

Federico Di Palma

**Raccolta di Temi d'esame
di "Statistica"
risolti e commentati.**

A.A. 2013 - 2014

A Claudia

Prefazione

Il presente fascicolo racchiude una selezione dei Temi d'esame del corso di base di "Statistica" proposti agli studenti negli AA. AA. dal 2010/2011 al 2013/2014 nella Facoltà di "Biotecnologie" dell'Università degli Studi di Verona ed è rivolto agli studenti di un corso di base di statistica descrittiva ed inferenziale. Per ogni tema d'esame viene proposta una soluzione commentata con richiami teorici.

Si prega di segnalare ogni refuso al docente tramite e-mail (federico.dipalma@univr.it).

Federico Di Palma

Indice generale

| | |
|--|----|
| - Appello del 4 Febbraio 2011 - Fila A..... | 5 |
| - Appello del 4 Febbraio 2011 -Fila B..... | 9 |
| - Appello del 18 Febbraio 2011 - Fila A..... | 14 |
| - Appello del 18 Febbraio 2011 - Fila B..... | 18 |
| - Appello del 24 Giugno 2011 - Fila A..... | 22 |
| - Appello del 24 Giugno 2011 - Fila B..... | 26 |
| - Appello del 08 Luglio 2011 -..... | 30 |
| - Appello del 09 Settembre 2011 -..... | 34 |
| - Appello del 23 Settembre 2011 -..... | 38 |
| - Appello del 8 Febbraio 2012 -..... | 42 |
| - Appello del 22 Febbraio 2012 -..... | 47 |
| - Appello del 27 Giugno 2012 -..... | 52 |
| - Appello del 11 Luglio 2012 -..... | 57 |
| - Appello del 05 Settembre 2012 -..... | 62 |
| - Appello del 19 Settembre 2012 -..... | 66 |
| - Appello del 26 Giugno 2013 -..... | 70 |
| - Appello del 25 Settembre 2013 -..... | 75 |
| Tavola I - Distribuzione normale standardizzata..... | 79 |
| Tavola II - Distribuzione χ^2 | 80 |

- Appello del 4 Febbraio 2011 - Fila A

Esercizio 1)

Nella tabella seguente viene riportata la distribuzione delle assenze relative all'intero anno scolastico 2009/2010 di una classe IV superiore.

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| Giorni di assenza | 4 | 5 | 8 | 11 | 16 | 18 | 19 | 25 | 28 |
| Frequenza | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |

Determinare

- La tipologia del carattere.
- Un indice sintetico di posizione.
- Se possibile, un indice sintetico di variabilità.
- Una rappresentazione grafica adeguata.
- L'eventuale presenza di outlier.

Esercizio 2)

E' data la seguente tabella di ricavata da un indagine svolta su 200 lavoratrici di un industria per conoscere le preferenze riguardo all'orario di lavoro in relazione allo stato civile.

| | | Y:stato civile | | |
|--------------------|-----------------------------------|----------------|-----------|--------|
| | | Nubili | Coniugate | Vedove |
| X:orario preferito | Diviso (oltre 2 ore di pausa) | 12 | 20 | 18 |
| | Continuato con breve interruzione | 36 | 50 | 14 |
| | Continuato senza interruzione | 20 | 20 | 10 |

Il candidato

- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità
- Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Esercizio 3)

L'istituto descritto nell'esercizio 1 dichiarava nel A.S. 2008/2009 che il valore atteso delle assenze fosse di 10 gg per una classe IV. Considerando la classe illustrata nell'esercizio 1 come campione è possibile confermare tale asserzione?

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi legati all'estrazione di una delle lavoratrici descritte nell'Esercizio 2.

E_1 : si estragga una lavoratrice sposata

E_2 : si estragga una lavoratrice che preferirebbe avere un orario continuato

- Il candidato calcoli le seguenti Probabilità $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
- Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

- Appello del 4 Febbraio 2011 -
Svolgimento - Fila A

Esercizio 1)

a) Determinare la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto (in quanto le modalità sono numero naturali e concettualmente limitate ad un numero massimo pari ai giorni di lezione presenti nell'anno scolastico)

b) Un indice sintetico di posizione.

Un carattere di tipo quantitativo ammette tre indici sintetici di posizione: la moda, la mediana e media. Un indice idoneo in questo caso è la mediana, in quanto risulta poco affetto dalla presenza di eventuali outlier (una persona che ha fatto una grave malattia o un incidente...)

Per calcolare la mediana si deve valutare la numerosità della popolazione (N=28) facilmente ottenibile cumulando le frequenze assolute

| | | | | | | | | | |
|--------------------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Giorni di assenza | 4 | 5 | 8 | 11 | 16 | 18 | 19 | 25 | 28 |
| Frequenza | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 2 | 1 | 4 | 6 |
| F. ass. cumulata | 3 | 5 | 6 | 10 | 15 | 17 | 18 | 22 | 28 |

Dopo di che, la mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra $(N-1)/2 = 13,5$ elementi. Poichè non esiste l'osservazione di posto 14,5 viene preso come mediana la media fra il 14° ed 15° valore. Analizzando le frequenze cumulate si ottiene che ambo le osservazioni mostrano la modalità 16. Pertanto la mediana (q_2) è 16

c) Se possibile, un indice sintetico di variabilità.

Un carattere di tipo quantitativo ammette quattro indici sintetici di variabilità: il range (o campo di variazione) la distanza interquartile, la varianza e la deviazione standard (o scarto quadratico medio). Avendo illustrato la mediana come indice di posizione la scelta più logica per l'indice di variabilità connesso è quella di utilizzare la distanza interquartile che si basa sullo stesso concetto. Infatti essa rappresenta la differenza fra il primo (q_1) ed il terzo (q_3) quartile. Dove q_1 , una volta ordinate le osservazioni, lascia alla propria sinistra $(N-1)/4 = 6,75$ osservazioni mentre q_3 lascia alla propria destra $(N-1)/4 = 6,75$ osservazioni. Anche in questo caso non ottenendo numeri interi dovremo mediare le posizioni intere più vicine. Si ha dunque che

$$q_1 = \text{media } 7^\circ \text{ e } 8^\circ \text{ valore} = 11$$

$$q_3 = \text{media } 21^\circ \text{ e } 22^\circ \text{ valore} = 25$$

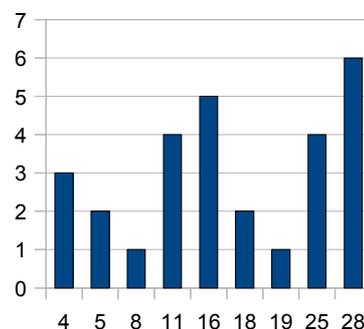
Si ha che la distanza interquartile $D = q_3 - q_1 = 25 - 11 = 14$

d) Una rappresentazione grafica adeguata.

Un carattere di tipo quantitativo le cui le modalità abbiano frequenze superiori all'unità viene solitamente rappresentato mediante un diagramma a barre.

Questo diagramma è composto da barre orizzontali (o verticali) inserite in un piano cartesiano. Il grafico riposta una barra per ogni modalità, la cui base (o altezza) viene fissata e centrata nel valore della modalità corrispondente mentre la sua altezza (o base) raggiunge la relativa frequenza assoluta.

A lato si riporta il digramma a barre ricavato dalla distribuzione in esame



e) L'eventuale presenza di outlier.

Un modo per individuare gli outlier (ovvero valori troppo distanti dalla statistica e probabilmente erronei) è quello di ricorrere alla definizione di Valore Adiacente Superiore e di Valore Adiacente Inferiore, per individuare i valori rispettivamente troppo alti o troppo bassi. Questi limiti vengono calcolati sottraendo al primo quartile K

volte la distanza interquartile (VAI) e sommando al terzo quartile K volte la distanza interquartile (VAS). I valori esterni all'intervallo VAI-VAS vengono considerati outlier. Tipici valori di K sono 1, 1.5 e 2. Utilizzando K = 1 si ha che

$$VAI = 11 - 14 = -3$$

$$VAS = 25 + 1 \cdot 14 = 39$$

Non esistendo alcuna osservazioni esterna all'intervallo [-3 ; 39] possiamo concludere che la popolazione presumibilmente non presenta outlier.

Esercizio 2)

L'esercizio verte sull'analisi di una serie bivariata, ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili.

a) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione*

Una serie bivariata ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la modalità della serie corrispondente alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 50 da cui si ha le seguente moda

(Continuato con breve interruzione ; Coniugate)

b) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità*

Una serie bivariata ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili non ammette indice sintetico di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

c) *Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.*

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

nella tabella si riportano le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi

| | | Y: stato civile | | | Totali |
|---------------------|-----------------------------------|-----------------|-----------|-----------|--------|
| | | Nubili | Coniugate | Vedove | |
| X: orario preferito | Diviso (oltre 2 ore di pausa) | 12 (17) | 20 (22,5) | 18 (10,5) | 50 |
| | Continuato con breve interruzione | 36 (34) | 50 (45) | 14 (21) | 100 |
| | Continuato senza interruzione | 20 (17) | 20 (22,5) | 10 (10,5) | 50 |
| Totali | | 68 | 90 | 42 | 200 |

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si può procedere al calcolo della regione di accettazione fissato il livello di significatività al 5%.

$$A = [0; \chi^2_{1-\alpha}((M_x - 1)(M_y - 1))] = [0; \chi^2_{1-0.05}((3-1)(3-1))] = [0; \chi^2_{0.95}(4)] = [0; 9.49]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} =$$

$$= \frac{(12-17)^2}{17} + \frac{(20-22.5)^2}{22.5} + \frac{(18-10.5)^2}{10.5} + \frac{(36-34)^2}{34} + \frac{(50-45)^2}{45} + \frac{(14-21)^2}{21} + \frac{(20-17)^2}{17} + \frac{(20-22.5)^2}{22.5} + \frac{(10-10.5)^2}{10.5} =$$

$$\frac{25}{17} + \frac{6.25}{22.5} + \frac{56.25}{10.5} + \frac{4}{34} + \frac{25}{45} + \frac{49}{21} + \frac{9}{17} + \frac{6.25}{22.5} + \frac{0.25}{10.5} = 10.94$$

Poichè il valore dello stimatore è esterno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri non sono indipendenti ad un livello di significatività del 5 per cento.

Esercizio 3)

Nel testo viene richiesto di verificare se il valore atteso della popolazione da cui si è estratto il campione indicato nell'esercizio 1 è pari a 10.

Questo test si appoggia allo stimatore media campionaria e richiede un campione la cui dimensione sia di almeno 30 elementi. Non soddisfacendo questa ipotesi non è possibile confermare o smentire l'ipotesi.

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Essendo gli eventi elementari equiprobabili, le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 e dell'evento intersezione (estrarre donne coniugate che preferiscono orairio continuato) possono essere ricavate utilizzando la definizione classica; secondo la quale la probabilità è il rapporto dei casi favorevoli sui casi totali. Pertanto si ha che:

$$P(E_1) = \frac{90}{200} = 0.45 \quad P(E_2) = \frac{100+50}{200} = 0.75 \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{50+20}{200} = 0.35$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{90+150-70}{200} = 0.85 \quad P(E_1 | E_2) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{70}{200} \frac{200}{150} = \frac{7}{15}$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

Se due eventi sono indipendenti si ha che la probabilità condizionata è pari alla probabilità non condizionata, pertanto essendo:

$$P(E_1) = \frac{90}{200} = \frac{27}{60} \neq \frac{28}{60} = \frac{7}{15} = P(E_1 | E_2)$$

Gli eventi non sono indipendenti.

- Appello del 4 Febbraio 2011 -Fila B

Esercizio 1)

Nella tabella seguente viene riportata la valutazione del livello di gradimento del corso di statistica dell'A.A. 2007/2008 per una facoltà di Economia.

| | | | | | | |
|------------|--------|-------|----------|-------------|---------------|--------------------------|
| Gradimento | Ottimo | Buono | Discreto | Sufficiente | Insufficiente | Gravemente Insufficiente |
| Frequenza | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 2 |

Determinare

- a) La tipologia del carattere.
- b) Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare.
- c) Se possibile, un indice sintetico di variabilità.
- d) Una rappresentazione grafica adeguata.

Esercizio 2)

Da un'indagine si sono rilevate in 6 piccole aziende italiane (indicate con lettere A-F) il profitto ed il valore delle spese sostenute per ammodernare gli impianti espressi in migliaia di euro. I dati ottenuti sono rappresentati nella forma Azienda(Profitto; Spesa).

A(50; 20) B(60; 40) C(30; 14) D(85;50) E(95;60) F(40;26)

Il candidato,

- a) Indichi e fornisca una rappresentazione grafica adeguata alla serie ottenuta.
- b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità
- c) Ipotizzando un legame di tipo lineare,
 1. Calcoli l'opportuna regressione
 2. Ipotizzi quale sarebbe l'investimento previsto nel caso si riscontrasse un profitto di 100 mila euro
 3. Il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta.

Esercizio 3)

Si vuole verificare la bontà di una roulette classica composta da 36 numeri (18 neri e 18 rossi), e due numeri detti "verdi" (zero e doppio zero). In particolare, si è interessati a verificare che la probabilità che vinca il banco (esca zero o doppio zero) sia equa.

Il candidato:

- a) determini il numero di osservazioni necessarie affinché si possa procedere a tale verifica
- b) supposto di aver eseguito 380 prove, indicare se la roulette è equa a fronte delle seguenti frequenze assolute

| | | | | |
|-----------|-------|------|-----|------|
| Esito | Rosso | Nero | "0" | "00" |
| Frequenza | 176 | 188 | 10 | 6 |

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi legati all'estrazione di una delle 6 aziende descritte nell'Esercizio 2.

