

Esercitazione sugli sviluppi in serie di Taylor

DAVIDE BOSCAINI

Queste sono le note da cui ho tratto le lezioni frontali del 12 e 13 Gennaio 2011. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it. Per queste lezioni mi sono basato in gran parte sul *Diario del corso di Analisi Matematica 1* del prof. Sisto Baldo, reperibile al link <http://profs.sci.univr.it/~baldo/AACorrente/corsi.html>, a cui rimando e consiglio per la chiarezza dell'esposizione.

1 Introduzione

Data una funzione sufficientemente regolare $f(x): D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, è sempre possibile approssimarla in un intorno di un dato punto $x_0 \in D$, con polinomi $g(x)$ di grado n . Perché allora si studiano gli *sviluppi di Taylor*? Il motivo è che, tra tutti i polinomi g di grado n , quello di Taylor è quello che meglio stima la funzione di partenza f in un intorno di x_0 .

Cerchiamo di capire meglio cosa vuol dire che il *polinomio di Taylor* di grado n approssima la funzione di partenza meglio di qualsiasi altro polinomio di ugual grado. Per far questo partiamo dal caso più semplice, e cioè dalla scelta $n = 1$. Sia dunque $f(x)$ una funzione derivabile in x_0 . La domanda che ci poniamo è: qual è il polinomio di grado 1 che meglio approssima il grafico di $f(x)$ vicino a x_0 ?

La risposta a questa domanda è quasi spontanea: un polinomio di grado 1 è una retta e, tra tutte le rette, quella che “rimane vicina” per più tempo alla funzione data è proprio la retta tangente (si veda la figura 1).

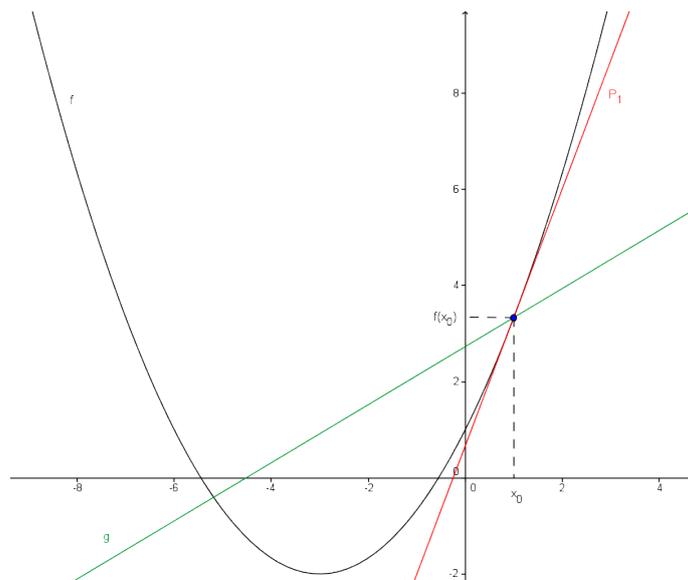


Figura 1: In rosso: polinomio di Taylor di grado 1 di f centrato in $x_0 = 1$. In verde: generica retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$.

Nonostante la risposta sia immediata, cerchiamo di indagare più a fondo per precisare meglio questo concetto. Innanzitutto i polinomi tra cui cerchiamo la nostra approssimante sono le rette del tipo $g(x) = a + b(x - x_0)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Possiamo allora scrivere

$$f(x) = g(x) + R(x) = a + b(x - x_0) + R(x),$$

dove il termine $R(x)$ è detto *resto* e più piccolo è, al tendere di x ad x_0 , più la nostra approssimazione sarà “buona”.

