TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE - Prof. M. Spera

Lezione II   Lecture II

Omomorfismo duale

Richiamo:

Sia $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ $\dim V = n$, $\dim W = m$

- omomorfismi
- applicazioni lineari
- trasformazioni lineari
- operatori lineari

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T v_1 + \beta T v_2$$

Se $e = (e_1 \ldots e_n)$ base di V

$f = (f_1 \ldots f_m)$ " " W

posso formare $m_{fe}(T) = (t_{ik})$

matrix

* matrice $m \times n$ dell'applicazione T rispetto alle basi scelte

ove $Te_k = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} f_i$

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{\quad\cdots\quad t_{ik}\quad\cdots\quad}}^{n \text{ colonne}} \\ m \text{ righe} & \begin{pmatrix} & & \\ & t_{ik} & \\ & & \end{pmatrix} \leftarrow i \end{array}$$

Te_k

ora, i

$$\boxed{t_{ik} = f_i^{*}(Te_k)} \quad (\lozenge)$$

vettore i-esimo della base duale di f

(chiaro...) : Questa semplice osservazione tornerà utile tra un momento

Costruiamo $\underset{\substack{\text{omomorfismo}\\ \text{duale, o}\\ \text{trasposto,}\\ \text{o aggiunto}}}{T'} \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ notare...

$T : V \to W$

$T' : W^* \to V^*$

$$\boxed{\underbrace{(T'l)}_{\in V^*}(v) := l(Tv)}$$

$T'l \in W^*$ ... $l \in W^*$, $v \in V$, $Tv \in W$

una sua qualsiasi rappresentazione matriciale sarà di tipo $n \times m$. Precisamente, si ha; dette $e^* = (e_1^* \dots e_n^*)$, $f^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$ le basi duali di e ed f, risp.

$$\boxed{m_{e^* f^*}(T') = m_{fe}(T)^t}$$

base finale base iniziale

$[x^{**}(y^*) = y^*(x)]$

Dim. $[m_{e^*f^*}(T')]_{ik} \underset{(\diamond)}{=} e_i^{**}(T'f_k^*) =$

$= (T'f_k^*)(e_i) =$

$= f_k^*(Te_i) = t_{ki} \Rightarrow$ l'asserto

Esercizio: Dato $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

basi canoniche... identifichiamo "tout court" operatore e matrice

mostrare che $T' = T^t$ a partire dalla def.

Sol. $T': \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

ℓ (forma lineare) $\ell: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$

(x, y, z) (riga)

$$(T'\ell)\overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} := \ell(Te_1) = (x \; y \; z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= x + 2y$$

$$(T'\ell)\overset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} := \ell(Te_2) = (x \; y \; z)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= x + 4y + 5z$$

$$(x, y, z) \overset{T'}{\longmapsto} (x + 2y, \; x + 4y + 5z)$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$T^t$$

★ Leggi di trasformazione (covarianza vs contravarianza)

(I) Sia $T \in GL(\bar{V})$ $\qquad T: V \to \bar{V}$

invertible endomorphisms

endomorfismi invertibili =

general linear group

gruppo lineare generale associato a $\bar{V}$

$S: V \to \bar{V}$

Determiniamo $S' \in GL(V^*)$ $\quad (S': V^* \to V^*)$

affinchè $\quad (S'\ell)(Tv) = \ell(v) \quad \forall v \in \bar{V}$

Si ha subito

$$(S'\ell)(Tv) = \ell(STv) = \ell(v) \quad \forall v \in \bar{V}$$

$$\Rightarrow \quad ST = I \quad \Rightarrow \quad S = T^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad S' = (T^{-1})' \quad \left(= (T')^{-1}\right)$$

Dunque: a $T: V \to V$ corrisponde

$(T')^{-1}: V^* \to V^*$

covariance

contravarianza
(vettori contravarianti)

covarianza
(vettori covarianti)

contravariance

(II) Consideriamo la questione da un altro punto di vista:

consideriamo ancora $\underset{V^*}{\overset{\cap}{\ell}}(\underset{V}{\overset{\cap}{v}})$

sia $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$

basi

$$x' = \underbrace{\overbrace{m_{e'e}}^{\text{cambiamento di base}}(I)}_{\underset{A}{|||}}\, x$$

Si ha $\ell = \sum_{i=1}^{n} y_i e^*_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i e'^*_i$

quale relazione intercorre tra le due rappresentazioni? In altre parole, certamente è

$$y' = B\, y$$

qual è la relazione tra A e B?