E_1 : si estragga un'azienda che spende oltre 45 mila euro

E_2 : si estragga un'azienda che ricava oltre 45 mila euro

- a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
- b) Il candidato indichi se gli eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi statisticamente indipendenti.

- Appello del 4 Febbraio 2011 -
Svolgimento - Fila B

Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto non espresso da numeri) ordinabili (in quanto è possibile fissare un ordine fra le modalità)

b) *Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare.*

Un carattere di tipo qualitativo ordinabile ammette due indici sintetici di posizione: la moda e la mediana.

La moda è che la modalità con la frequenza maggiore: pertanto la moda è "Insufficiente"

Per calcolare la mediana si deve valutare la numerosità della popolazione (N=17) facilmente ottenibile cumulando le frequenze assolute

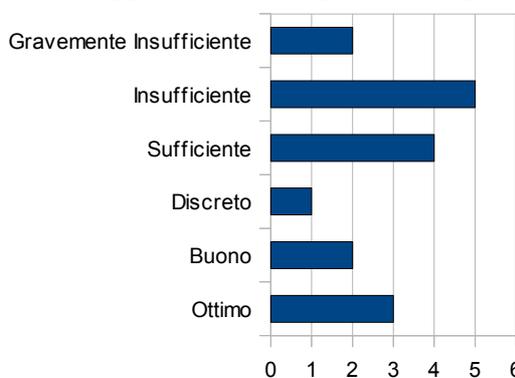
| Gradimento | Ottimo | Buono | Discreto | Sufficiente | Insufficiente | Gravemente Insufficiente |
|------------|--------|-------|----------|-------------|---------------|--------------------------|
| Frequenza | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 2 |
| Cumulata | 3 | 5 | 6 | 10 | 15 | 17 |

Dopo di che, la mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra $(N-1)/2 = 8$ elementi; ovvero il nono elemento. Analizzando le frequenze cumulate si ottiene che la mediana indicherà la modalità "Sufficiente" (che infatti raccoglie le osservazioni dal 7° al 10° posto).

c) *Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare.*

Un carattere di tipo qualitativo non ammette alcun indici sintetici di variabilità.

d) *Una rappresentazione grafica adeguata.*



Un carattere di tipo qualitativo ordinabile le cui le modalità abbiano frequenze superiori all'unità viene solitamente rappresentato mediante un diagramma a barre.

Questo diagramma è composto da barre orizzontali (o verticali) inserite in un piano cartesiano. Il grafico riposta una barra per ogni modalità, la cui base (o altezza) viene fissata e centrata nel valore della modalità corrispondente mentre la sua altezza (o base) raggiunge la relativa frequenza assoluta.

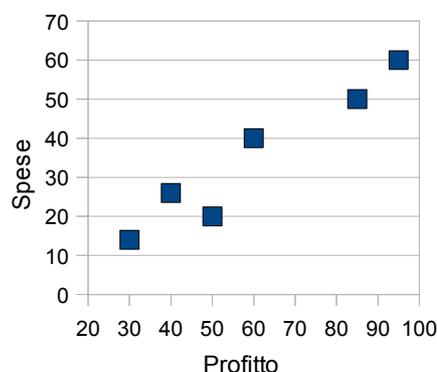
A lato si riporta il digramma a barre ricavato dalla distribuzione

Esercizio 2)

a) *Indicare e fornire una rappresentazione grafica adeguata.*

Per serie bivariate continue o discrete, cui le frequenze non siano particolarmente alte, si usa rappresentare la serie mediante diagrammi a dispersione. Un diagramma a dispersione è rappresentato in un piano cartesiano dove le modalità dei due caratteri vengono posti sui due assi ed ogni osservazione viene rappresentata da un punto.

A lato si mostra il diagramma a dispersione ottenuto dai dati forniti.



b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità

Per serie bivariate continue o discrete l'indice di variabilità migliore è dato dalla matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone di 3 distinti valori le due varianze dei distinti caratteri e la covarianza, della serie bivariata.

Si seguito riportiamo i calcoli per le due varianze per i singoli caratteri:

X: Profitto realizzato dall'aziende

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{50+60+30+85+95+40}{6} = 60$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{2500+3600+900+7225+9025+1600}{6} - 3600 = \frac{24850-21600}{6} = \frac{3250}{6}$$

Y: Spesa per ammodernamento effettuata dall'aziende

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{20+40+14+50+60+26}{6} = 35$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{400+1600+196+2500+3600+676}{6} - 1225 = \frac{8972-7350}{6} = \frac{1622}{6}$$

La covarianza si ottiene

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

I cui conti sono ripostati in tabella

| | X | Y | x - \bar{x} | y - \bar{y} | (x - \bar{x}) (y - \bar{y}) |
|--------------|------------|------------|---------------------------------|---------------------------------|--|
| | 50 | 20 | -10 | -15 | 150 |
| | 60 | 40 | 0 | 5 | 0 |
| | 30 | 14 | -30 | -21 | 630 |
| | 85 | 50 | 25 | 15 | 375 |
| | 95 | 60 | 35 | 25 | 875 |
| | 40 | 26 | -20 | -9 | 180 |
| somma | 360 | 210 | | | 2210 |

Per tanto la matrice varianza covarianza risulta essere

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{3250}{6} & \frac{2210}{6} \\ \frac{2210}{6} & \frac{1622}{6} \end{bmatrix}$$

c 1) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si calcoli l'opportuna regressione

La retta di regressione ha equazione

$$\hat{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \bar{x} \quad \hat{y} = \frac{2210}{3250} x + 35 - \frac{2210}{3250} 60 \quad \hat{y} = 0.68 x - 5.8$$

c 2) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si ipotizzi quale sarebbe l'investimento previsto nel caso si riscontrasse un profitto di 100 mila euro

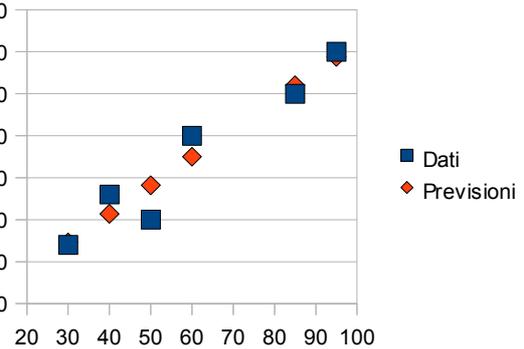
La risposta a questo quesito si ottiene applicando la retta nel punto x= 100. si ottiene quindi un investimento previsto di 62.2 mila euro.

c) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si verifichi il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta

Un buon indicatore della bontà del modello di regressione è dato dall'indice di correlazione di Pearson

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0.9265 \quad R = 0.9625$$

Poiché l'indice risulta superiore a 0.7 si può asserire che il legame è buono. Ovviamente il dato deve essere confermato dalla visualizzazione del modello. Infatti il coefficiente di Pearson può anche dare risultati molto errati. A lato si riportano le previsioni effettuate dal modello lineare che ben descrivono l'andamento dei dati.



Esercizio 3)

L'indagine statistica mira a verificare mediante inferenza se la probabilità di ottenere uno zero od un doppio zero è onesta. L'analisi si riduce a verificare le probabilità di due eventi complementari:

A: esca un numero "verde" A: non esca un numero "verde"

Si ha inoltre che $P(A) = 2/38 = 1/19$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 18/19$

Pertanto è possibile modellare la popolazione di riferimento mediante una bernoulliana $P \sim \text{Ber}(1/19)$ dove $E[P] = 1/19$.

a) determinare il numero di osservazioni necessarie affinché si possa procedere a tale verifica

la dimensione nel campione varia a seconda del tipo di test da effettuare: se si utilizza il test di adattamento alla distribuzione empirica o quello sul valore atteso.

Nell'ipotesi di agire usando il test sul valore atteso si ha che la dimensione del campione deve essere superiore alle 30 unità statistiche.

b) supposto di aver eseguito 380 prove, indicare se la roulette è equa a fronte delle seguenti frequenze assolute

Il test impostato è un test di ipotesi sul parametro valore atteso. Si hanno le seguenti ipotesi

$$H_0: E[P] = 1/19 \quad H_1: E[P] \neq 1/19$$

Questo test utilizza come stimatore la media campionaria e, poiché la dimensione del campione è superiore alle 30 unità, si ha la convergenza della sua distribuzione ad una normale, si ha infatti che

$$\bar{x} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\frac{1}{19}, \frac{\frac{1}{19} \cdot \frac{18}{19}}{380}\right) \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\frac{1}{19}, \left(\frac{3}{19}\right)^2 \cdot \frac{1}{19}\right)$$

Verificata la convergenza dello stimatore è possibile determinare la regione di accettazione A. Essendo l'ipotesi alternativa un'ipotesi di disuguaglianza il test da eseguire è di tipo bilaterale. Fissato un livello di significatività del 5% si ha che

$$A = \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow A = [-1.96; 1.96]$$

Si calcola ora il valore dello stimatore standardizzato

$$\bar{x} = \frac{10+6}{380} \Rightarrow z_x = \frac{\bar{x} - E[P]}{\sqrt{\text{Var}[P]}} = \frac{\frac{16}{380} - \frac{1}{19}}{\sqrt{\frac{3^2}{19^2} \cdot \frac{1}{19}}} = \frac{-\frac{2}{190}}{\frac{3}{19} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}}} = -\frac{2}{190} \cdot \frac{19}{3} \cdot \sqrt{19} = -\frac{2}{10} \cdot \frac{\sqrt{19}}{3} = -0.2906$$

Poiché il valore ottenuto è interno alla regione di accettazione possiamo accettare l'ipotesi nulla.

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Essendo gli eventi elementari equiprobabili, le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 e dell'evento intersezione (estrarre un'azienda che spenda e ricavi oltre 45 mila euro) possono essere ricavate utilizzando la definizione classica; secondo la quale la probabilità è il rapporto dei casi favorevoli sui casi totali. Pertanto si ha che:

$$P(E_2) = \frac{4}{6} = 0.667 \quad P(E_1) = \frac{2}{6} = 0.333 \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{6} = 0.333$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{4+3-2}{6} = 0.833 \quad P(E_1 | E_2) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{2/6}{4/6} = 0.5$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

Se due eventi sono indipendenti si ha che la probabilità dell'evento intersezione è data dal prodotto delle probabilità, pertanto essendo

$$P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} = 0.5 \neq 0.333 = P(E_1 \cap E_2)$$

Gli eventi non sono indipendenti.

- Appello del 18 Febbraio 2011 - Fila A

Esercizio 1)

Si vuole valutare il tempo di incubazione (espresso in giorni) di un agente virale. Da un'osservazione su di una popolazione di 20 elementi si sono ottenute le frequenze assolute indicate nella tabella a lato.

| inf_i | sup_i | n_i |
|---------|---------|-------|
| 0 | 8 | 1 |
| 8 | 12 | 2 |
| 12 | 16 | 5 |
| 16 | 20 | 4 |
| 20 | 24 | 5 |
| 24 | 28 | 2 |
| 28 | 36 | 1 |

Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Se possibile, tracci l'istogramma.
- Se possibile, calcoli la mediana.
- Se possibile, calcoli la varianza.

N.b. L'estremo superiore delle varie classi di modalità è da ritenersi escluso

Esercizio 2)

I dati raccolti nel precedente esercizio sono stati organizzati tenendo conto del diverso genere del soggetto che ha contratto il virus, ottenendo la seguente tabella.

| | | Y: tempo di incubazione | | | | |
|-----------|-----------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------|
| | | fino a 12 gg | da 12 a 16 gg (16 escluso) | da 16 a 20 gg (20 escluso) | da 20 a 24 gg (24 escluso) | 24 gg e oltre |
| X: Genere | Maschile | 1 | 2 | 2 | | |
| | Femminile | | | | 2 | 1 |

Il candidato

- Completi la tabella con i dati mancanti.
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità
- Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Esercizio 3)

Un laboratorio di ricerca vuole stimare la varianza di un microscopio elettronico. Per fare questo effettuate 11 misure di un campione di lunghezza nota 5 nm. Le misure (espresse in nm) ottenute sono:

5,01 5,00 4,99 5,01 5,00 5,01 5,00 5,00 5,00 4,98 5,00

Il candidato stimi puntualmente e per intervallo lo scarto quadratico medio delle misurazioni.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi E_1 ed E_2 . Sapendo che i due eventi sono indipendenti e $P(E_1) = 1/2$; $P(E_2) = 1/3$. Il candidato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

- evento E_2 condizionato E_1
- evento E_1 intersezione E_2 .
- evento E_2 unito E_1 .

