Calcolo Numerico per Informatica – Simulazione 2 – 19/05/2016

Tempo: 120 minuti

COGNOME	NOME	MATRICOLA

Esercizio 1 (**5 punti**) Determinare il massimo numero di macchina rappresentabile nel sistema floating point $\mathbb{F}(10, 6, -3, 3)$. Dire, motivando la risposta, se la funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

può essere valutata, così come è scritta, in $\mathbb{F}(10, 6, -3, 3)$ per $x = 400$, $y = 500$ e $z = 600$. In caso negativo, se possibile, proporre una scrittura alternativa per f che permetta il calcolo di $f(400, 500, 600)$ e valutarla.

Esercizio 2 (**8 punti**) Si consideri il problema di approssimare la radice $\xi = 1$ di $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Dopo aver abbozzato il grafico di f vicino a $\xi = 1$, partendo dall'intervallo $[a_0, b_0] = [0, 3]$, applicare due volte il metodo di bisezione per ridurre l'ampiezza dell'intervallo a $[a_2, b_2]$. Quindi, applicare il metodo di Newton per approssimare la radice ξ calcolando le prime tre iterate partendo da $x_0 = a_2$. Dire se l'ordine del metodo è $p = 1$, $p = 2$ o $p > 2$ e fornire un grafico qualitativo di $\log_{10}(|e_k|)$. Stabilire, infine, se il metodo della tangente fissa converge o meno partendo da $x_0 = a_2$.

Esercizio 3 (**4 punti**) Dati i tre punti $P_0 = (-1, 2)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, -1)$, scrivere i tre polinomi di Lagrange verificando che la loro somma è costante; scrivere inoltre l'espressione di Lagrange del polinomio di interpolazione. Scrivere poi la retta di approssimazione ai minimi quadrati associata ai tre punti verificando che passa per il loro baricentro.

Esercizio 4 (**6 punti**) Determinare il numero di intervalli m necessari al metodo di Cavalieri-Simpson per calcolare l'integrale

$$I = \int_1^2 \frac{x^4}{24}\, dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}. Quindi calcolare $I_{CS}^{(m)}$ ed il corrispondente errore $E_{CS}^{(m)} = I - I_{CS}^{(m)}$. Dire quanto ci si aspetta che sia l'errore per $I_{CS}^{(2m)}$ e proporre una strategia per calcolare il valore esatto I a partire da $I_{CS}^{(m)}$ e $I_{CS}^{(2m)}$.

Esercizio 5 (**7 punti**) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente il metodo di Jacobi. Dire se per questi valori risulta convergente anche il metodo di Gauss-Seidel specificandone, se possibile, il raggio spettrale. Posto ora $\alpha = 1$, calcolare, per entrambi i metodi, le prime tre iterate partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ ed una stima del numero di iterazioni necessarie per avere $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_2 = 10^{-9}$. Tracciare, sullo stesso grafico, gli andamenti qualitativi di $\log_{10}(\|\mathbf{e}^{(k)}\|)$.

Esercizio 6 (**3,0 punti**) Scrivere una function Matlab e lo script di prova per il calcolo di un integrale definito tramite il metodo dei trapezi composto.

Tutte le risposte devono essere giustificate alla luce della teoria svolta. Risposte corrette ma non adeguatamente giustificate non sono ritenute valide.