Ricevimento del 2 Febbraio 2011

Davide Boscaini

Queste sono le note del ricevimento del 2 Febbraio. Ho scelto di scrivere queste poche pagine per una maggior chiarezza e per chi non fosse stato presente al ricevimento. Invito chi trovasse alcuni errori a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1. Calcolare le primitive del seguente integrale

$$I = \int \frac{\sqrt{3+\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$$

Soluzione. Per quanto riguarda l'integrale assegnato, per poter calcolarne le primitive, il metodo che scegliamo è quello della sostituzione. Dopo vari tentativi si trova che una sostituzione corretta è la seguente:

$$t = 3 + \tan x.$$

In tal caso si ha

$$t' = \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(3+\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

da cui

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Notiamo che nell'integrale assegnato compare il termine $1/\cos^2 x$, quindi, effettuata la sostituzione appena descritta, si arriva a

$$I = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Di quest'ultimo integrale conosciamo le primitive, che sono

$$\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}} + c,$$

sostituendo quindi a t la corrispettiva espressione in x, si ottiene la soluzione cercata:

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{(3+\tan x)^3} + c.$$

Esercizio 2. Calcolare le primitive del seguente integrale

$$I = \int \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

Soluzione. Anche questo integrale proviamo a risolverlo con il metodo della sostituzione. In particolare, grazie alla formula di duplicazione del seno (che si *deve* sapere), si ha

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Nel nostro caso evidentemente $\alpha = x/2$, quindi possiamo riscrivere il denominatore come $2\sin(x/2)\cos(x/2)$. L'integrale assegnato si riduce quindi a

$$I = \int \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin(x/2)\cos(x/2)}\,dx.$$

Vogliamo ora spezzare l'integranda in una somma di frazioni più semplici, di cui possibilmente conosciamo le primitive. Per far ciò poniamo

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{f(x)}{\sin(x/2)} + \frac{g(x)}{\cos(x/2)}\,dx,$$

cioè

$$\frac{f(x)\cos(x/2) + g(x)\sin(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)\cos(x/2)},$$

da cui si ricava $f(x) = \cos(x/2)$ e $g(x) = \sin(x/2)$. Ora, per evitare di portarci dietro ulteriormente il termine $x/2$, operiamo la sostituzione $t = x/2$, facendo attenzione al fatto che $dt = dx/2$. Si ottiene

$$I = \int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} + \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\,\frac{dx}{2} = \int \frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t}\,dt.$$

Ecco quindi che, per la proprietà di *linearità* dell'integrale, possiamo ridurre l'integrale da cui siamo partiti a

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt + \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt - \int \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt \\ &= \log|\sin t| - \log|\cos t| + c = \log\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| + c, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla ben nota proprietà del logaritmo

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

Sostituendo quindi a t la corrispettiva espressione in x, si ottiene la soluzione cercata:

$$I = \log\left|\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right| + c = \log\big|\tan(x/2)\big| + c.$$

Esercizio 3. Calcolare le primitive del seguente integrale

$$I = \int \frac{1}{\cos x}\,dx.$$

Soluzione. Per risolvere questo esercizio sono possibili *almeno* due strade:

- se si conoscono le primitive di
$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx,$$
allora, dalla considerazione che $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, detto $t = \pi/2 - x$, si ha $dt = -dx$ e quindi
$$I = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin(\pi/2 - x)}dx = -\int \frac{1}{\sin t}dt.$$

Come visto nel precedente esercizio, le primitive dell'ultimo integrale sono

$$\log\big|\tan(t/2)\big| + c = \log\big|\tan(\pi/4 + x/2)\big| + c,$$

quindi, ricordandosi della sostituzione fatta, si conclude che

$$I = -\log\big|\tan(\pi/4 + x/2)\big| + c.$$

Infine, ricordando le formule di addizione del seno e coseno

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

si può riscrivere la soluzione nella forma alternativa

$$\begin{aligned}I &= -\log\left|\frac{\sin(\pi/4)\cos(x/2) + \cos(\pi/4)\sin(x/2)}{\cos(\pi/4)\cos(x/2) - \sin(\pi/4)\sin(x/2)}\right| + c\\ &= -\log\left|\frac{\sqrt{2}/2\ \cos(x/2) + \sqrt{2}/2\ \sin(x/2)}{\sqrt{2}/2\ \cos(x/2) - \sqrt{2}/2\ \sin(x/2)}\right| + c\\ &= -\log\left|\frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)}\right| + c.\end{aligned}$$