- Appello del 18 Febbraio 2011 -
Svolgimento Fila A

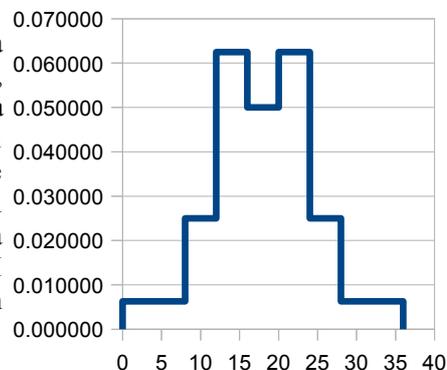
Esercizio 1)

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare un tempo che concettualmente è continuo).

b) *Se possibile, tracci l'istogramma..*

L'istogramma è una rappresentazione comunemente utilizzata quando si tratta un dato quantitativo continuo che, per diverse esigenze, viene rappresentato in classi di modalità c_i . Il grafico riporta le modalità sull'asse delle ascisse e sulle ordinate la densità di frequenza di ogni classe. Il grafico si compone di rettangoli fra di loro adiacenti la cui base si ricava dagli estremi della classe mentre l'altezza, l'altezza coincide con la densità di frequenza, pertanto l'area di ogni rettangolo sarà uguale alla frequenza relativa della classe. A lato si riporta l'istogramma richiesto. I conti per ricavare il suddetto istogramma sono riportati nella tabella in calce. (colonne f_i e $f_i/(sup_i - inf_i)$)



| i | inf _i | sup _i | c _i | sup _i -inf _i | n _i | f _i | F _i | f _i /(sup _i -inf _i) | c _i f _i | c _i ² | c _i ² f _i |
|--------|------------------|------------------|----------------|------------------------------------|----------------|----------------|----------------|---|-------------------------------|-----------------------------|--|
| 1 | 0 | 8 | 4 | 8 | 1 | 0,050 | 0,050 | 0,006250 | 0,200 | 16 | 0,80 |
| 2 | 8 | 12 | 10 | 4 | 2 | 0,100 | 0,150 | 0,025000 | 1,000 | 100 | 10,00 |
| 3 | 12 | 16 | 14 | 4 | 5 | 0,250 | 0,400 | 0,062500 | 3,500 | 196 | 49,00 |
| 4 | 16 | 20 | 18 | 4 | 4 | 0,200 | 0,600 | 0,050000 | 3,600 | 324 | 64,80 |
| 5 | 20 | 24 | 22 | 4 | 5 | 0,250 | 0,850 | 0,062500 | 5,500 | 484 | 121,00 |
| 6 | 24 | 28 | 26 | 4 | 2 | 0,100 | 0,950 | 0,025000 | 2,600 | 676 | 67,60 |
| 7 | 28 | 36 | 32 | 8 | 1 | 0,050 | 1,000 | 0,006250 | 1,600 | 1024 | 51,20 |
| Totali | | | | | 20 | 1 | | | 18 | | 364,40 |

c) *Se possibile, calcoli la mediana.*

La mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra la metà delle osservazioni meno una. Nel caso in esame non vi sono le osservazioni, in quanto queste sono raccolte in classi, pertanto la mediana si indica come il valore che bipartisce l'area dell'istogramma. Dal calcolo delle frequenze cumulate (F_i) si vede come la mediana cada nella 4 classe (prima classe a superare lo 0,5). Per determinare l'esatto valore basta imporre che l'area presente nella classe 5 sia sufficiente a raggiungere il valore di 0.5. Si ottiene quindi il seguente conto:

$$(q_2 - 16) * 0.05 = (0.5 - 0.4) \Rightarrow q_2 - 16 = 0.1 / 0.05 \Rightarrow q_2 = 2 + 16 = 18$$

d) *Se possibile, si calcoli la varianza.*

La varianza nel caso siano presenti osservazioni raggruppate in classi si calcola utilizzando come modalità i valori centrali delle classi (c_i). Nella tabella alla fine del punto b) è stato riportato il calcolo della varianza utilizzando la formula abbreviata.

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^M c_i^2 * f_i \right) - \left(\sum_{i=1}^M c_i * f_i \right)^2 = 364,40 - 18^2 = 40,4$$

Il risultato è stato ottenuto calcolando la media (somma colonna $c_i f_i$) e della media dei quadrati dei valori centrali (ultime due colonne della tabella).

Esercizio 2)

a) *Completi la tabella con i dati mancanti.*

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne deve coincidere con i dati illustrati

nell'esercizio 1. Si noti che nella nuova formulazione alcune classi di modalità sono state aggregate.

| | | Y:tempo di incubazione | | | | |
|----------|-----------|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------|
| | | fino a 12 gg | da 12 a 16 gg (16 escluso) | da 16 a 20 gg (20 escluso) | da 20 a 24 gg (24 escluso) | 24 gg e oltre |
| X:Genere | Maschile | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| | Femminile | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 |

b) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione*

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 3 cui corrispondono due modalità (distribuzione bi-modale)

(Maschile; Da 20 a 24 gg) e (Femminile; Da 12 a 16 gg)

c) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità*

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) *Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.*

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

nella tabella si riportano le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi

| | | Y:tempo di incubazione | | | | | Totali |
|----------|-----------|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------|--------|
| | | fino a 12 gg | da 12 a 16 gg (16 escluso) | da 16 a 20 gg (20 escluso) | da 20 a 24 gg (24 escluso) | 24 gg e oltre | |
| X:Genere | Maschile | 1 (1.5) | 2 (2.5) | 2 (2) | 3 (2.5) | 1 (1.5) | 10 |
| | Femminile | 2 (1.5) | 3 (2.5) | 2 (2) | 2 (2.5) | 2 (1.5) | 10 |
| Totali | | 3 | 5 | 4 | 5 | 3 | 20 |

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione non è verificata si può concludere che non è possibile ricevere l'informazione richiesta dalle osservazioni fornite.

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano diverse misure di una grandezza nota. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale X avente distribuzione ignota e valore atteso 5.

Si sono effettuate N= 11 estrazioni aventi M=4 modalità

a) *stimare puntualmente la varianza.*

Continuando con il modello precedentemente fatto il punto richiede di stimare lo scarto quadratico medio ovvero la radice quadrata di $Var[X]$. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria (s^2). Il calcolo di s^2 in presenza di osservazioni ripetute, (frequenze assolute maggiori di uno) è dato dalla seguente:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^M n_i (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{0.0008}{10} = 0.00008 \Rightarrow S = 0.00894$$

Il calcolo della varianza è stato fatto utilizzando la seguente tabella

| i | x_i | n_i | $x_i n_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $n_i(x_i - \bar{x})^2$ |
|---------------|-------|-------|-----------|-----------------|---------------------|------------------------|
| 1 | 4,98 | 1 | 4,9800 | -0,0200 | 0,0004 | 0,00040 |
| 2 | 4,99 | 1 | 4,9900 | -0,0100 | 0,0001 | 0,00010 |
| 3 | 5,00 | 6 | 30,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,00000 |
| 4 | 5,01 | 3 | 15,0300 | 0,0100 | 0,0001 | 0,00030 |
| Totali | | 11 | 55,0000 | | | 0,00080 |

b) *stimare per intervallo la varianza.*

La stima della varianza per intervallo si ha considerando la distribuzione di partenza gaussiana ed n grande. Nel caso in esame considerare la distribuzione di partenza gaussiana non introduce un errore elevato (trattasi di errori di misura quindi nello specifico simmetrici) per quanto riguarda la dimensione del campione è possibile ritenere $n = 11$ una dimensione sufficiente.

Validare le ipotesi si ha che la stima per intervallo della varianza è data dalla

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

ponendo un livello del 5 % si ha che: $Var[X] \in \left[\frac{10 \cdot 0.00008}{20.5}; \frac{10 \cdot 0.00008}{3.25} \right] = [0.000039; 0.000246]$

Pertanto l'intervallo richiesto è: $sqm = \sqrt{Var[X]} \in [\sqrt{0.000039}; \sqrt{0.000246}] = [0.0062; 0.01569]$

Esercizio 4)

Si noti come l'esercizio fissa la probabilità degli eventi elementari e richiede il computo delle probabilità di eventi complessi, pertanto richiede l'applicazione della definizione assiomatica di probabilità.

a) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1*

La probabilità richiesta $P(E_2 | E_1)$ viene calcolata immediatamente ricordando che gli eventi statisticamente indipendenti sono quelli per cui il verificarsi di un evento non altera la probabilità di verificarsi dell'altro. Pertanto si ha che $P(E_2 | E_1) = P(E_2) = 1/3$.

b) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .*

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi indipendenti (ovvero che i due eventi si verifichino entrambi) è data dal prodotto delle due probabilità. Si ha infatti

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Si noti come lo stesso risultato poteva essere raggiunto elaborando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(E_2|E_1) = P\left(\frac{E_1 \cap E_2}{E_1}\right) \Rightarrow P(E_2|E_1)P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow P(E_2)P(E_1) = P(E_1 \cap E_2)$$

E_1, E_2 indep.

c) *Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2 .*

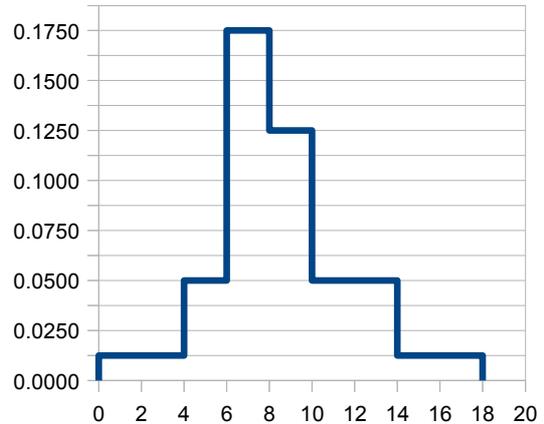
Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{2}{3}$$

- Appello del 18 Febbraio 2011 - Fila B

Esercizio 1)

Si vuole valutare il tempo di incubazione (espresso in giorni) di un agente virale. Da un'osservazione su di una popolazione di 20 elementi si è ottenuto l'istogramma nella figura a lato.



Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Fornisca una rappresentazione tabellare dei dati (mettendo in risalto le frequenze assolute).
- Se possibile, calcoli la mediana.
- Se possibile, calcoli la varianza.

N.b. L'estremo superiore delle singole classi di modalità è da ritenersi escluso

Esercizio 2)

Per verificare la difficoltà di un corso di laurea si è voluto monitorare il numero di anni fuori corso che un laureato magistrale ha maturato durante il suo percorso di studi. I dati relativi ad un campione di 100 laureati è riassunto nella seguente tabella a doppia entrata.

| | | Y: anni fuori corso laurea triennale | | | | Totali |
|-------------------------------|---|--------------------------------------|----|----|----|--------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| X:Anni fuori corso magistrale | 0 | | 6 | 3 | | 10 |
| | 1 | 6 | | 10 | 10 | |
| | 2 | 3 | 10 | | 10 | 40 |
| Totali | | | 40 | 30 | 20 | 100 |

Il candidato

- Completare la tabella con i dati mancanti.
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione.
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità.
- Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Esercizio 3)

Si supponga di modellare mediante una v.c. W il numero di anni fuori corso totali (triennio + biennio) accumulati da un laureato specialistico. Date le osservazioni dell'Esercizio 2 il candidato stimi puntualmente e per intervallo il valore atteso di W.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi E_1 ed E_2 . Sapendo che i due eventi sono incompatibili e che $P(E_1) = 1/2$; $P(E_2) = 1/3$. Il candidato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

- evento E_1 intersezione E_2
- evento E_2 condizionato E_1
- evento E_2 unito E_1 .

- Appello del 18 Febbraio 2011 -
Svolgimento - Fila B

Esercizio 1)

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare un tempo che concettualmente è continuo).

b) *Fornisca una rappresentazione tabellare dei dati.*

L'istogramma è una rappresentazione comunemente utilizzata quando si tratta un dato quantitativo continuo che viene, per diverse esigenze, raccolto in classi di modalità c_i . Il grafico riporta le modalità sull'asse delle ascisse e sulle ordinate la densità di frequenza di ogni classe. Esso si compone di un rettangolo per ogni classe. I rettangoli sono fra di loro adiacenti e dalle loro basi si ricavano gli estremi della classe corrispondente (sup_i e inf_i) mentre l'altezza coincide con la densità di frequenza (d_i). Quindi l'area di ogni rettangolo sarà uguale alla frequenza relativa della classe ($f_i = d_i * (sup_i - inf_i)$). Pertanto, la frequenza assoluta può essere ottenuta moltiplicando l'area del rettangolo per la dimensione del campione ($N=20$). Applicando quanto descritto è possibile ottenere la seguente rappresentazione tabellare.

| i | inf _i | sup _i | sup _i -inf _i | d _i | f _i | n _i | F _i | c _i | c _i f _i | c _i ² | c _i ² f _i |
|---------------|------------------|------------------|------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-----------------------------|--|
| 1 | 0 | 4 | 4 | 0,01250 | 0,050 | 1 | 0,050 | 2 | 0,10 | 4 | 0,200 |
| 2 | 4 | 6 | 2 | 0,05000 | 0,100 | 2 | 0,150 | 5 | 0,50 | 25 | 2,500 |
| 3 | 6 | 8 | 2 | 0,17500 | 0,350 | 7 | 0,500 | 7 | 2,45 | 49 | 17,150 |
| 4 | 8 | 10 | 2 | 0,12500 | 0,250 | 5 | 0,750 | 9 | 2,25 | 81 | 20,250 |
| 5 | 10 | 14 | 4 | 0,05000 | 0,200 | 4 | 0,950 | 12 | 2,40 | 144 | 28,800 |
| 6 | 14 | 18 | 4 | 0,01250 | 0,050 | 1 | 1,000 | 16 | 0,80 | 256 | 12,800 |
| Totali | | | | | 1,000 | 20 | | | 8,50 | | 81,70 |

c) *Se possibile, calcoli la mediana.*

La mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra la metà delle osservazioni meno una. Nel caso in esame non vi sono le osservazioni, in quanto queste sono raccolte in classi, pertanto la mediana si indica come il valore che bipartisce l'area dell'istogramma. Dal calcolo delle frequenze cumulate (F_i) si vede come la mediana cada all'estremità superiore della classe 3. Pertanto si può asserire $q_2 = 8$.

d) *Se possibile, si calcoli la varianza.*

La varianza nel caso siano presenti osservazioni raggruppate in classi si calcola utilizzando come modalità i valori centrali delle classi (c_i). Nella tabella alla fine del punto b) è stato riportato il calcolo della varianza utilizzando la formula abbreviata.

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^M c_i^2 * f_i \right) - \left(\sum_{i=1}^M c_i * f_i \right)^2 = 81,70 - 8,5^2 = 9,45$$

Il risultato è stato ottenuto calcolando la media (somma colonna $c_i f_i$) e della media dei quadrati dei valori centrali (ultime due colonne della tabella).