Dal momento che non possiamo agire direttamente sul termine di resto, l'unica libertà che abbiamo è quella di scegliere i coefficienti a, b affinché la nostra stima sia la migliore possibile. Cominciamo allora lo studio che ci porterà all'individuazione di tali coefficienti. Visto che $R(x) = f(x) - a - b(x - x_0)$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 \iff a = f(x_0).$$

Questo vuol dire che, affinché il resto possa tendere a 0 all'avvicinarsi di x a x_0 , la retta g dovrà passare per il punto $(x_0, f(x_0))$ (vedi Figura 1). Se ci pensiamo un attimo come richiesta è abbastanza legittima! Quindi la prima scelta è

$$a = f(x_0).$$

La retta tangente poi è l'unica per cui il resto tende a zero più velocemente di $(x - x_0)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)} = 0,$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - b(x - x_0)}{(x - x_0)} = -b + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = -b + f'(x_0),$$

e il limite è nullo se e solo se

$$b = f'(x_0).$$

Il polinomio di Taylor di grado 1 di $f(x)$, indicato con $P_1(x)$ è quindi quella retta $g(x)$ che ha per coefficienti i numeri reali appena individuati:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

e in tal caso si parla di *sviluppo di Taylor del prim'ordine centrato in x_0* .

Nel tentativo di generalizzare quanto visto diventa naturale chiedersi qual è il polinomio di grado n del tipo

$$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n,$$

con $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, che meglio approssima f . Per semplicità scegliamo una volta per tutte $x_0 = 0$ ¹.

¹Nel resto delle note, se non diversamente specificato, si sottintende sempre questa scelta. Essa non è restrittiva, basta infatti operare una traslazione e ci si riporta al caso $x_0 \neq 0$.

Come nel caso $n = 1$, se per i coefficienti c_i , $i = 0, \dots, n$, si scelgono le derivate successive della funzione f valutate nell'origine, quello che si ottiene è il polinomio di Taylor di grado n :

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Quindi lo *sviluppo di Taylor di ordine n centrato in 0* sarà

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R(x).$$

Finora non abbiamo specificato un gran che per quanto riguarda il termine di resto. Domande che è interessante porsi su questo termine sono: quanto velocemente va a zero? Esiste un'espressione esplicita di $R(x)$?

Per cominciare a rispondere alla prima domanda ci viene comodo il seguente teorema:

Teorema 1 (di Taylor con resto di Peano). *Sia f una funzione derivabile $n - 1$ volte in un intorno di 0 con derivata n -esima in 0. Se P_n è il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0, allora*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^n} = 0.$$

Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale ad n , quello di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.

Definizione 1. Date f, g definite in un intorno di x_0 , diremo che $f(x)$ è un *o-piccolo* di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e scriveremo $f(x) = o(g(x))$, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

cioè se, per $x \rightarrow x_0$, $f(x) \rightarrow 0$ più velocemente di $g(x)$.

Con questo nuovo linguaggio, il teorema 1 diventa:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n),$$

si parla in tal caso di *formula di Taylor con resto di Peano*.

Osservazione. La notazione dell'*o-piccolo* ci dà solo un'informazione *qualitativa* del comportamento del termine di resto.

Abbiamo quindi risposto alla prima domanda, ma non ancora alla seconda. Per questo ci viene in aiuto il seguente teorema:

Teorema 2 (di Taylor con resto di Lagrange). *Sia f una funzione derivabile $n + 1$ volte in un intorno di 0 e sia x un punto appartenente a tale intorno. Allora esiste un punto c , $0 < c < x$, tale che*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2 Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

Con il teorema 2 abbiamo esaurito la teoria necessaria per gli esercizi che ci riguardano. Possiamo quindi cominciare a calcolare gli sviluppi di Taylor delle funzioni con cui abbiamo maggiormente a che fare: $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ e $\log(1+x)$.

- Sia $f(x) = e^x$. La funzione esponenziale ha infinite derivate, tutte coincidenti con la funzione di partenza e definite globalmente: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, \dots . Possiamo quindi calcolare esplicitamente il suo polinomio di Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\ &= e^0 + e^0x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \frac{e^0}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + R(x). \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Taylor al quart'ordine di e^x centrato in 0 è:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R(x). \quad (1)$$

Per quanto riguarda il resto, se lo vogliamo esprimere sotto forma di Peano, si ha

$$R(x) = o(x^4),$$

se invece lo vogliamo esprimere mediante la formula di Lagrange, si ha

$$R(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 = \frac{e^c}{5!}x^5, \quad 0 < c < x.$$

Per avere un'idea di cosa succede graficamente all'aumentare del grado n del polinomio di Taylor si rimanda alla figura 2.