- se invece non si conoscono le primitive dell'integrale del precedente esercizio, dobbiamo procedere con il metodo della sostituzione. In particolare, grazie alla formula di duplicazione del coseno, si ha

  $$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

  Se non si ricorda la formula precedente, la si può ricavare a partire dall'identità fondamentale

  $$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$$

  Scelto infatti $\beta = 2\alpha$, si ottiene

  $$\begin{aligned}\cos^2(2\alpha) = 1 - \sin^2(2\alpha) &= 1 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2\\ &= 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 4\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)\\ &= 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha = (1 - 2\sin^2\alpha)^2,\end{aligned}$$

  che è l'identità cercata. Nell'integrale assegnato si ha $\alpha = x/2$, quindi

  $$I = \int \frac{1}{1 - 2\sin^2(x/2)}\,dx.$$

  Grazie alla sostituzione $t = x/2$, $dt = dx/2$, possiamo scrivere

  $$I = 2\int \frac{1}{1 - 2\sin^2 t}\,dt = 2\int \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin^2 t}\,dt = 2\int \frac{1}{\cos^2 t - \sin^2 t}\,dt.$$

  Dividendo ora per $\cos^2 t$ sia in numeratore che il denominatore dell'integranda si ha

  $$I = 2\int \frac{1/\cos^2 t}{1 - \sin^2 t/\cos^2 t}\,dt = 2\int \frac{1}{1 - \tan^2 t}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt.$$

Sia ora $u = \tan t$, quindi $du = dt/\cos^2 t$ e

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{1}{1-u^2}\,du = 2\int \frac{1}{(1+u)(1-u)}\,du \\
&= 2\int \frac{1/2}{1+u} + \frac{1/2}{1-u}\,du = \int \frac{1}{1+u} - \frac{-1}{1-u}\,du \\
&= \log|1+u| - \log|1-u| + c = \log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c.
\end{aligned}
$$

Sostituendo quindi prima a u la corrispettiva espressione in t, e poi a t la corrispettiva espressione in x, si ottiene la soluzione cercata:

$$
I = \log\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| + c = \log\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right| + c.
$$

Esercizio 4 (non visto a lezione)**.** Studiare l'andamento della seguente funzione

$$
f(x) = \log(2e^x + |x|) - 1
$$

aiutandosi con il metodo del confronto grafico e tracciarne il grafico.

Soluzione.

1. Dominio: il logaritmo è ben definito se il suo argomento è strettamente positivo, cioè se $2e^x + |x| > 0$. Dal momento che sia la funzione esponenziale, sia la funzione valore assoluto sono definite positive per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha quindi che il dominio è costituito da tutto l'asse reale.

2. Intersezione con gli assi cartesiani: per quanto riguarda l'intersezione con gli assi cartesiani cominciamo con l'asse delle ordinate. Il sistema

$$
\begin{cases} y = \log(2e^x + |x|) - 1, \\ x = 0, \end{cases}
$$

ha soluzione $y = \log 2 - 1$, quindi f interseca l'asse y nel punto $A = (0, \log 2 - 1)$. Se invece consideriamo l'asse delle ascisse abbiamo che il sistema

$$
\begin{cases} y = \log(2e^x + |x|) - 1, \\ y = 0, \end{cases}
$$

porta all'equazione $\log(2e^x + |x|) = 1$. Applicando ad ambo i membri la funzione esponenziale otteniamo $2e^x + |x| = e$, cioè $2e^x = e - |x|$. Per poter capire quali sono le soluzioni di questa equazione dobbiamo ricorrere al metodo del confronto grafico, grazie al quale, com'è possibile vedere in figura 1, si individuano come soluzioni del sistema i due punti $(x_B, 0)$ e $(x_C, 0)$. Tramite delle stime grossolane si capisce che $-e < x_B < 0$ e $0 < x_C < e$ e, con qualche sforzo in più, si arriva anche alla stima $|x_B| > |x_C|$.

3. Segno: ci chiediamo per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $\log(2e^x+|x|)-1 > 0$, cioè $\log(2e^x+|x|) > 1$. Elevando ambo i membri per la funzione esponenziale si arriva alla condizione $2e^x + |x| > e$ e aiutandosi ancora una volta con la figura 1 si capisce che la soluzione è $x < x_B \cup x > x_C$. Le informazioni qui ottenute si sono riportate in figura 2.