Esercizio 2)

a) *Completi la tabella con i dati mancanti.*

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne e delle righe deve coincidere con le distribuzioni marginali e con il totale delle osservazioni ($N = 100$).

| | | Y: anni fuori corso laurea triennale | | | | Totali |
|-------------------------------|---|--------------------------------------|---------|---------|---------|--------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| X:Anni fuori corso magistrale | 0 | 1 (1) | 6 (4) | 3 (3) | 0 (2) | 10 |
| | 1 | 6 (5) | 24 (20) | 10 (15) | 10 (10) | 50 |
| | 2 | 3 (4) | 10 (16) | 17 (16) | 10 (8) | 40 |
| Totali | | 10 | 40 | 30 | 20 | 100 |

b) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione*

La bivariata è composta da due caratteri quantitativi discreti. Pertanto è possibile calcolare la media come indice di posizione. In una bi-variata la media può essere calcolata raccogliendo in un vettore le medie dei due caratteri calcolate separatamente a partire dalle rispettive marginali.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M_x} n_{i,+} \cdot x_i = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 40}{100} = \frac{130}{100} = 1.3$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M_y} n_{+,j} \cdot y_j = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20}{100} = \frac{160}{100} = 1.6$$

da cui si ricava che la media è (1.3; 1.6).

c) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità*

Per serie bivariate continue o discrete l'indice di variabilità migliore è dato dalla matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone di 3 distinti valori, le due varianze dei distinti caratteri e la covarianza, della serie bivariata.

Si seguito riportiamo i calcoli per le due varianze per i singoli caratteri:

X: Anni fuori corso durante la laurea triennale

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{M_x} n_{i,+} \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{10 \cdot 0^2 + 50 \cdot 1^2 + 40 \cdot 2^2}{100} - 1.3^2 = 2.1 - 1.69 = 0.41$$

Y: Anni fuori corso durante la laurea magistrale

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^{M_y} n_{+,j} \cdot y_j^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{10 \cdot 0^2 + 40 \cdot 1^2 + 30 \cdot 2^2 + 20 \cdot 3^2}{100} - 1.6^2 = 3.4 - 2.56 = 0.84$$

La covarianza si ottiene

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} n_{i,j} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = 0.14$$

Pertanto la matrice varianza covarianza risulta essere

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.14 \\ 0.14 & 0.84 \end{bmatrix}$$

d) *Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.*

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} \cdot n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

nella tabella a doppia entrata indicata al punto a) si riportano le frequenze teoriche fra parentesi

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione non è verificata si può concludere che non è possibile ricevere l'informazione richiesta dalle osservazioni fornite.

Esercizio 3)

La W è combinazione lineare delle v.c. X ed Y introdotte nell'esercizio 2, in particolare si ha che $W = X + Y$. Ciononostante non è possibile utilizzare le informazioni calcolate su X ed Y (valore atteso e varianza) per trarre conclusioni su W in quanto non siamo in grado di verificare l'indipendenza di X ed Y . Pertanto si deve considerare la distribuzione di W e procedere al calcolo senza considerare le informazioni ottenute dall'analisi delle vv.cc. X ed Y . La distribuzione è riportata nella tabella sottostante

| i | w_i | n_i | $w_i n_i$ | $w_i - \bar{w}$ | $(w_i - \bar{w})^2$ | $n_i(w_i - \bar{w})^2$ |
|--------|-------|-------|-----------|-----------------|---------------------|------------------------|
| 1 | 0 | 1 | 0 | -2,9 | 8,41 | 8,41 |
| 2 | 1 | 12 | 12 | -1,9 | 3,61 | 43,32 |
| 3 | 2 | 30 | 60 | -0,9 | 0,81 | 24,3 |
| 4 | 3 | 20 | 60 | 0,1 | 0,01 | 0,2 |
| 5 | 4 | 27 | 108 | 1,1 | 1,21 | 32,67 |
| 6 | 5 | 10 | 50 | 2,1 | 4,41 | 44,1 |
| Totali | | 100 | 290 | | | 153 |

Da cui si ricavano facilmente sfruttando i calcoli in tabella media ($\bar{w} = 290/100 = 2.9$), varianza ($\sigma^2 = 153 / 100 = 1.53$) e varianza campionaria ($s^2 = 153/99 = 1.55$)

La stima puntuale del valore atteso di W è coincide con la media campionaria $E[W] = 2.9$.

La stima per intervallo del valore atteso non conoscendo il corretto valore della varianza della v.c. W è data dalla formula $E[W] \in \left[\bar{w} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{w} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$ dove s è la radice quadrata della varianza campionaria, α è il livello di confidenza e Z è la normale standardizzata.

Fissando un livello di confidenza al 5% si ottiene la seguente stima.

$$E[W] \in \left[\bar{w} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}} ; \bar{w} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}} \right] = \left[2.9 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.55}{100}} ; 2.9 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.55}{100}} \right] = [2.66 ; 3.14]$$

Esercizio 4)

Si noti come l'esercizio fissi la probabilità degli eventi elementari e richieda il computo delle probabilità di eventi complessi, pertanto richiede l'applicazione della definizione assiomatica di probabilità.

a) Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .

Due eventi incompatibili non possono verificarsi contemporaneamente, pertanto l'insieme intersezione è l'insieme nullo. Quindi la probabilità dell'evento intersezione (ovvero l'evento rappresentato dal verificarsi contemporaneo dei due eventi di partenza) è nulla.

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

b) Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

La probabilità richiesta viene calcolata applicando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(E_2|E_1) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{0}{P(E_1)} = 0$$

c) Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2 .

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione, si ha che

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

- Appello del 24 Giugno 2011 - Fila A

Esercizio 1)

Si vuole stabilire il livello medio di glucosio che un adulto sano presenta nel sangue durante le ore di sonno. Pertanto si è condotta una sperimentazione in cui sono stati coinvolti 10 soggetti. Per ogni soggetto si sono effettuati 3 prelievi (uno ogni due ore) ottenendo le seguenti misurazioni di concentrazione di glucosio espresse in *mg/dl* ed ordinate in maniera crescente.

140 140 140 143 145 145 147 148 148 148
 148 148 149 149 149 150 151 151 151 151
 152 152 152 152 152 155 156 158 160 170

Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Se possibile, tracci il box plot.
- Se possibile, calcoli la varianza.
- Se possibile, calcoli un indice di asimmetria adeguato.

Esercizio 2)

I dati raccolti nel precedente esercizio sono stati organizzati tenendo conto del diverso genere del soggetto coinvolto nella sperimentazione, ottenendo la seguente tabella.

| | | Y: concentrazione di glucosio mg/dl | | | | | | |
|-----------|---|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------|----|
| | | fino a 142 | da 143 a 149 (149 escluso) | da 149 a 152 (152 escluso) | da 152 a 155 (155 escluso) | da 155 a 160 (160 escluso) | 160 ed oltre | |
| X: Genere | M | 3 | 6 | 4 | | | | |
| | F | | | | 1 | 2 | 2 | 12 |
| | | 3 | 9 | | 5 | 3 | 2 | |

Il candidato

- completi la tabella con i dati mancanti.
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
- se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Esercizio 3)

Il candidato stimi puntualmente e per intervallo il valore atteso della concentrazione di glucosio in un adulto basandosi sulle misurazioni di concentrazione riportate nell'Esercizio 1.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi relativi ai dati dell'Esercizio 2

E_1 : estraendo a caso un componente della sperimentazione, questa è una donna.

E_2 : estraendo a caso una misura di concentrazione di glucosio fra le 30 effettuate durante la sperimentazione, questa è compresa fra 152 e 155 (155 escluso).

Il candidato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

- E_1 ed E_2
- evento E_1 intersezione E_2
- evento E_2 condizionato E_1
- evento E_2 unito E_1 .

- Appello del 24 Giugno 2011 -
Svolgimento

Esercizio 1)

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare una concentrazione che concettualmente è continua).

b) *Se possibile, tracci il boxplot.*

Il box-plot è una rappresentazione grafica utile per rappresentare dati quantitativi siano essi continui o discreti. Deve essere infatti possibile calcolare i quartili delle osservazioni e poter svolgere semplici operazioni di conto. Come primo passo si debbono valutare i quartili. Il primo quartile è quell'osservazione che lascia alla sua sinistra un quarto delle restanti osservazioni (ovvero $\frac{N-1}{4}=7.25$) poiché il numero non risulta tondo il primo quartile si otterrà mediante l'ottava e la nona osservazione. Con una procedura analoga si ottiene che la mediana (secondo quartile) risulterà la media fra la 15^a e la 16^a osservazione mentre il terzo quartile sarà la media fra la 21^a e la 22^a osservazione. Si ha:

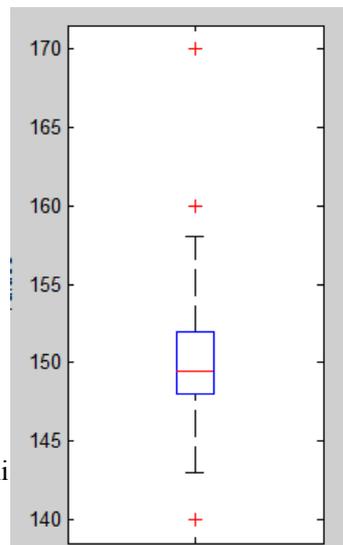
$$q_1 = \frac{o_8 + o_9}{2} = \frac{148 + 148}{2} = 148 \quad q_2 = \frac{o_{15} + o_{16}}{2} = \frac{149 + 150}{2} = 149.5$$

$$q_3 = \frac{o_{21} + o_{22}}{2} = \frac{152 + 152}{2} = 152$$

Per poter tracciare il box-plot si devono identificare gli estremi dei due "baffi" che completano il boxplot. Il baffo inferiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la minima osservazione ($o_I=140$); mentre il baffo superiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la massima osservazione ($o_N=170$). Posto la costante $k=1.5$ si ha che:

$$VAI = q_1 - 1.5 * (q_3 - q_1) = 142 \quad VAS = q_3 + 1.5 * (q_3 - q_1) = 158$$

Da cui si ricava agevolmente diagramma a lato in cui si nota la presenza di alcuni outliers.



c) *Se possibile, calcoli la varianza.*

Lo scato quadratico medio (σ) può essere calcolato per ogni carattere quantitativo, e si ha che

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^M f_i * m_i^2 \right) - \bar{o}^2 = 22536 - 22500 = 36 \quad \text{da cui} \quad \sigma = \sqrt{36} = 6$$

I conti sono stati svolti nella tabella in calce.

| i | m_i | n_i | f_i | $m_i f_i$ | m_i^2 | $m_i^2 f_i$ | $m_i - \bar{x}$ | $(m_i - \bar{x})^3$ | $(m_i - \bar{x})^3 f_i$ |
|---------------|-------|-----------|----------|------------|-----------|--------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 1 | 140 | 3 | 0.100 | 14 | 19600 | 1960 | -10 | -1000 | -100.000 |
| 2 | 143 | 1 | 0.033 | 4.77 | 20449 | 681.63 | -7 | -343 | -11.433 |
| 3 | 145 | 2 | 0.067 | 9.67 | 21025 | 1401.67 | -5 | -125 | -8.333 |
| 4 | 147 | 1 | 0.033 | 4.9 | 21609 | 720.3 | -3 | -27 | -0.900 |
| 5 | 148 | 5 | 0.167 | 24.67 | 21904 | 3650.67 | -2 | -8 | -1.333 |
| 6 | 149 | 3 | 0.100 | 14.9 | 22201 | 2220.1 | -1 | -1 | -0.100 |
| 7 | 150 | 1 | 0.033 | 5 | 22500 | 750 | 0 | 0 | 0.000 |
| 8 | 151 | 4 | 0.133 | 20.13 | 22801 | 3040.13 | 1 | 1 | 0.133 |
| 9 | 152 | 5 | 0.167 | 25.33 | 23104 | 3850.67 | 2 | 8 | 1.333 |
| 10 | 155 | 1 | 0.033 | 5.17 | 24025 | 800.83 | 5 | 125 | 4.167 |
| 11 | 156 | 1 | 0.033 | 5.2 | 24336 | 811.2 | 6 | 216 | 7.200 |
| 12 | 158 | 1 | 0.033 | 5.27 | 24964 | 832.13 | 8 | 512 | 17.067 |
| 13 | 160 | 1 | 0.033 | 5.33 | 25600 | 853.33 | 10 | 1000 | 33.333 |
| 14 | 170 | 1 | 0.033 | 5.67 | 28900 | 963.33 | 20 | 8000 | 266.667 |
| Totali | | 30 | 1 | 150 | -- | 22536 | -- | -- | 207.8 |

d) Se possibile, calcoli un indice di asimmetria.

Un indice di asimmetria per caratteri quantitativi è il momento centrale terzo standardizzato

$$y_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^M f_i (m_i - \bar{o})^3}{\sigma^3} = \frac{207.8}{6^3} = 0.926$$

I conti sono stati svolti nella tabella riportata in precedenza.

Esercizio 2)

a) Completate la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne deve coincidere con i dati illustrati nell'esercizio 1. Si noti che nella nuova formulazione le osservazioni sono state aggregate in classi. Le frequenze assolute richieste sono riportate nella tabella seguente (numeri non tra parentesi).

| | | Y: concentrazione di glucosio mg/dl | | | | | | |
|-----------|---|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------|-----------|
| | | fino a 142 | da 143 a 149 (149 escluso) | da 149 a 152 (152 escluso) | da 152 a 155 (155 escluso) | da 155 a 160 (160 escluso) | 160 ed oltre | |
| X: Genere | M | 3 (1.8) | 6 (5.4) | 4 (4.8) | 4 (3) | 1 (1.8) | 0 (1.2) | 18 |
| | F | 0 (1.2) | 3 (3.6) | 4 (3.2) | 1 (2) | 2 (1.2) | 2 (0.8) | 12 |
| | | 3 | 9 | 8 | 5 | 3 | 2 | 30 |

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 6 cui corrisponde la modalità (Maschile; da 143 a 149).