- Sia $f(x) = \sin x$. La funzione sinusoidale ha infinite derivate, tutte periodiche e definite globalmente. In particolare: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, \dots . Ci si accorge che dalla derivata quarta in poi le funzioni che compaiono nelle derivate successive sono quelle fin qui viste, c'è quindi una sorta di comportamento ciclico. Possiamo calcolare esplicitamente il suo polinomio di Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\ &= \sin(0) + \cos(0)x + \frac{-\sin(0)}{2!}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\ &= 0 + 1x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + \dots + R(x) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \dots + R(x). \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Taylor al quart'ordine di $\sin x$ centrato in 0 è:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x). \quad (2)$$

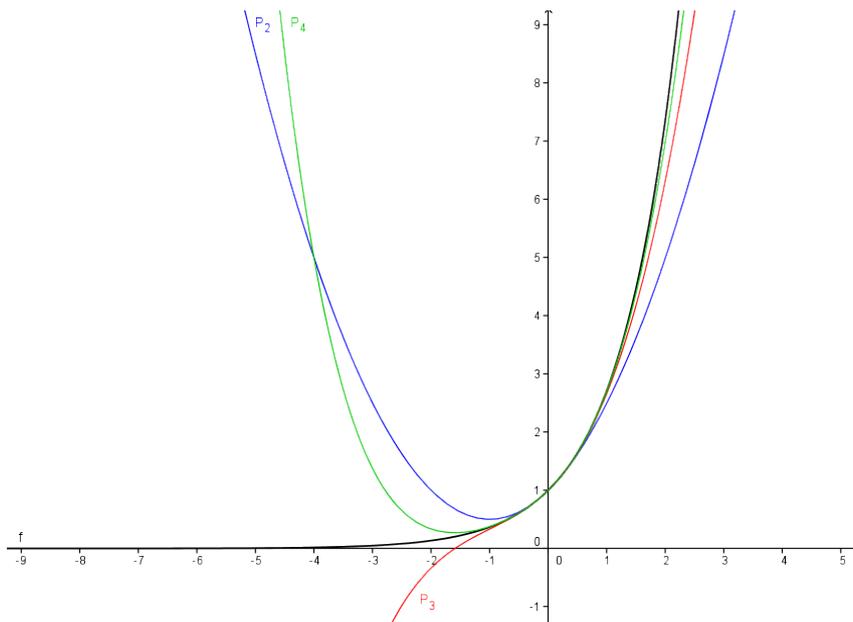


Figura 2: Sviluppo di Taylor della funzione esponenziale centrato in 0. In blu: polinomio di Taylor di grado 2. In rosso: polinomio di Taylor di grado 3. In verde: polinomio di Taylor di grado 4.

Per quanto riguarda il resto, se lo vogliamo esprimere sotto forma di Peano, si ha $R(x) = o(x^3)$, ma, siccome abbiamo visto che il termine del quart'ordine non compare nello sviluppo (il suo coefficiente moltiplicativo è nullo) possiamo anche dire che

$$R(x) = o(x^4).$$

Se invece lo vogliamo esprimere mediante la formula di Lagrange, si ha

$$R(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 = \frac{\cos c}{5!}x^5, \quad 0 < c < x.$$

Per avere un'idea di cosa succede graficamente all'aumentare del grado n del polinomio di Taylor si rimanda alla figura 3.

- Sia $f(x) = \cos x$. La funzione cosinusoide ha infinite derivate, tutte periodiche e definite globalmente. In particolare: $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\sin x$, \dots . Ci si accorge che dalla derivata quarta in poi le funzioni che compaiono nelle derivate successive sono quelle fin qui viste, c'è quindi una sorta di comportamento ciclico. Possiamo calcolare esplicitamente il suo polinomio di Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\ &= \cos(0) - \sin(0)x + \frac{-\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\ &= 1 + 0x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + R(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + R(x). \end{aligned}$$