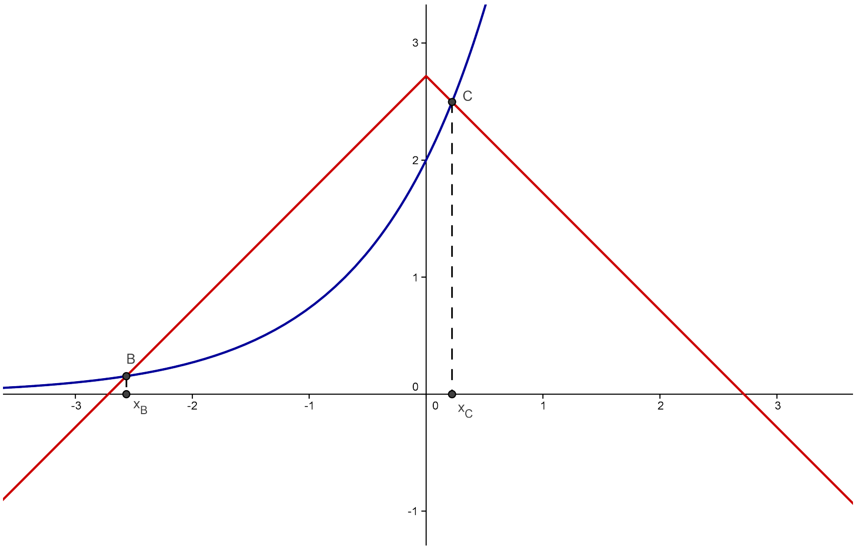

Figura 1: Confronto grafico per individuare i punti di intersezione con l'asse delle ascisse. In rosso si è rappresentata la funzione $e - |x|$, in blu la funzione $2e^x$.

4. Limiti: dal momento che non ci sono punti in cui la funzione non esiste, gli unici limiti che dobbiamo calcolare sono quelli asintotici:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(2e^x + |x|) - 1 = -1 + \lim_{x\to+\infty} \log(2e^x + |x|) = +\infty \quad \text{(andamento lineare)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \log(2e^x + |x|) - 1 \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} \log(0 + \infty) - 1 = +\infty \quad \text{(andamento logaritmico)}$$

Dal momento che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, ci chiediamo se esistono degli asintoti obliqui, ovvero se esistono finiti i limiti

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx.$$

In particolare per $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2e^x + |x|) - 1}{x} &\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x + \operatorname{sign} x}{2e^x + |x|} \Big/ 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{2e^x + |x|} + \frac{\operatorname{sign} x}{2e^x + |x|} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + |x|/2e^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^x + |x|} = 1 =: m,\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che, se $x \to +\infty$, allora sicuramente $x > 0$, cioè $\operatorname{sign} x = 1$ e nella prima uguaglianza abbiamo applicato la *regola di de l'Hopital*. Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \log(2e^x + |x|) - 1 - 1x &= -1 + \lim_{x\to+\infty} \log(2e^x + |x|) - \log e^x \\ &= -1 + \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{2e^x + |x|}{e^x}\right) \\ &= -1 + \lim_{x\to+\infty} \log\left(2 + \frac{x}{e^x}\right) \\ &= \log 2 - 1 =: q,\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che, al crescere di x, $|x| = x$ e che $x/e^x \to 0$ per $x \to +\infty$. Quindi esiste l'asintoto obliquo ed ha equazione $y = x + \log 2 - 1$.