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti, nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi sono state inserite nella tabella riportata al punto a).

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione non è verificata si può concludere che non è possibile ricevere l'informazione richiesta dalle osservazioni fornite. Un modo per ottenere delle frequenze teoriche superiori a 5 (e quindi poter eseguire il test) è quello di accorpare più classi nella speranza di ottenere delle frequenze attese migliori. (si veda la soluzione della seconda fila).

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano diverse misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale

X : concentrazione di glucosio in un adulto

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $N = 30$ estrazioni in cui si sono rilevate $M = 14$ modalità

a) *stimare puntualmente il valore atteso.*

Continuando con il modello precedentemente fatto il punto richiede di stimare $E[X]$. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la media campionaria. Il calcolo è già stato effettuato nello svolgimento del primo esercizio, ottenendo

$$E[X] = \bar{o} = 150$$

b) *stimare per intervallo del valore atteso.*

La stima del valore atteso per intervallo ha come ipotesi che considerando la distribuzione di partenza gaussiana ed n grande. Nel caso in esame considerare la distribuzione di partenza gaussiana non introduce un errore elevato (trattasi di errori di misura quindi nello specifico simmetrici) per quanto riguarda la dimensione del campione è possibile ritenere $N = 30$ una dimensione sufficiente.

Validate le ipotesi si ha che la stima per intervallo del valore atteso in caso che la varianza della popolazione sia ignota è data dalla

$$E[X] \in \left[\bar{o} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{o} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

ponendo un livello di confidenza del 95 % e ricordando la formula del calcolo della varianza campionaria si ha che:

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = 36 \frac{30}{29} = 6 \sqrt{\frac{30}{29}} \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Pertanto l'intervallo richiesto è: $E[X] \in \left[150 - 1.96 \frac{6}{\sqrt{30}} ; 150 + 1.96 \frac{6}{\sqrt{30}} \right] = [152.18 ; 147.82]$

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

Le due probabilità possono essere calcolate utilizzando la definizione frequentistica, dove gli esiti favorevoli vengono determinati dalle marginali della tabella a doppia entrata dell'esercizio 2.

$$P(E_1) = 12/30 \quad P(E_2) = 5/30$$

b) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .*

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi (ovvero che i due eventi si verificano entrambi) è ottenibile mediante la definizione frequentistica della probabilità. Si ha infatti ottenuti i casi favorevoli dalla tabella a doppia entrata (casella in posizione 2,4) si ha che

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{30}$$

c) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1*

Applicando la definizione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/30}{12/30} = \frac{1}{12}$$

d) *Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2 .*

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione, si ha che

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{12}{30} + \frac{5}{30} - \frac{1}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

- Appello del 24 Giugno 2011 - Fila B

Esercizio 1)

Si vuole stabilire il livello medio di glucosio che un adulto sano presenta nel sangue durante le ore di sonno. Pertanto si è condotta una sperimentazione in cui sono stati coinvolti 10 soggetti. Per ogni soggetto si sono effettuati 3 prelievi (uno ogni due ore) ottenendo le seguenti misurazioni di concentrazione di glucosio espresse in *mg/dl* ed ordinate in maniera crescente.

140 140 140 143 145 145 147 148 148 148
 148 148 149 149 149 150 151 151 151 151
 152 152 152 152 152 155 156 158 160 170

Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Se possibile, tracci l'istogramma.
- Se possibile, calcoli un indice di curtosi adeguato.
- Se possibile, calcoli la varianza.

Esercizio 2)

I dati raccolti nel precedente esercizio sono stati organizzati tenendo conto del diverso genere del soggetto coinvolto nella sperimentazione, ottenendo la seguente tabella.

| | | Y: concentrazione di glucosio mg/dl | | Marginali |
|-----------|-----------|-------------------------------------|----------------------------|-----------|
| | | da 149 a 150 (150 escluso) | da 150 a 170 (170 incluso) | |
| X: Genere | Maschile | 11 | | |
| | Femminile | | | 12 |
| Marginali | | | 15 | |

Il candidato

- completi la tabella con i dati mancanti.
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
- se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Esercizio 3)

Il candidato stimi puntualmente e per intervallo la varianza della concentrazione di glucosio in un adulto basandosi sulle misurazioni di concentrazione riportate nell'Esercizio 1.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi relativi ai dati dell'Esercizio 2

E_1 : estraendo a caso un componente della sperimentazione, questo è un uomo.

E_2 : estraendo a caso una misura di concentrazione di glucosio fra le 30 effettuate durante la sperimentazione, questa è maggiore di 139.

Il candidato valuti calcoli le probabilità dei seguenti eventi

- le probabilità di E_1 ed E_2
- la probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2
- se i due eventi sono statisticamente indipendenti

- Appello del 24 Giugno 2011 -
Svolgimento- Fila B

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare una concentrazione che concettualmente è continua).

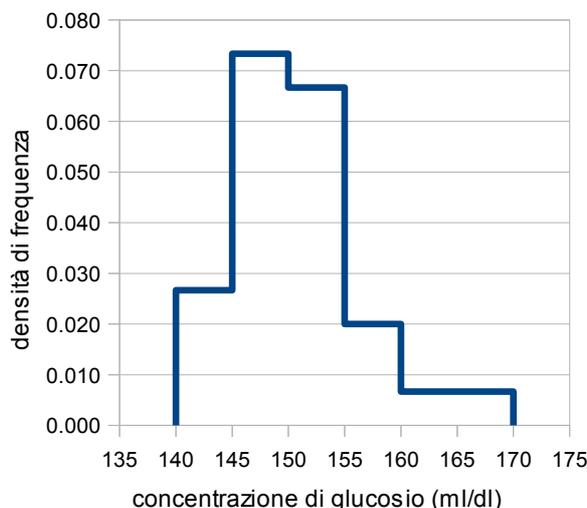
b) Se possibile, tracci si tracci l'istogramma.

L'istogramma è una rappresentazione utilizzata per rappresentare dati quantitativi continui raggruppati in classi. Pertanto per ottenere l'istogramma i dati debbono essere raccolti in classi. Per determinare il numero delle classi C si può utilizzare la seguente formula empirica.

$$C = 1 + \log_2 N = 1 + \log_2 30 = 1 + 4.907 \approx 6$$

Utilizzando classi aventi eguale ampiezza si ha che l'ampiezza di una classe è

$$sup_i - inf_i = \frac{o_N - o_1}{C} = \frac{170 - 140}{6} = 5$$



Procedendo con i conti riportati nella tabella sotto indicata si ha l'istogramma a lato.

| i | inf _i | sup _i | sup _i -inf _i | n _i | f _i | f _i /(sup _i -inf _i) |
|---------------|------------------|------------------|------------------------------------|----------------|----------------|---|
| 1 | 140 | 145 | 5 | 4 | 0.13 | 0.027 |
| 2 | 145 | 150 | 5 | 11 | 0.37 | 0.073 |
| 3 | 150 | 155 | 5 | 10 | 0.33 | 0.067 |
| 4 | 155 | 160 | 5 | 3 | 0.1 | 0.020 |
| 5 | 160 | 165 | 5 | 1 | 0.03 | 0.007 |
| 6 | 165 | 170 | 5 | 1 | 0.03 | 0.007 |
| Totali | | | --- | 30 | 1.00 | --- |

N.b. gli estremi superiori sono da ritenersi esclusi dalla classe per ogni classe tranne l'ultima per cui è incluso.

c) Se possibile, calcoli la varianza.

La varianza può essere calcolata per ogni carattere quantitativo, quindi anche nel caso in esame e si ha che

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^M f_i * m_i^2 \right) - \bar{o}^2 = 22536 - 22500 = 36 \quad \text{I conti sono stati svolti nella tabella in calce.}$$

| i | m _i | n _i | f _i | m _i f _i | m _i ² | m _i ² f _i | m _i - \bar{x} | (m _i - \bar{o}) ⁴ | (m _i - \bar{o}) ⁴ f _i |
|---------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-----------------------------|--|----------------------------|--|---|
| 1 | 140 | 3 | 0.100 | 14 | 19600 | 1960 | -10 | 10000 | 1000.000 |
| 2 | 143 | 1 | 0.033 | 4.77 | 20449 | 681.63 | -7 | 2401 | 80.033 |
| 3 | 145 | 2 | 0.067 | 9.67 | 21025 | 1401.67 | -5 | 625 | 41.667 |
| 4 | 147 | 1 | 0.033 | 4.9 | 21609 | 720.3 | -3 | 81 | 2.700 |
| 5 | 148 | 5 | 0.167 | 24.67 | 21904 | 3650.67 | -2 | 16 | 2.667 |
| 6 | 149 | 3 | 0.100 | 14.9 | 22201 | 2220.1 | -1 | 1 | 0.100 |
| 7 | 150 | 1 | 0.033 | 5 | 22500 | 750 | 0 | 0 | 0.000 |
| 8 | 151 | 4 | 0.133 | 20.13 | 22801 | 3040.13 | 1 | 1 | 0.133 |
| 9 | 152 | 5 | 0.167 | 25.33 | 23104 | 3850.67 | 2 | 16 | 2.667 |
| 10 | 155 | 1 | 0.033 | 5.17 | 24025 | 800.83 | 5 | 625 | 20.833 |
| 11 | 156 | 1 | 0.033 | 5.2 | 24336 | 811.2 | 6 | 1296 | 43.200 |
| 12 | 158 | 1 | 0.033 | 5.27 | 24964 | 832.13 | 8 | 4096 | 136.533 |
| 13 | 160 | 1 | 0.033 | 5.33 | 25600 | 853.33 | 10 | 10000 | 333.333 |
| 14 | 170 | 1 | 0.033 | 5.67 | 28900 | 963.33 | 20 | 160000 | 5333.333 |
| Totali | | 30 | 1 | 150 | -- | 22536 | -- | -- | 6997.2 |

d) Se possibile, calcoli un indice di curtosi.

Un indice di curtosi per caratteri quantitativi è il momento centrale quarto standardizzato

$$y_1 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\sum_{i=1}^M f_i (m_i - \bar{o})^4}{(\sigma^2)^2} = \frac{6997.2}{36^2} = 5.40$$

I conti sono stati svolti nella tabella riportata in precedenza.

Esercizio 2)

a) Completati la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne deve coincidere con i dati illustrati nell'esercizio 1. Si noti che nella nuova formulazione le osservazioni sono state aggregate in classi in maniera diversa da quanto fatto nel primo esercizio.

| | | Y: concentrazione di glucosio mg/dl | | Marginali |
|-----------|-----------|-------------------------------------|----------------------------|-----------|
| | | da 149 a 150 (150 escluso) | da 150 a 170 (170 incluso) | |
| X: Genere | Maschile | 11 (9) | 7 (9) | 18 |
| | Femminile | 4 (6) | 8 (6) | 12 |
| Marginali | | 15 | 15 | 30 |

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 12 cui corrisponde la modalità (Femminile; da 149 a 152)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti, nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si ha la convergenza dello stimatore

$$\hat{n}_{i,j} > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^M \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2((M_x - 1)(M_y - 1)).$$

Poiché entrambi i caratteri della bi-variata hanno 2 modalità ($M_x = M_y = 2$), la regione di accettazione per un test al 5 % è la seguente.

$$A = [0; \chi_{0.95}^2(1)] = [0; 3.84]$$

Non rimane che da calcolare il valore dello stimatore e verificare se appartiene alla regione di accettazione.

Il valore dello stimatore è

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} = \frac{(11-9)^2}{9} + \frac{(7-9)^2}{9} + \frac{(4-6)^2}{6} + \frac{(8-6)^2}{6} = \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$$

e risulta interno ad A . Quindi l'ipotesi di indipendenza viene accettata.

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano diverse misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale

X : concentrazione di glucosio in un adulto

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $N = 30$ estrazioni in cui si sono rilevate $M = 14$ modalità

a) stimare puntualmente la varianza.

Continuando con il modello precedentemente fatto il punto richiede di stimare $\text{Var}[X]$. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria. Ricordando il legame fra la varianza di un campione e la varianza campionaria si ha che

$$s^2 = \sigma^2 \frac{N}{N-1} = 36 \frac{30}{29} = 37.24$$

(si ricorda che la varianza è stata calcolata nel primo esercizio)

b) stimare per intervallo del valore atteso.

La stima del valore atteso per intervallo ha come ipotesi che considerando la distribuzione di partenza gaussiana ed n grande. Nel caso in esame considerare la distribuzione di partenza gaussiana è un'ipotesi un po' forte ma legittima mentre per quanto riguarda la dimensione del campione è possibile ritenere $N = 30$ una dimensione sufficiente.

Validare le ipotesi si ha che la stima per intervallo della varianza è data dalla

$$\text{Var}[X] \in \left[\frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)}, \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)} \right]$$

ponendo un livello di confidenza del 95% si ha che:

$$\text{Var}[X] \in \left[\frac{(29)36 \frac{30}{29}}{47.5}, \frac{(29)36 \frac{30}{29}}{16.0} \right] = \left[\frac{1080}{47.5}, \frac{1080}{16.0} \right] = [22.74; 67.5]$$

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

Le due probabilità possono essere calcolate utilizzando la definizione frequentistica, dove gli esiti favorevoli vengono determinati dalle marginali della tabella a doppia entrata dell'esercizio 2.

$$P(E_1) = 18/30 = 3/5 = 0.2 \quad P(E_2) = 30/30$$

Si nota come l'evento sia l'evento certo.

b) Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .