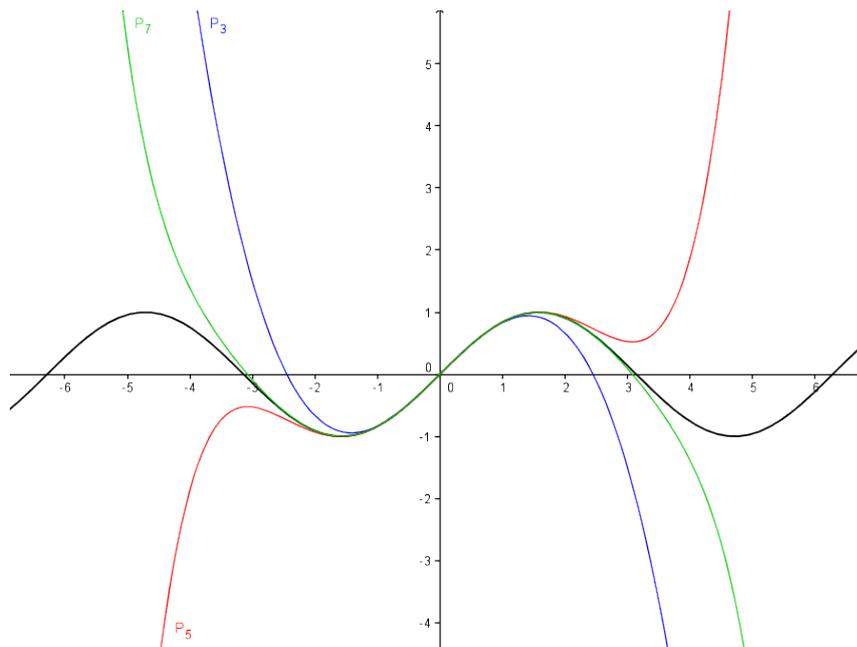


Figura 3: Sviluppo di Taylor della funzione senoide centrato in 0. In blu: polinomio di Taylor di grado 3. In rosso: polinomio di Taylor di grado 5. In verde: polinomio di Taylor di grado 7.

Quindi lo sviluppo di Taylor al quint'ordine di $\cos x$ centrato in 0 è:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R(x). \quad (3)$$

Per quanto riguarda il resto, se lo vogliamo esprimere sotto forma di Peano, si ha

$$R(x) = o(x^4),$$

se invece lo vogliamo esprimere mediante la formula di Lagrange, si ha

$$R(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 = \frac{-\sin c}{5!}x^5, \quad 0 < c < x.$$

- L'ultima funzione di cui ci interessa lo sviluppo di Taylor è $f(x) = \log(x)$. Notiamo subito che tale funzione ha dei problemi in vicinanza dell'origine: la sua derivata prima infatti è $1/x$ e in 0 non è definita. D'altronde abbiamo scelto, per semplicità, di centrare i nostri sviluppi in 0. Per uscire quindi da questa situazione, scegliamo di modificare leggermente l'argomento della funzione: sia $g(x) = \log(1+x)$. La funzione $g(x)$ ha infinite derivate, tutte definite in un intorno di 0. In particolare:

$$g'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad g'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3},$$

$$g^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}, \quad g^{(5)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}, \quad \dots$$

Note le derivate successive possiamo calcolare esplicitamente il suo polinomio di Taylor:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\
 &= 0 + \frac{1}{0+1}x - \frac{1}{(0+1)^2} \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{(0+1)^3} \frac{1}{3!}x^3 - \frac{6}{(0+1)^4} \frac{1}{4!}x^4 + \dots + R(x) \\
 &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 + \dots + R(x) \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + R(x).
 \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Taylor al quart'ordine di $\log(1+x)$ centrato in 0 è:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R(x). \quad (4)$$

Per quanto riguarda il resto, se lo vogliamo esprimere sotto forma di Peano, si ha

$$R(x) = o(x^4),$$

se invece lo vogliamo esprimere mediante la formula di Lagrange, si ha

$$R(x) = \frac{g^{(5)}(c)}{5!}x^5 = \frac{24}{5!(c+1)^5}x^5, \quad 0 < c < x.$$

Per avere un'idea di cosa succede graficamente all'aumentare del grado n del polinomio di Taylor si rimanda alla figura 4.