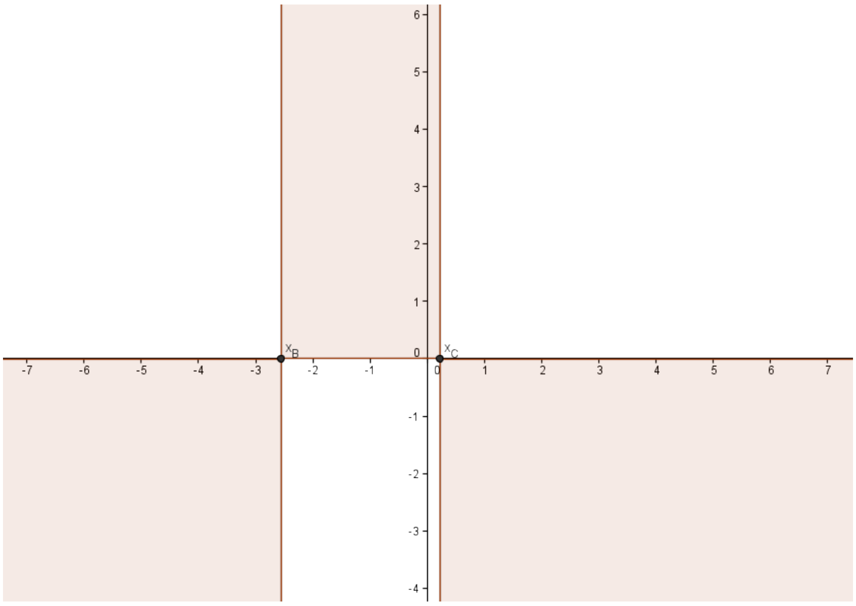

Figura 2: La parte in bianco rappresenta la regione di piano cartesiano “occupata” dalla funzione assegnata.

Mentre per $x \to -\infty$ si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(2e^x + |x|) - 1}{x} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\log(0+\infty) - 1}{-\infty} = -\frac{+\infty}{+\infty} = 0,$$

perché x va a $+\infty$ più velocemente di $\log x$, ma m non può essere nullo, quindi per la semiretta negativa dell'asse delle ascisse, non esiste l'asintoto obliquo.

5. Derivata prima: sia $x \neq 0$, allora

$$f'(x) = \frac{2e^x + \operatorname{sign} x}{2e^x + |x|}.$$

6. Crescenza/decrescenza: chiedersi quando $f'(x) > 0$ si riduce a chiedersi quando il numeratore della derivata prima $2e^x + \operatorname{sign} x > 0$, infatti il denominatore $2e^x + |x|$ è sempre positivo. Ora se $x > 0$, allora $2e^x + \operatorname{sign} x = 2e^x + 1$ che è una quantità sempre positiva. Viceversa se $x < 0$, allora la condizione $2e^x + \operatorname{sign} x > 0$ diventa $2e^x - 1 < 0$, la cui soluzione è $x > \log(1/2)$. Di conseguenza la funzione è decrescente per $x \leq \log(1/2)$, crescente per $x > \log(1/2)$.

7. Punti stazionari: dalla discussione appena fatta è evidente che il punto della funzione di ascissa $\log(1/2)$ è un punto di minimo assoluto, infatti la funzione prima di quel punto continua a decrescere e subito dopo è crescente. In particolare visto che $\log(1/2) \approxeq -7/10$ e che

$$f(\log(1/2)) = \log\left(2e^{\log(1/2)} + |\log(1/2)|\right) - 1 = \log\left(2\frac{1}{2} - \log(1/2)\right) - 1$$
$$= \log(1 - \log(1/2)) - 1 \approxeq -\frac{1}{2},$$

il di minimo assoluto di f è circa $(-7/10, -1/2)$.

8. Punti angolosi/cuspidi: la derivata prima è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, questo vuol dire che in $x = 0$ la funzione non è derivabile. Ricordando che una funzione non è derivabile in un certo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

Se questi due limiti poi esistono finiti, allora si dice che x_0 è un *punto angoloso*, se invece i due limiti divergono ad infinito (ovviamente di segno diverso) si parla di *cuspide*.

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2e^x + \operatorname{sign} x}{2e^x + |x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2e^x - 1}{2e^x + |x|} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^x + \operatorname{sign} x}{2e^x + |x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^x + 1}{2e^x + |x|} = \frac{3}{2}.$$

Quindi $f'(0^-) = 1/2 \neq 3/2 = f'(0^+)$ e $1/2, 3/2 < \infty$, di conseguenza in $x = 0$ f ha un punto angoloso (vedi figura 3).