La probabilità dell'evento intersezione di un evento con l'evento certo coincide con la probabilità dell'evento non certo

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{5}$$

c) Il candidato valuti se i due eventi sono indipendenti

Avere informazioni su un qualunque evento non può influenzare la probabilità dell'evento certo (esso si verifica sempre)... quindi i due eventi sono per definizioni indipendenti.

- Appello del 08 Luglio 2011 -

Esercizio 1)

Uno studio di analisi veterinarie vuole monitorare il livello di soddisfazione dei pazienti riguardo al trattamento ricevuto. Questo viene espresso mediante cinque possibili valutazioni Insufficiente (I), Scarso (S), Accettabile (A), Discreto (D) e Buono (B). Dopo due settimane si sono ottenute le seguenti valutazioni

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | D | I | S | B | A | I | I | S | A |
| S | D | B | S | A | B | D | A | S | I |
| B | I | D | A | A | D | I | S | D | A |
| D | B | S | I | A | I | D | B | A | D |

Il candidato

- determini la tipologia del carattere.
- illustri la serie utilizzando una rappresentazione grafica opportuna
- descriva cosa indica l'indice di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.
- descriva cosa indicano gli indici di curtosi e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.

Esercizio 2)

Un ricercatore sospetta che la produzione di glucagone da parte del pancreas possa essere stimolata dall'assunzione della vitamina C. Per verificare la sua teoria fa assumere ad un soggetto un preciso quantitativo di vitamina C due ore dopo il pranzo ed osserva la produzione di glucagone dopo 15 minuti dall'assunzione. L'esperimento viene ripetuto per 5 gg ottenendo i seguenti risultati

| Giorno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------|---|----|----|----|----|
| Vitamina C [mg] | 0 | 10 | 50 | 60 | 80 |
| Glucagone [mg/dl] | 1 | 3 | 5 | 6 | 10 |

Il candidato

- descriva il tipo di serie ottenuta e ne fornisca una opportuna rappresentazione grafica.
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità
- Ipotizzando un legame di tipo lineare,
 - calcoli l'opportuna regressione
 - ipotizzi quale sarebbe il livello di glucagone corrispondente ad una ingestione di 92 mg di vitamina C.
 - indichi, motivando numericamente la risposta, se il legame ipotizzato è attendibile.

Esercizio 3)

Il candidato stimi puntualmente e per intervallo la varianza della concentrazione di glucagone in adulto basandosi sulle misurazioni di concentrazione riportate nell'Esercizio 2.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi incompatibili E_1 ed E_2 . Sapendo che $P(E_1) = 0.4$ e $P(E_2) = 50\%$ il candidato calcoli le probabilità dei seguenti eventi:

- evento E_1 intersezione E_2
- evento E_2 condizionato E_1
- evento E_2 unito E_1 .

- Appello dell' 8 Luglio 2011 -
Svolgimento

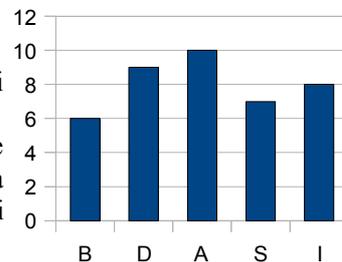
Esercizio 1)

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da giudizi e non numeri) ordinabile (in quanto i giudizi possono essere ordinati).

b) *illustri la serie utilizzando una rappresentazione grafica opportuna.*

Per caratteri qualitativi ordinabili sono possibili due tipologie di rappresentazioni grafiche: il diagramma a barre ed il diagramma a torta. In questa soluzione si è scelto di rappresentare il primo. Un diagramma a barre è costituito da una serie di barre (orizzontali o verticali) poste in un diagramma cartesiano in cui su di un asse son riportate le modalità del carattere e sull'altro si riportano le frequenze assolute.



c) *descriva cosa indica l'indice di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.*

L'indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili sono i primi due. La moda (ovvero la modalità cui corrisponde la modalità maggiore) della serie è A.

d) *descriva cosa indica l'indice di curtosi e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie di dati in esame.*

Gli indici di curtosi indicano quanto la serie di osservazioni si discosta da una distribuzione normale avente stessa media e varianza della serie di osservazioni. Gli indici di curtosi sono calcolabili solo per caratteri quantitativi.

Esercizio 2)

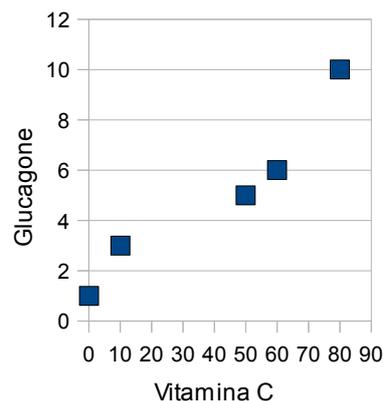
a) *descriva il tipo di serie ottenuta e se ne fornisca una opportuna rappresentazione grafica.*

La serie descritta è una serie bivariata composta dai seguenti caratteri

X: vitamina C fornita dopo il pasto.

Y: glucagone misurato nell'individuo dopo 15 min dal pasto.

Una opportuna rappresentazione per una bivariata in cui tutti i caratteri sono di tipo quantitativo è il diagramma a dispersione riportato a lato



b) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione*

Una serie bivariata ottenuta misurando due caratteri quantitativi ammette due indici di posizione la media e la moda. Poichè la seconda non fornisce informazioni (non vi sono frequenze assolute maggiori di uno) si calcola la media che viene calcolata come il vettore delle medie dei due caratteri. Si ha quindi che

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{200}{5} = 40 \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \frac{25}{5} = 5$$

Da cui la media richiesta è il punto (40 ; 5).

c) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità*

Una serie bivariata composta da due indici carattere quantitativi ammette un indice sintetico di variabilità: la matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone della varianze dei due caratteri e della covarianza della serie. Impostati i conti nella forma tabellare seguente

| i | x_i | y_i | x_i^2 | y_i^2 | $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ |
|---|-------|-------|---------|---------|-----------------|-----------------|----------------------------------|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | -40.000 | -4.000 | 160 |
| 2 | 10 | 3 | 100 | 9 | -30.000 | -2.000 | 60 |
| 3 | 50 | 5 | 2500 | 25 | 10.000 | 0.000 | 0 |
| 4 | 60 | 6 | 3600 | 36 | 20.000 | 1.000 | 20 |
| 5 | 80 | 10 | 6400 | 100 | 40.000 | 5.000 | 200 |
| | 200 | 25 | 12600 | 171 | | | 440.000 |

si possono ricavare i tre indici richiesti

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{12600}{5} - 40^2 = 920 \quad \sigma_y^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right) - \bar{y}^2 = \frac{171}{5} - 5^2 = 9.2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{440}{5} = 88$$

Da cui si ricava la seguente matrice varianza/covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 920 & 88 \\ 88 & 9.2 \end{bmatrix}$$

d.1) *Ipotizzando un legame di tipo lineare, calcoli l'opportuna regressione*

Ipotizzando una modello di tipo lineare $y = ax + b$ si dimostra che i parametri hanno i seguenti valori

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{88}{920} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} = 5 - \frac{88}{920} \cdot 40 = 5 - \frac{88}{23} = \frac{115 - 88}{23} = \frac{27}{23} \quad \text{da cui} \quad \hat{y} = \frac{88}{920}x + \frac{27}{23}$$

d.2) *Ipotizzando un legame di tipo lineare, ipotizzi quale sarebbe il livello di glucagone corrispondente ad una ingestione di 92 mg di vitamina C.*

In questo caso è sufficiente applicare la retta di regressione nel punto in cui si vuole ottenere la stima. Si ha quindi

$$\hat{y} = \frac{88}{920} \cdot 92 + \frac{27}{23} = \frac{88}{10} + \frac{27}{23} = 9.973$$

d.3) *Ipotizzando un legame di tipo lineare, indichi, motivando numericamente la risposta, se il legame ipotizzato è attendibile.*

Una buona stima della bontà dell'approssimazione è data dal coefficiente di correlazione lineare di Pearson

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{88^2}{920 \cdot 9.2} = 0.915$$

Un valore prossimo ad 1 del coefficiente di correlazione lineare del Pearson indica una buona approssimazione del modello adottato.

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano diverse misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale

Y : concentrazione di glucagone in un adulto

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $N = 5$ realizzazioni della v.c.

a) *stimare puntualmente la varianza.*

Continuando con il modello precedentemente fatto il testo richiede di stimare $\text{Var}[Y]$ puntualmente. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria s^2 . Sfruttando i conti svolti nel precedente esercizio, e ricordando la formula della varianza campionaria otteniamo che

$$\text{Var}[Y] = s^2 = \frac{\sigma_y^2}{N-1} = \frac{9.2}{4} = 11.5$$

b) *stimare per intervallo la varianza.*

Nei termini del modello precedentemente illustrato il testo richiede di stimare $\text{Var}[Y]$ per intervallo. Questa stima può essere effettuata ricordando lo stimatore varianza campionaria al crescere della dimensione del campione si tende a distribuirsi come un $\frac{\text{Var}[Y]}{N-1} \chi^2(N-1)$. Pertanto per si ha che la stima voluta ad un livello di confidenza α è data dal seguente intervallo

$$\text{Var}[Y] \in \left[\frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)}, \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)} \right]$$

Considerare $N = 5$ un valore sufficiente per la convergenza dello stimatore è un ipotesi molto forte, quindi si considererebbe valida l'asserzione che mancano dati per fare la stima richiesta. In ogni caso, se si ritenesse la dimensione del campione adeguata si avrebbe la seguente stima al 95%

$$\text{Var}[Y] \in \left[\frac{4 \cdot 11.5}{\chi^2_{0.975}(4)}, \frac{4 \cdot 11.5}{\chi^2_{0.025}(4)} \right] = \left[\frac{47}{11.1}, \frac{47}{0.484} \right] = [4.234; 97.107]$$

Esercizio 4)

I due eventi considerati sono incompatibili il che vuol dire che non possono verificarsi contemporaneamente. In termini probabilistici questo implica che:

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

a) Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .
Vedi definizione iniziale

b) Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

Poiché i due eventi sono incompatibili non è possibile che si verifichi un evento sapendo se che i è verificato l'altro. In ogni caso lo stesso risultati poteva essere ottenuto utilizzando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{0}{0.4} = 0$$

c) Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2 .

La probabilità dell'evento unione di due eventi indipendenti è pari alla somma delle probabilità (90%). Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando la definizione assiomatica di probabilità

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.4 + 0.5 - 0 = 0.9$$

- Appello del 09 Settembre 2011 -

Esercizio 1)

Un laboratorio farmaceutico vuole verificare l'affidabilità dei suoi fornitori di acqua borica. A questo scopo ha effettuato diverse misure di concentrazione del boro presente nelle diverse boccette, ottenendo i seguenti 11 dati espressi in punti percentuali

2.9500 3.0300 3.0000 3.0900 3.0400 2.9200 2.9600 3.0300 3.0600 3.0200 2.9000

Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Scelga una rappresentazione grafica idonea.
- Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.
- Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Esercizio 2)

Si vuole verificare l'efficacia di un nuovo antibiotico chemiterapico utilizzare contro l'infezione dovuta ad un particolare batterio. A tale scopo si sono prese 100 cavie da laboratorio, le si sono infettate con il suddetto batterio ma solo metà di esse è stata sottoposta a trattamento con il nuovo farmaco. Dopo due settimane si è osservato l'estensione dell'infezione ottenendo le seguente tabella a doppia entrata:

| | | Y: estensione dell'infezione | | |
|-------------------|---------------|------------------------------|-------|--------|
| | | Contenuta | Media | Estesa |
| X: Trattamento | Non applicato | | 10 | |
| | Applicato | 10 | | |
| | | 15 | | 60 |

Il candidato

- completi la tabella con i dati mancanti.
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
- se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, l'efficacia del nuovo farmaco. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Esercizio 3)

Si consideri la statistica relativa all'acqua borica analizzata nell'Esercizio 1. Il candidato

- verifichi, se possibile, che ad una significatività del 90% l'acqua borica abbia concentrazione pari al 3%;
- stimuli puntualmente la varianza della concentrazione dell'acqua borica fornita.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi relativi ai dati dell'Esercizio 2

E_1 : estraendo a caso una cavia, questa sia stata trattata con il nuovo farmaco.

E_2 : estraendo a caso una cavia della sperimentazione, questa abbia un'infezione contenuta.

Il candidato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

- E_1 ed E_2
- evento E_1 intersezione E_2
- evento E_2 condizionato E_1
- evento E_2 unito E_1 .