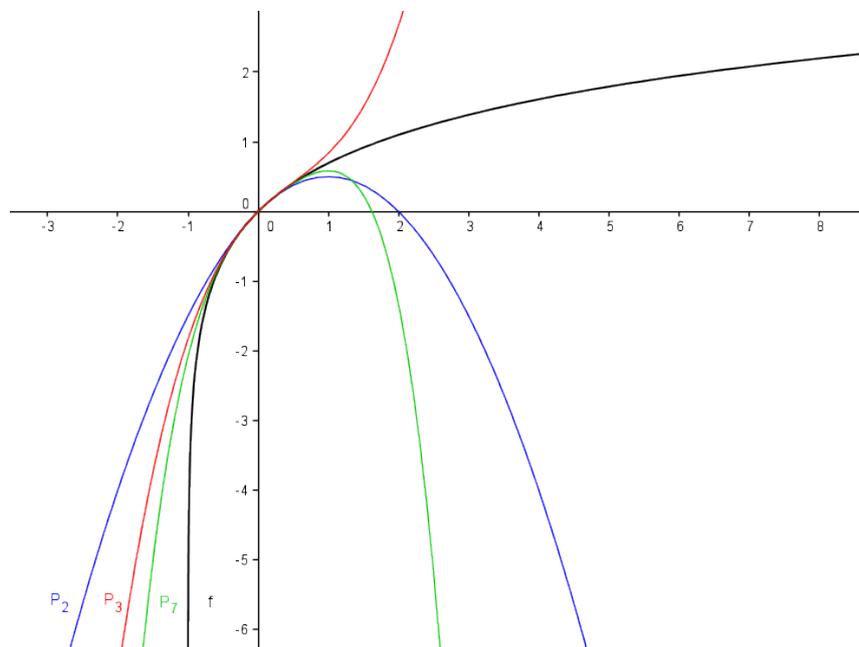


Figura 4: Sviluppo di Taylor della funzione $\log(1+x)$ centrato in 0. In blu: polinomio di Taylor di grado 2. In rosso: polinomio di Taylor di grado 3. In verde: polinomio di Taylor di grado 7.

3 Esercizi

Svolti per esteso i conti degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari più usate, passiamo finalmente alla parte applicativa. Si possono individuare sostanzialmente due ambiti in cui le serie di Taylor sono utili:

- calcolo di valori particolari di alcune funzioni nel caso in cui non si disponga di una calcolatrice (ad esempio durante un compito di Analisi Matematica...);
- calcolo di limiti di forme indeterminate.

Esercizio 1. Calcolare il valore di $\sin 1$ con una precisione di 10^{-4} .

Soluzione. Per prima cosa notiamo che il valore di 1 radiante, di cui vogliamo conoscere il seno, è sostanzialmente vicino all'origine. Per poter quindi calcolare "a mano" quanto vale $\sin 1$ possiamo sfruttare lo sviluppo di Taylor di grado 4 centrato in 0, ovvero l'equazione (2), con resto in forma di Lagrange:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!}x^5.$$

La nostra scelta è evidentemente $x = 1$, quindi:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!}1^5 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{\cos c}{120} = \frac{5}{6} + \frac{\cos c}{120}.$$

Per capire se il valore individuato ($5/6$) è il valore di $\sin 1$ a meno di 10^{-4} dobbiamo verificare se esiste un numero reale $0 < c < 1$ tale che

$$\left| \frac{\cos c}{120} \right| \leq \frac{1}{10000} \Rightarrow |\cos c| \leq \frac{12}{1000} \Rightarrow \begin{cases} c \leq \arccos(0.012) \cong 1.56, \\ c \geq \arccos(-0.012) \cong 1.58, \end{cases}$$

che è impossibile. Questo vuol dire che il grado $n = 4$ del polinomio di Taylor scelto è troppo basso. Per $n = 7$ si ha:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\cos c}{9!}x^9.$$

Quindi per $x = 1$:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \frac{\cos c}{9!}1^9 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{\cos c}{362880} = \frac{4241}{5040} - \frac{\cos c}{362880}.$$

Per capire se il valore individuato ($4241/5040$) è il valore di $\sin 1$ a meno di 10^{-4} dobbiamo verificare se esiste un numero reale $0 < c < 1$ tale che

$$\left| \frac{\cos c}{362880} \right| \leq \frac{1}{10000} \Rightarrow |\cos c| \leq \frac{36288}{1000} \Rightarrow |\cos c| \leq 36.288,$$

e questo vale per ogni $c \in \mathbb{R}$, quindi a maggior ragione per quelli compresi tra 0 e 1. Quindi $4241/5040 = 0,841468254$ è il valore di $\sin 1$ con una precisione di 10^{-4} . Per convincersi di questo fatto basta impostare una calcolatrice scientifica in radianti e far calcolare ad essa il risultato: **sin 1 = 0,841470985**. Come si vede facilmente i due valori coincidono fino alla quarta cifra decimale.