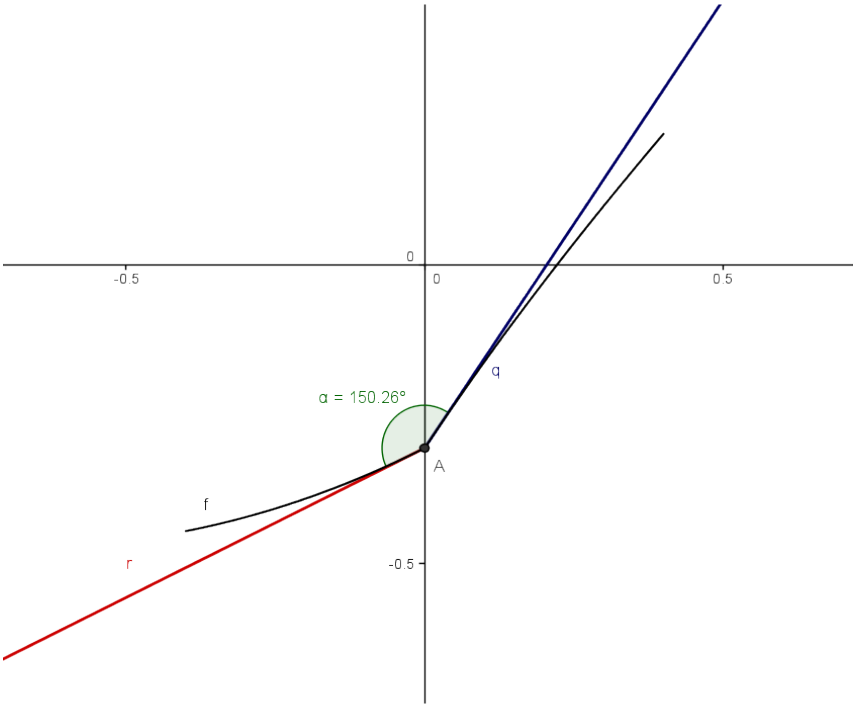

Figura 3: Particolare del punto angoloso di f in $x = 0$. La retta rossa ha pendenza $f'(0^-) = 1/2$, quella blu $f'(0^+) = 3/2$, come precedentemente calcolato.

9. Derivata seconda: Sia $x \neq 0$, allora

$$f''(x) = \frac{2e^x(2e^x + |x|) - (2e^x + \operatorname{sign} x)(2e^x + \operatorname{sign} x)}{(2e^x + |x|)^2} = \frac{4e^{2x} + 2|x|e^x - (2e^x + \operatorname{sign} x)^2}{(2e^x + |x|)^2}$$
$$= \frac{2|x|e^x - \operatorname{sign}^2 x - 4e^{2x} \operatorname{sign} x}{(2e^x + |x|)^2} = \frac{2e^x(|x| - 2 \operatorname{sign} x) - 1}{(2e^x + |x|)^2}.$$

10. Convessità/concavità: visto che il denominatore è sempre positivo, la condizione di convessità $f''(x) > 0$, si riduce a

$$2|x|e^x - 4e^x \operatorname{sign} x - 1 > 0.$$

Ora, se $x > 0$, possiamo semplificare ulteriormente la condizione in $2xe^x - 4e^x - 1 > 0$. Dopo alcuni semplici calcoli si arriva alla disequazione $2e^x > 1/(x-2)$, che, per poter essere risolta, richiede il metodo grafico. Come si vede in figura 4, limitatamente alla semiretta positiva, la funzione è convessa per $x > x_D$, con $x_D > 2$.

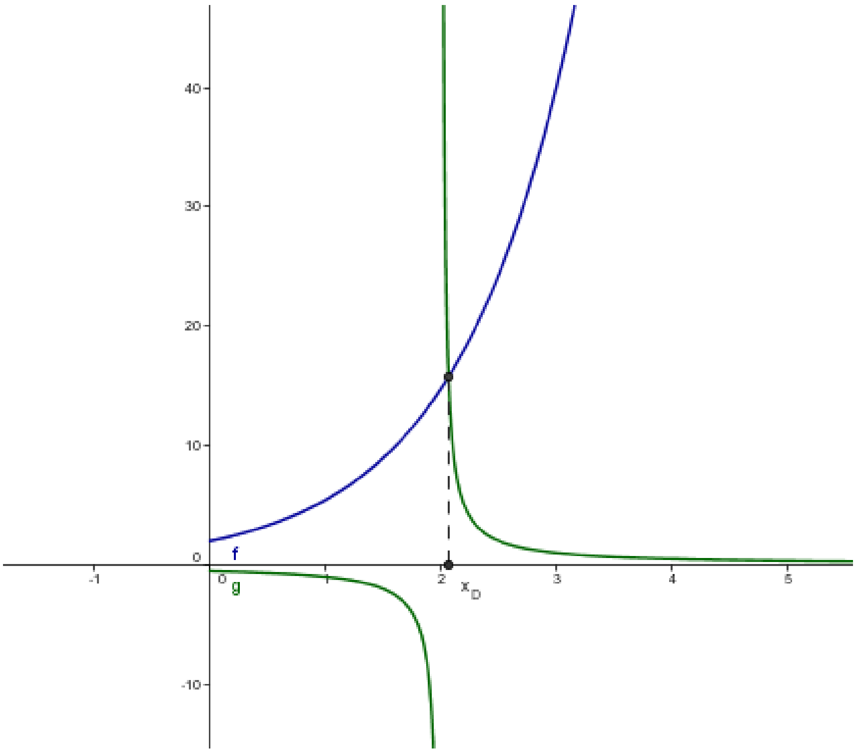

Figura 4: Confronto grafico per lo studio della convessità della funzione f per $x > 0$.