- Appello del 9 Settembre 2011 -
Svolgimento

Esercizio 1)

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare una concentrazione che concettualmente è continua).

b) *Se possibile, tracci una rappresentazione adeguata.*

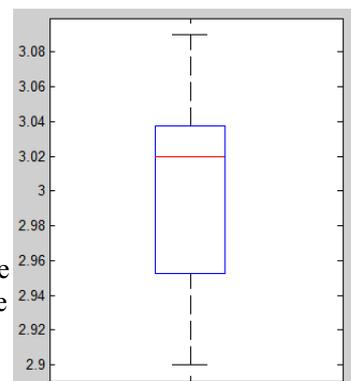
Poichè non vi sono molti dati ripetuti, ed essi sono in numero superiore alla decina ($N=11$) una buona rappresentazione è data dal box-plot. Il box-plot è una rappresentazione grafica utile per rappresentare dati quantitativi siano essi continui o discreti. Deve essere infatti possibile calcolare i quartili delle osservazioni e poter svolgere semplici operazioni di conto. Come primo passo si debbono ordinare le osservazioni

2.90 2.92 2.95 2.96 3.00 3.02 3.03 3.03 3.04 3.06 3.09

e valutare i quartili. Il primo quartile è quell'osservazione che lascia alla sua sinistra un quarto delle restanti osservazioni (ovvero $\frac{N-1}{4}=2.5$) poichè il numero non risulta tondo il primo quartile si otterra mediante la terza e la quarta osservazione ordinate; con una procedura analoga si ottiene che il terzo quartile sarà la media fra la 8ª e la 9ª osservazione. Mentre la mediana risulta essere il valore che ha alla sua sinistra $\frac{N-1}{2}=5$ osservazioni. Pertanto si ha:

$$q_1 = \frac{o_3 + o_4}{2} = \frac{2.95 + 2.96}{2} = 2.955 \quad q_2 = o_6 = 3.02$$

$$q_3 = \frac{o_8 + o_9}{2} = \frac{3.03 + 3.04}{2} = 3.035$$



Per poter tracciare il box-plot si devono identificare gli estremi dei due "baffi" che completano il boxplot. Il baffo inferiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la minima osservazione ($o_1=2.90$); mentre il baffo superiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente superiore (VAS) e la massima osservazione ($o_N=3.09$). Posto la costante $k=1.5$ si ha che:

$$VAI = q_1 - 1.5 * (q_3 - q_1) = 2.835 \quad VAS = q_3 + 1.5 * (q_3 - q_1) = 3.155$$

Da cui si ricava agevolmente diagramma a lato in cui si nota l'assenza di outliers.

c) *Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie..*

Gli indici di posizione calcolabili sono tre: la media (ricavata dalla seguente formula $\bar{o} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N o_i = 3$), la mediana introdotta al punto precedente e la moda (ovvero l'osservazione con frequenza più elevata). Per questa serie l'unico indice che non pare adeguato è la moda che, pur essendo unica e calcolabile riferisce l'unica osservazione ripetuta della serie di dati (3.03)

d) *Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.*

Gli indici di variabilità indicano quanto le osservazioni si discostano dal valor centrale. Essi sono tutti validi per la serie in esame e sono i seguenti.

- Il campo di variazione: l'osservazione massima meno l'osservazione minima e vale $o_{11} - o_1 = 0.19$
- La distanza interquartile: la differenza fra il terzo ed il primo quartile $q_3 - q_1 = 0.08$
- Lo scato quadratico medio (σ): radice quadrata della media degli scarti dalla media

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (o_i - \bar{o})^2 = \frac{0.036}{11} \quad \text{da cui} \quad \sigma = \sqrt{\frac{0.036}{11}} = 0.0572$$

I conti sono stati svolti nella tabella in calce.

| | | | | | | | | | | | |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| o_i | 2.9000 | 2.9200 | 2.9500 | 2.9600 | 3.0000 | 3.0200 | 3.0300 | 3.0300 | 3.0400 | 3.0600 | 3.0900 |
| $o_i - \bar{o}$ | -0.1000 | -0.0800 | -0.0500 | -0.0400 | 0.0000 | 0.0200 | 0.0300 | 0.0300 | 0.0400 | 0.0600 | 0.0900 |
| $(o_i - \bar{o})^2$ | 0.0100 | 0.0064 | 0.0025 | 0.0016 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0016 | 0.0036 | 0.0081 |

Esercizio 2)

a) *Completate la tabella con i dati mancanti.*

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle righe deve essere pari a 50 (metà delle cavie). Le frequenze assolute teoriche sono riportate nella tabella seguente (numeri non tra parentesi).

| | | Y: estensione dell'infezione | | | |
|-------------------|---------------|------------------------------|------------------|----------------|------------|
| | | Contenuta | Media | Estesa | |
| X: Trattamento | Non Applicato | 5 (7.5) | 10 (12.5) | 35 (30) | 50 |
| | Applicato | 10 (7.5) | 15 (12.5) | 25 (30) | 50 |
| | | 15 | 25 | 60 | 100 |

b) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione*

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 35 cui corrisponde la modalità (Non applicato; Estesa)

c) *Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità*

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) *Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, l'efficacia del nuovo farmaco. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.*

Un requisito di base richiesto dal nuovo farmaco è che la sua applicazione influisca sul carattere relativo alla diffusione del contagio ovvero che i due caratteri in esame siano dipendenti. Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze.

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi sono state inserite nella tabella riportata al punto a). A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si ha che.

$$\sum_{i=1}^M \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2((M_x - 1)(M_y - 1))$$

Poichè entrambi i caratteri della bivariata hanno $M_x = 2$ e $M_y = 3$, la regione di accettazione per un test al 5 % è la seguente.

$$A = [0; \chi_{0.95}^2(2)] = [0; 5.99]$$

Non rimane che da calcolare il valore dello stimatore e verificare se appartiene alla regione di accettazione.

Il valore dello stimatore è

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} = \frac{(5-7.5)^2}{7.5} + \frac{(10-12.5)^2}{12.5} + \frac{(35-30)^2}{30} + \frac{(10-7.5)^2}{7.5} + \frac{(15-12.5)^2}{12.5} + \frac{(15-12.5)^2}{12.5} + \frac{(25-30)^2}{30} = \frac{13}{3}$$

e risulta interno ad A . Quindi l'ipotesi di indipendenza viene accettata. Pertanto il farmaco è inefficace.

Esercizio 3)

Nel risolvere questo esercizio si ipotizza che la concentrazione di boro, espressa in punti percentuali, presente nell'acqua fornita sia modellabile mediante una V.C. X da cui sono state effettuate diverse estrazioni i.i.d. .

a) *verifichi, se possibile, che ad una significatività del 90% l'acqua borica abbia concentrazione pari al 3%*

Continuando con il modello precedentemente definito il punto richiede di verificare l'ipotesi che $E[X]=3$. La verifica di quest'ipotesi può essere realizzata, utilizzando gli strumenti forniti nel corso, solo se la dimensione del campione è pari a 30. Pertanto non è possibile verificare quest'ipotesi avendo a disposizione solo 11 valori.

b) *stimi puntualmente la varianza della concentrazione dell'acqua borica fornita*

Una stima puntuale corretta della varianza di una V.C. mediante osservazioni i.i.d. può essere ottenuta mediante la varianza campionaria s^2 ottenuta mediante la seguente formula.

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

quindi ricordando quando ricavato nell'esercizio 1 si ha che

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \frac{0.036}{11} \frac{11}{10} = 0.0036$$

Pertanto la stima richiesta è $Var[X] = 0.0036$

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

Le due probabilità possono essere calcolate utilizzando la definizione frequentistica, dove gli esiti favorevoli vengono determinati dalle marginali della tabella a doppia entrata dell'Esercizio 2.

$$P(E_1) = 50/100 = 0.5 \quad P(E_2) = 15/100 = 0.15$$

b) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .*

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi (ovvero che i due eventi si verifichino entrambi) è ottenibile mediante la definizione frequentistica della probabilità. Si ha infatti ottenuti i casi favorevoli dalla tabella a doppia entrata (casella in posizione 2,1) si ha che

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{10}{100} = 0.1$$

c) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1*

Applicando la definizione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/10}{1/2} = \frac{2}{10} = 0.2$$

d) *Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2 .*

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{50}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$

- Appello del 23 Settembre 2011 -

Esercizio 1)

Si sono rilevati i giudizi relativi alla qualità delle lezioni di un corso di statistica seguito da 30 studenti, ottenendo le seguenti rilevazioni

| | | | | | | |
|---------------------|--------|-------|----------|-------------|---------------|--------------------------|
| Modalità (giudizio) | Ottimo | Buono | Discerto | Sufficiente | Insufficiente | Gravemente insufficiente |
| Frequenza assoluta | 3 | 5 | 9 | 6 | 4 | 3 |

Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Scelga una rappresentazione grafica idonea.
- Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.
- Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Esercizio 2)

I dati descritti nell'Esercizio 1 sono stati caratterizzati considerando il genere dei votanti

| | | | | | | | |
|-----------|---------|---------------------|-------|----------|-------------|---------------|-----|
| | | X: giudizi al corso | | | | | Tot |
| | | Ottimo | Buono | Discerto | Sufficiente | Insufficiente | |
| Y: genere | Maschi | | 2 | 3 | 3 | 3 | 16 |
| | Femmine | 1 | | | | 1 | |
| Tot | | | | | | | |

Il candidato

- completi la tabella con i dati mancanti.
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
- indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
- se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se il genere influenza il voto senza alterare la statistica.

Esercizio 3)

Si consideri la statistica ricavata da quella descritta nell'Esercizio 1 dove per ogni giudizio sono stati assegnati i seguenti punteggi.

| | | | | | | |
|---------------------|--------|-------|----------|-------------|---------------|--------------------------|
| Voto | Ottimo | Buono | Discerto | Sufficiente | Insufficiente | Gravemente insufficiente |
| Punteggio (p_i) | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |

Il candidato consideri la v.c. P le cui osservazioni sono avvenute secondo le frequenze descritte nell'Esercizio 1 e

- verifichi, se possibile, mediante un test di ipotesi ad una significatività del 90%, se il valor atteso di P sia è superiore al 7;
- stimi puntualmente la varianza di P .

Esercizio 4)

Date le sue variabili casuali $X \sim Ber(0.4)$ e $Y \sim Chi(10)$, si considerino i due eventi considerati indipendenti

$$E_1 : X = 0 \quad E_2 : Y < 3.94$$

Il candidato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

- E_1 ed E_2
- evento E_1 intersezione E_2
- evento E_2 condizionato E_1
- evento E_2 unito E_1 .

- Appello del 9 Settembre 2011 -
Svolgimento

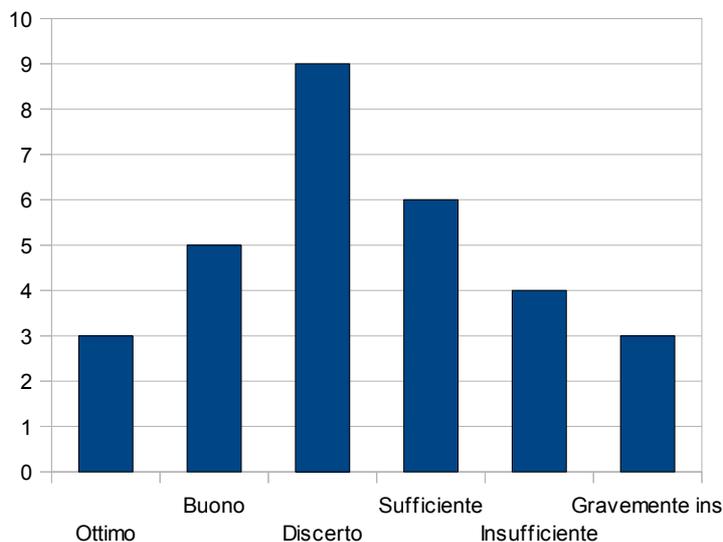
Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da giudizio) ordinabile (in quanto è possibile dare un ordine alle modalità).

b) Se possibile, tracci una rappresentazione adeguata.

Essendo il dato qualitativo solo alcune rappresentazioni grafiche sono possibili. Una rappresentazione efficace per dati ordinabili è il diagramma a barre. Questo diagramma si rappresenta inserendo dei rettangoli (barre) nel primo quadrante di un piano cartesiano in cui nell'asse delle ascisse sono riportate le modalità mentre in quello delle ordinate le frequenze (relative o assolute). I diversi rettangoli sono posti in corrispondenza delle varie modalità ottenendo un diagramma come quello riportato a lato.



c) Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie..

Gli indici di posizione sono tre: la media (ricavata dalla seguente formula $\bar{o} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N o_i = 3$), la mediana (ovvero l'osservazione che bipartisce le osservazioni ordinate) e la moda (ovvero l'osservazione con frequenza più elevata).

Per questa serie l'unico indice non calcolabile è la media. Gli altri indici sono

- Moda = Discreto (la frequenza assoluta è la maggiore 9)
- Mediana = Discreto (Poiché vi sono 30 osservazioni la mediana è la media fra la 15^a e la 16^a osservazione. Poiché esse coincidono con la modalità "Discreto" esse coincidono con la mediana.)

d) Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Gli indici di variabilità indicano quanto le osservazioni si discostano dal valor centrale.

Nel corso sono stati illustrati i seguenti indici.

- Il campo di variazione: l'osservazione massima meno l'osservazione minima
- La distanza interquartile: la differenza fra il terzo ed il primo quartile
- Lo scarto quadratico medio (σ): radice quadrata della media degli scarti dalla media

In questo caso nessun indice è calcolabile.

Esercizio 2)

a) Completati la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto dei totali di colonna sono dati al punto 1e che il numero totale della osservazioni deve essere 30. Le frequenze assolute teoriche sono riportate nella tabella seguente (numeri non tra parentesi).

| | | X: giudizi al corso | | | | | | Tot |
|-----------|-----------|---------------------|---------|----------|-------------|---------------|----------------|-----|
| | | Ottimo | Buono | Discreto | Sufficiente | Insufficiente | Gravemente ins | |
| Y: genere | Maschile | 2 (8/5) | 2 (8/3) | 3 (24/5) | 3 (16/5) | 3 (36/15) | 3 (8/5) | 16 |
| | Femminile | 1 (7/5) | 3 (7/3) | 6 (21/5) | 3 (14/5) | 1 (28/15) | 0 (8/5) | 14 |
| Tot | | 3 | 5 | 9 | 6 | 4 | 3 | 30 |

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 6 cui corrisponde la modalità (Discreto; Femminile)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se il genere influenza il voto senza alterare la statistica.

Nel caso il genere non influenzi il voto, vorrebbe dire che le due variabili sono scorrelate, pertanto un buon modo per vedere se vi sia un legame fra le variabili e verificarne la dipendenza mediante un test di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze teoriche sono state inserite fra parentesi nella tabella riportata al punto a).

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che questa non è verificata si può concludere che non è possibile verificare l'indipendenza senza alterare la statistica.