Esercizio 2. Calcolare il valore di $\cos(-3)$ con una precisione di 10^{-4} .

Soluzione. Per prima cosa notiamo che il valore di -3 radianti, di cui vogliamo conoscere il coseno, è troppo distante dall'origine. Lo strumento che abbiamo per poter calcolare "a mano" quanto vale $\cos(-3)$ è lo sviluppo di Taylor con resto in forma di Lagrange. Dovremo però centrare il nostro sviluppo del coseno in un certo x_0 , con x_0 il più vicino possibile a -3 . Scegliamo $x_0 = -\pi$. Ora si ha che, scelto $n = 3$,

$$f(x) = f(-\pi) + f'(-\pi)(x + \pi) + \frac{f''(-\pi)}{2!}(x + \pi)^2 + \frac{f'''(-\pi)}{3!}(x + \pi)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x + \pi)^4,$$

quindi,

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(-\pi) - \sin(-\pi)(x + \pi) - \frac{\cos(-\pi)}{2}(x + \pi)^2 + \frac{\sin(-\pi)}{6}(x + \pi)^3 + \frac{\cos c}{24}(x + \pi)^4 \\ &= -1 + \frac{(x + \pi)^2}{2} + \frac{\cos c}{24}(x + \pi)^4. \end{aligned}$$

La nostra scelta è evidentemente $x = -3$, quindi:

$$\begin{aligned} \cos(-3) &= -1 + \frac{(\pi - 3)^2}{2} + \frac{\cos c}{24}(\pi - 3)^4 \\ &= \frac{-2 + \pi^2 + 9 - 6\pi}{2} + \frac{\cos c}{24}(\pi - 3)^4 \\ &= \frac{7 - 6\pi + \pi^2}{2} + \frac{\cos c}{24}(\pi - 3)^4. \end{aligned}$$

Per capire se il valore individuato $((7 - 6\pi + \pi^2)/2)$ è il valore di $\cos(-3)$ a meno di 10^{-4} dobbiamo verificare se esiste un numero reale $-\pi < c < -3$ tale che

$$\left| \frac{\cos c}{24}(\pi - 3)^4 \right| \leq \frac{1}{10000} \Rightarrow |\cos c| \leq \frac{6}{2500(\pi - 3)^4} \approx 5.97,$$

che è verificata per ogni $c \in \mathbb{R}$, quindi a maggior ragione per quelli compresi tra $-\pi$ e -3 . Quindi $(7 - 6\pi + \pi^2)/2 = -0,989975760$ è il valore di $\cos(-3)$ con una precisione di 10^{-4} . Per convincersi di questo fatto basta impostare una calcolatrice scientifica in radianti e far calcolare ad essa il risultato: $\cos -3 = -0,989992497$. Come si vede facilmente i due valori coincidono fino alla quarta cifra decimale.

Esercizio 3. Calcolare il valore di $e^{\sqrt{2}}$ con una precisione di 10^{-3} .

Soluzione. Per prima cosa notiamo che il valore $\sqrt{2}$, di cui vogliamo conoscere l'esponenziale, è troppo distante dall'origine. Per cui calcoliamo lo sviluppo di Taylor con resto in forma di Lagrange centrato in $x_0 = 3/2$. Ora si ha che, scelto $n = 3$,

$$f(x) = f(3/2) + f'(3/2)(x - 3/2) + \frac{f''(3/2)}{2!}(x - 3/2)^2 + \frac{f'''(3/2)}{3!}(x - 3/2)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x - 3/2)^4,$$

quindi,

$$e^x = e^{3/2} + e^{3/2}(x - 3/2) + \frac{e^{3/2}}{2}(x - 3/2)^2 + \frac{e^{3/2}}{6}(x - 3/2)^3 + \frac{e^c}{4!}(x - 3/2)^4.$$