Se invece $x < 0$, allora la funzione è convessa per quelle x tali che $-2xe^x + 4e^x - 1 > 0$, cioè $2e^x > -1/(x-2)$. Ancora una volta si ricorre al metodo grafico di figura 5, grazie al quale si trova che, per le x negative, la soluzione è convessa se $x < x_E$, con $x_E < 0$.

Unendo infine le informazioni qui trovate si trova che f è convessa per $x < x_E \cup x > x_D$ e quindi concava per $x_E < x < x_D$.

11. Punti di flesso: dalla discussione appena fatta appare evidente che i punti di flesso di f sono in corrispondenza di x_E ed x_D.

12. Grafico definitivo: tenendo conto di tutte le cose viste il grafico definitivo della funzione è quello di figura 6.

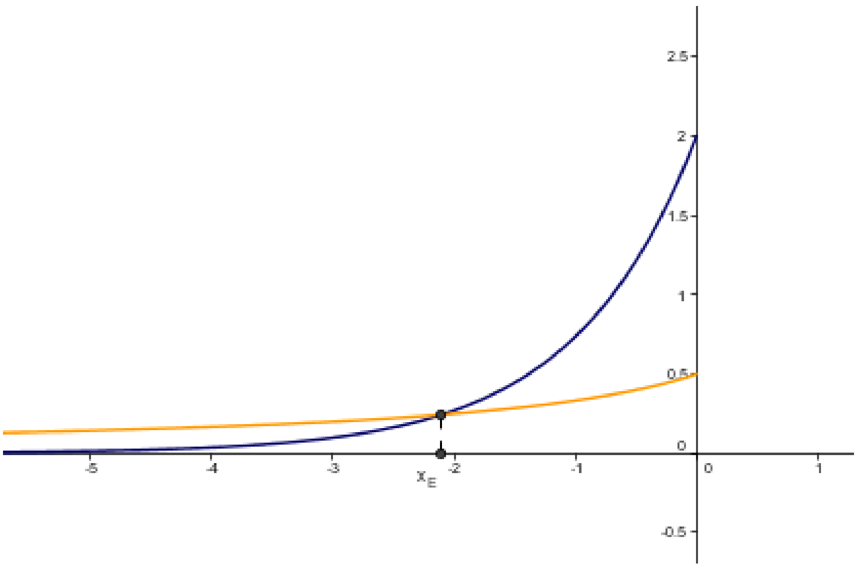

Figura 5: Confronto grafico per lo studio della convessità della funzione f per $x < 0$.

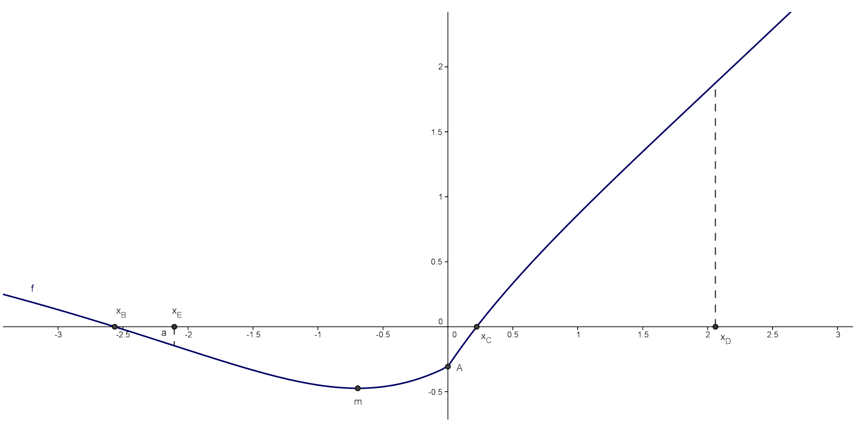

Figura 6: Andamento della funzione assegnata.