Si ha

$$l(v) = y^t x = y'^t x'$$

$v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$

$l \mapsto y^t = (y_1 \dots y_n)$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$y^t x = y^t A^{-1} A x = (A^{-t} y)^t x'$$

$A \in Gl(n, \mathbb{R})$

$\forall x' \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \qquad y' = \overset{B}{\overset{\parallel}{A^{-t}}} y$$

trasposta dell'inversa

= inversa della trasposta

Dunque se

$$v \mapsto \overbrace{A}^{B^{-t}} v$$

$$l \mapsto \underbrace{A^{-t}}_{B} l$$

III. osserviamo anche che, da

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \equiv x^t e \qquad x^t = (x_1 \ldots x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \equiv x'^t e' \qquad \boxed{x^t}\,\boxed{e}$$

Se $\boxed{x' = A x}$, e $\boxed{e' = A^{-t} e}$

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \qquad A \in GL(n, \mathbb{R})$$

→ * covarianza (trasf. come le coordinate)

$$\boxed{x'} = \boxed{\;A\;}\,\boxed{x}$$

infatti:

$$x'^t e' = (Ax)^t e' = x^t A^t e'$$

$$\| \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$x^t e$$

$$\Rightarrow \quad e = A^t e'$$

$$e' = A^{-t} e$$

* contravarianza (trasf. come le basi)

definizione "all'antica"

★ $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ porzione di superficie regolare

↓

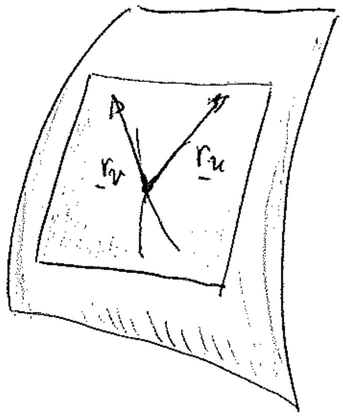
concetto invariante per trasf. regolari dei parametri

Esempio importante

$$\begin{cases} u' = u'(u,v) \\ v' = v'(u,v) \end{cases}$$

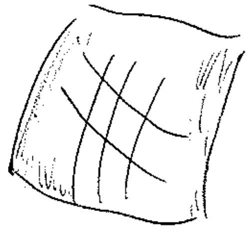
($\mathcal{C}^\infty$, per semplicità!)

$$\begin{cases} du' = \dfrac{\partial u'}{\partial u} du + \dfrac{\partial u'}{\partial v} dv \\[2ex] dv' = \dfrac{\partial v'}{\partial u} du + \dfrac{\partial v'}{\partial v} dv \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial u} & \dfrac{\partial u'}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial v'}{\partial u} & \dfrac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

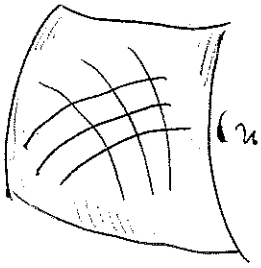
$\det J \neq 0$ $\quad J$ matrice Jacobiana



(u,v)

★ cambiamento di base nel piano tangente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u'} = \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial u'} + \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v} \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\[2ex] \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v'} = \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial v'} + \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v} \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{cases}$$



(u',v')

astrattamente ↓

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u'} \\[2ex] \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial v'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}}_{J^{-t}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u'} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial v'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Esercizio: verificare, in dim 2, che effettivamente

$$J_{f^{-1}} = J_f^{-1} \qquad f: \begin{cases} u' = u'(u,v) \\ v' = v'(u,v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = u(u'(u,v), u'(u,v)) \\ v = v(u'(u,v), v'(u,v)) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial u} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial u} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial v} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}}_{J^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix}}_{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* $\mathbb{R}$-forme : $\omega : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$
(lineari, algebriche)

