isomorfo a $K[x]/(f)$.

   (*6 punti*)

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2011/12
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

22 febbraio 2012

1. (a) Si definisca quando un'estensione di campi $K \subset F$ è detta estensione per radicali.

   (b) Dato un polinomio non costante $f \in K[x]$ su un campo K, si definisca quando l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile per radicali su K.

   (c) Si enunci il Teorema di Galois, ovvero si dia una condizione equivalente al fatto che l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile per radicali su K.

   (d) Si dia un esempio di un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ di grado 5 per il quale l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile per radicali su $\mathbb{Q}$.

   (*10 punti*)

2. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^4 - 9$ su $\mathbb{Q}$.

   (a) Si verifichi che $\mathbb{Q} \subset F$ è un'estensione di Galois e si trovi una $\mathbb{Q}$-base di F. (*3 punti*)

   (b) Si determinino tutti gli elementi del gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ e si verifichi che G è isomorfo al gruppo di Klein. (*3 punti*)

   (c) Si determinino tutti i sottogruppi di G e tutti i campi intermedi $\mathbb{Q} \subset L \subset F$. (*4 punti*)

   (d) Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset L$ è un'estensione di Galois per ogni campo intermedio $\mathbb{Q} \subset L \subset F$. (*2 punti*)

   (e) Si determini $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$. (*2 punti*)

3. Si decida (motivando la risposta!) se sono veri o falsi i seguenti enunciati.

   (a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x^2 + 1) \cong GF(16)$.

   (b) Se f è un polinomio irriducibile di grado $d > 0$ su $K = GF(p^n)$, allora il campo di riducibilità completa di f su K è isomorfo a $GF(p^{nd})$.

   (*6 punti*)