La nostra scelta è evidentemente $x = \sqrt{2}$, quindi:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{2}} &= e^{3/2} + e^{3/2}(\sqrt{2} - 3/2) + \frac{e^{3/2}}{2}(\sqrt{2} - 3/2)^2 + \frac{e^{3/2}}{6}(\sqrt{2} - 3/2)^3 + \frac{e^c}{24}(\sqrt{2} - 3/2)^4 \\ &= \sqrt{e^3} \left(\frac{-21 + 46\sqrt{2}}{48} \right) + \frac{e^c}{24}(\sqrt{2} - 3/2)^4. \end{aligned}$$

Per capire se il valore individuato è il valore di $e^{\sqrt{2}}$ a meno di 10^{-3} dobbiamo verificare se esiste un numero reale $\sqrt{2} < c < 3/2$ tale che

$$\frac{e^c}{24} (\sqrt{2} - 3/2)^4 \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow e^c \leq \frac{3}{125(\sqrt{2} - 3/2)^4} \cong 443.14 \Rightarrow c \leq 6.09.$$

Dal momento che $6.09 > 3/2$, esisteranno dei c compresi tra $\sqrt{2}$ e $3/2$, per cui la disuguaglianza precedente vale. Quindi

$$\sqrt{e^3} \left(\frac{-21 + 46\sqrt{2}}{48} \right) = 4.11324044$$

è il valore di $e^{\sqrt{2}}$ con una precisione di 10^{-3} . Usando una calcolatrice si ha: 4.11325039. Come si vede facilmente i due valori coincidono almeno fino alla terza cifra decimale.

Esercizio 4 (per casa). Calcolare il valore di \sqrt{e} con una precisione di 10^{-3} .

Esercizio 5. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}.$$

Soluzione. È facile notare che il limite proposto è una forma indeterminata $0/0$. In tali casi abbiamo due strumenti a nostra disposizione:

- il teorema di *de l'Hôpital*,
- gli sviluppi di Taylor (con resto di Peano).

Per ovvi motivi noi ci concentreremo sulla seconda possibilità. In particolare notiamo che l'unica funzione che compare nell'argomento del limite e non è un polinomio è la funzione $\tan x$. Cominciamo quindi col calcolare il suo sviluppo di Taylor. Il punto in cui centrare lo sviluppo questa volta non può esser scelto a nostro piacimento, bensì deve coincidere con il valore a cui tende x , che, nel nostro caso, è proprio 0. Quindi

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan 0 + \tan' x|_{x=0} x + \tan'' x|_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \tan''' x|_{x=0} \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ &= 0 + (1 + \tan^2 x)|_{x=0} x + (2 \tan x(1 + \tan^2 x))|_{x=0} \frac{x^2}{2} + \\ &\quad (2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x(1 + \tan^2 x))|_{x=0} \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 0 + x + 0 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Ora

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \tag{5}$$

di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x + x^3/3 + o(x^3))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/3 - o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3},$$

e, per la definizione 1, l'ultimo limite è nullo. Questo ci permette di concludere che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Esercizio 6. (solo accennato) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

Soluzione. Ancora una volta ci troviamo davanti ad una forma indeterminata del tipo $0/0$. Questa volta dobbiamo far lo sviluppo di Taylor di due funzioni: il seno e la tangente. Tali sviluppi però ci sono già noti, rispettivamente dall'equazione (2) e dall'equazione (5), non ci resta quindi che sostituire:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3/6 + o(x^4) - (x + x^3/3 + o(x^3))}{x^3} \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4) - o(x^3)}{x^3} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Per finire ricordo tre cose importanti:

- ☞ Per il teorema 1, il polinomio di Taylor è unico;
- ☞ Lo sviluppo di Taylor è solo locale: si deve centrare lo sviluppo vicino al termine che voglio calcolare;
- ☞ Se il limite è per $x \rightarrow x_0$ e lo voglio calcolare via sviluppi di Taylor, allora lo sviluppo dev'essere fatto centrandolo in x_0 .