1 • $\mathbb{R}$-lineari [lineari in ciascun argomento]

2 • alternanti (antisimmetriche)

ovvero

$$\omega(v_1, v_2, \ldots, \alpha v_j^{(1)} + \beta v_j^{(2)}, \ldots v_n) =$$

$$= \alpha\, \omega(v_1, v_2 \ldots, v_j^{(1)}, \ldots v_n) + \beta\, \omega(v_1, v_2, v_j^{(2)}, \ldots v_n)$$

(linearità)

$j = 1, 2 \ldots n$

$$\omega(v_1 \ldots v_i \ldots v_j \ldots v_n) = -\omega(v_1 \ldots v_j \ldots v_i, v_n).$$

$(i \neq j)$

[notare: $\omega(v_1 \ldots v \ldots v \ldots v_n) = 0$]

* in generale $\omega(v_{i_1} \ldots v_{i_k}) = (-1)^{\sigma} \omega(v_1 \ldots v_k)$ σ : segno della permutazione $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$: ± 1 → pari / → dispari

__Esempi__. 1. Il __determinante__ :

$$\det : M_n(K) \ni A \longrightarrow K$$

$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$

vista come matrice di colonne

Valgono 1, 2

e

⇒ 3. $\det I_n = 1$

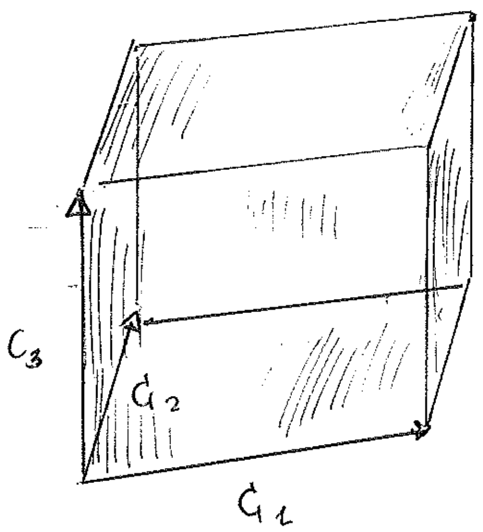
↑

identità

1 Interpretazione geometrica:

"volume" di un "iperparallelepipedo"
(individuato dalle colonne della matrice)

(Esercizio...
v. anche le note
dei corsi di Geometria
e di Algebra lineare
ed elementi di geometria



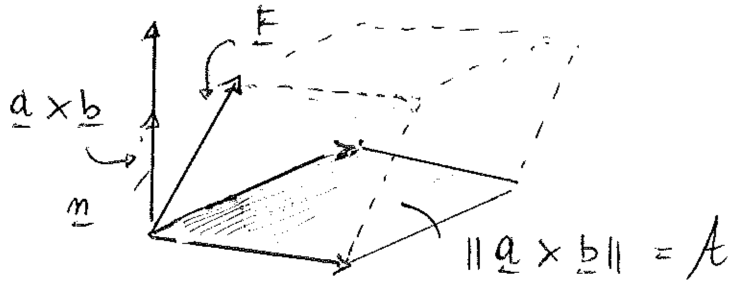
2. Flusso di un campo $\underline{F}$ (costante, per il momento)

attraverso una superficie, per fissare le idee
un parallelogramma nello spazio individuato
da due vettori $\underline{a}$, $\underline{b}$, l. i.

spazio vettoriale geometrico $\to S \quad S$

$$\Phi_{\underline{F}} : \quad (\underline{a}, \underline{b}) \longmapsto \langle \underline{F}, \underline{a} \times \underline{b} \rangle \quad \text{prodotto misto}$$

$$= \det(\underline{F}, \underline{a}, \underline{b})$$



$$\Phi_F = \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle \cdot A \quad = \langle \underline{F}, \underline{A} \rangle$$

$\underline{A} = \underline{n} \cdot A$ vettore d'area