Esercizio 3)

Nel risolvere questo esercizio si ipotizza che il voto espresso dagli studenti sia modellabile mediante una V.C. X da cui sono state effettuate diverse estrazioni i.i.d. .

a) verifichi, se possibile, mediante un test di ipotesi ad una significatività del 90%, se il valor atteso di P sia è superiore al 7;

Il punto richiede di verificare l'ipotesi alternativa $H_1: E[P]>7$ contro l'ipotesi $H_0: E[P]=7$. La verifica di quest'ipotesi può essere realizzata, utilizzando gli strumenti forniti nel corso, solo se la dimensione del campione è pari o superiore a 30. Verificata questa ipotesi si procede al calcolo della media e della varianza campionaria (stimatori puntuali rispettivamente di valore atteso e varianza). I conti sono riportati nella tabella seguente

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^6 f_i p_i = 6.6 \quad s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1} \left(\sum_{i=1}^6 f_i p_i^2 - \bar{p}^2 \right) = \frac{30}{29} (45.6 - 6.6^2) = 2.11$$

| | | | | | | | |
|-------------|-------|------|--------|------|------|------|------------|
| p_i | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | Tot |
| n_i | 3 | 5 | 9 | 6 | 4 | 3 | 30 |
| f_i | 1/10 | 1/6 | 3/10 | 1/5 | 2/15 | 1/10 | |
| $v_i f_i$ | 3/10 | 4/3 | 21/10 | 6/5 | 2/3 | 2/5 | 6.6 |
| p_i^2 | 81 | 64 | 49 | 36 | 25 | 16 | |
| $p_i^2 f_i$ | 81/10 | 20/3 | 147/10 | 36/5 | 8/3 | 6/5 | 45.6 |

Noti questi valori è possibile standardizzare il valore di riferimento (7) ottenendo

$$z_7 = \frac{7 - \bar{p}}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{7 - 6.6}{\sqrt{\frac{2.11}{30}}} = 1.5$$

Questo valore va confrontato con la ragione di accettazione del test. Trattandosi di un test ad una coda con un

intervallo di significatività pari al 90% essa è pari a $A = [-\infty; 1.28]$. Poiché il valore è esterno alla regione di accettazione possiamo considerare buona l'ipotesi alternativa.

b) *stimi puntualmente la varianza dei P*

Una stima puntuale corretta della varianza di una V.C. mediante osservazioni i.i.d. può essere ottenuta mediante la varianza campionaria s^2 ottenuta al punto precedente. Pertanto la stima richiesta è $Var[P] = 2.11$

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

L'evento E_1 si verifica quando una v.c. Bernoulliana avente $p=0.4$ vale 0. Poiché il parametro p indica la probabilità che la v.c. ha valore 1 si ha che

$$P(E_1) = 1 - P(\bar{E}_1) = 1 - P(X=1) = 1 - p = 0.6$$

La probabilità dell'evento E_2 è ottenibile direttamente dalle tavole dei Chi quadrato. Infatti considerando un Chi quadrato a 10 gradi di libertà si ha che in corrispondenza del valore 3.94 l'area sottesa dalla curva della d.d.p. vale 0.05. Pertanto si ha che

$$P(E_2) = P(Y < 3.94) = \int_0^{3.94} f(y) dy = 0.05$$

b) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2 .*

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi (ovvero che i due eventi si verificano entrambi) indipendenti è pari al prodotto delle probabilità.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = 0.6 * 0.05 = 0.03$$

c) *Il candidato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1*

Applicando la definizione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(E_2|E_1) = P\left(\frac{E_1 \cap E_2}{E_1}\right) = \frac{0.03}{0.6} = 0.05$$

d) *Il candidato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2 .*

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.6 + 0.05 - 0.03 = 0.62$$

- Appello del 8 Febbraio 2012 -

Esercizio 1)

Una grossa azienda vuole monitorare il numero di permessi richiesti in un anno da un singolo dipendente. La seguente tabella riporta le frequenze assolute delle richieste annue dei permessi nell'intero anno 2011 da parte di tutto il personale.

| | | | | | | | | | |
|--------------------|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|
| Permessi richiesti | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Frequenza | 80 | 83 | 87 | 77 | 90 | 183 | 180 | 90 | 30 |

Determinare

- La tipologia del carattere.
- Un indice sintetico di posizione.
- Se possibile, un indice sintetico di variabilità.
- Una rappresentazione grafica adeguata.
- L'eventuale presenza di outlier.

Esercizio 2)

Le osservazioni descritte nell'esercizio precedente sono state catalogate in base allo stato civile e raccolte in classi.

| | | Y: stato civile | | |
|----------------------|------------|-----------------|-------------|----------|
| | | Nubile/Celibe | Coniugato/a | Vedovo/a |
| X: Giorni di assenza | meno di 4 | | 105 | 65 |
| | Fra 4 ed 6 | 100 | | |
| | Piu di 6 | | 160 | |
| | | 270 | 450 | |

Il candidato

- Completare la tabella con i dati mancanti.
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione
- Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità
- Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possano dire indipendenti.

Esercizio 3)

Utilizzando i dati raccolti nel primo esercizio come campione, il candidato stimi puntualmente e per intervallo la varianza dei giorni di permesso richiesti in un anno, indicando le opportune ipotesi. Il candidato proceda al calcolo anche se queste risultino non verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi legati all'estrazione di un lavoratore fra tutti quelli descritti nell'Esercizio 2.

E_1 : Si estragga un lavoratore sposato

E_2 : Si estragga un lavoratore che ha fatto al massimo 6 giorni di assenza

- Il candidato calcoli, se possibile, le seguenti Probabilità $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
- Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono statisticamente indipendenti.

- Appello del 8 Febbraio 2012 -
Svolgimento

Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto (in quanto le modalità sono espresse da numeri naturali)

b) *Un indice sintetico di posizione.*

Un carattere di tipo quantitativo ammette tre indici sintetici di posizione: la moda, la mediana e media. Un indice idoneo in questo caso è la mediana, in quanto risulta poco affetto dalla presenza di eventuali outlier (una persona che ha fatto una grave malattia o un incidente...)

Per calcolare la mediana si deve valutare la numerosità della popolazione (N=900) facilmente ottenibile cumulando le frequenze assolute

| Giorni di assenza | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Tot. |
|-------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Frequenza | 80 | 83 | 87 | 77 | 90 | 183 | 180 | 90 | 30 | 900 |
| F. ass. cumulata | 80 | 163 | 250 | 327 | 417 | 600 | 780 | 870 | 900 | -- |

Dopo di che, la mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra $(N-1)/2 = 449,5$ elementi. Poichè non esiste l'osservazione di posto 450,5 viene presa come mediana la media fra il 450° ed 451° valore. Analizzando le frequenze cumulate si ottiene che ambo le osservazioni mostrano la modalità 6. Pertanto la mediana (q_2) è 6

c) *Se possibile, un indice sintetico di variabilità.*

Un carattere di tipo quantitativo ammette quattro indici sintetici di variabilità: il range (o campo di variazione) la distanza interquartile, la varianza e la deviazione standard (o scarto quadratico medio). Avendo illustrato la mediana come indice di posizione la scelta più logica per l'indice di variabilità connesso è quella di utilizzare la distanza interquartile che si basa sullo stesso concetto. Infatti essa rappresenta la differenza fra il primo (q_1) ed il terzo (q_3) quartile. Dove q_1 , una volta ordinate le osservazioni, lascia alla propria sinistra $(N-1)/4 = 6,75$ osservazioni mentre q_3 lascia alla propria destra $(N-1)/4 = 224,75$ osservazioni. Anche in questo caso non ottenendo numeri interi dovremo mediare le posizioni intere più vicine. Si ha dunque che

$$q_1 = \text{media } 225^\circ \text{ e } 226^\circ \text{ valore} = 3$$

$$q_3 = \text{media } 675^\circ \text{ e } 676^\circ \text{ valore} = 7$$

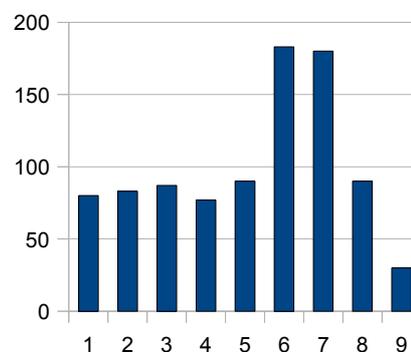
Si ha che la distanza interquartile $D = q_3 - q_1 = 7 - 3 = 4$

d) *Una rappresentazione grafica adeguata.*

Un carattere di tipo quantitativo le cui le modalità abbiano frequenze superiori all'unità viene solitamente rappresentato mediante un diagramma a barre.

Questo diagramma è composto da barre orizzontali (o verticali) inserite in un piano cartesiano. Il grafico riposta una barra per ogni modalità, la cui base (o altezza) viene fissata e centrata nel valore della modalità corrispondente mentre la sua altezza (o base) raggiunge la relativa frequenza assoluta.

A lato si riporta il digramma a barre ricavato dalla distribuzione in esame



e) *L'eventuale presenza di outlier.*

Un modo per individuare gli outlier (ovvero valori troppo distanti dalla statistica e probabilmente erronei) è quello di ricorrere alla definizione di Valore Adiacente Superiore e di Valore Adiacente Inferiore, per individuare i valori rispettivamente troppo alti o troppo bassi. Questi limiti vengono calcolati sottraendo al primo quartile K

volte la distanza interquartile (VAI) e sommando al terzo quartile K volte la distanza interquartile (VAS). I valori esterni all'intervallo VAI-VAS vengono considerati outlier. Tipici valori di K sono 1, 1.5 e 2. Utilizzando K = 1 si ha che

$$VAI = 3 - 1 * 4 = -1$$

$$VAS = 7 + 1 * 4 = 11$$

Non esistendo alcuna osservazioni esterna all'intervallo [-1 ; 11] possiamo concludere che la popolazione presumibilmente non presenta outlier.

Esercizio 2)

L'esercizio verte sull'analisi di una serie bivariata, ottenuta misurando due caratteri qualitativi non ordinabili.

a) completi la tabella con i dati mancanti

Le marginali del carattere X si ottengono dalla monovariata descritta nell'esercizio 1; mentre gli altri numeri si ottengono ricordando che si debbono rispettare i totali di riga e colonna (ovvero le marginali).

| | | Y: stato civile | | | Marginali |
|----------------------|------------|-----------------|------------------|----------------|------------|
| | | Nubile/Celibe | Coniugato/a | Vedovo/a | |
| X: Giorni di assenza | meno di 4 | 80 (75) | 105 (125) | 65 (50) | 250 |
| | Fra 4 ed 6 | 100 (105) | 185 (175) | 65 (70) | 350 |
| | Piu di 6 | 90 (90) | 160 (150) | 50 (60) | 300 |
| Marginali | | 270 | 450 | 180 | 900 |

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando un carattere qualitativo non ordinabile (lo stato civile) ed uno quantitativo discreto ammette un solo indice sintetici di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la modalità della serie corrispondente alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 185 da cui si ha le seguente moda

(Fra 4 e 6 ; Coniugato/a)

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

c) Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà paria quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze teoriche sono state riportate nella tabella al punto precedente fra parentesi. A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si può procedere al calcolo della regione di accettazione fissato il livello di significatività al 5%.

$$A = [0; \chi^2_{1-\alpha}((M_x - 1)(M_y - 1))] = [0; \chi^2_{1-0.05}((3-1)(3-1))] = [0; \chi^2_{0.95}(4)] = [0; 9.49]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} =$$

$$= \frac{(80-75)^2}{75} + \frac{(105-125)^2}{125} + \frac{(65-50)^2}{50} + \frac{(100-105)^2}{105} + \frac{(185-175)^2}{175} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(90-90)^2}{90} + \frac{(160-150)^2}{150} + \frac{(50-60)^2}{60} =$$

$$\frac{25}{75} + \frac{400}{125} + \frac{225}{50} + \frac{25}{105} + \frac{225}{175} + \frac{25}{70} + 0 + \frac{100}{150} + \frac{100}{60} = 11.53$$

Poichè il valore dello stimatore è esterno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri non sono indipendenti ad un livello di significatività del 5%.

Esercizio 3)

Nel testo viene richiesto di stimare la varianza puntualmente e per intervallo dei giorni di permesso richiesti in un anno. Le ipotesi sotto cui questa stima è possibile, con gli strumenti visti nel corso sono

- Si considerano i dati come estrazioni dalla stessa variabile casuale P .
- Le estrazioni sono tutte i.i.d.

La seconda ipotesi è un po' forzata infatti non si sono "estratti" da tutti i possibili lavoratori italiani 900 possibili studenti ma è stata scelta a caso un'azienda e si sono considerati tutti i lavoratori di quell'azienda. In ogni caso il teato richiede di calcolare la stima usando quel particolare campione, senza discuterne la validità.

Stima puntuale. Per stimare puntualmente la varianza si ricorre al suo stimatore la varianza campionaria s^2 . Essa è espressa della seguente formula

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^M x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 \right) \frac{n}{n-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^M x_i^2 n_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^M x_i n_i}{n} \right)^2 \right) \frac{n}{n-1} = \left(\frac{28275}{900} - \left(\frac{4613}{900} \right)^2 \right) \frac{900}{899} = 5.15107$$

Dove il calcolo della varianza e della media campionaria sono state calcolate secondo la seguente tabella:

| Giorni richiesti (x_i) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Tot. |
|----------------------------|----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-------|
| Frequenza (n_i) | 80 | 83 | 87 | 77 | 90 | 183 | 180 | 90 | 30 | 900 |
| $x_i n_i$ | 80 | 166 | 261 | 308 | 450 | 1098 | 1260 | 720 | 270 | 4613 |
| x_i^2 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | -- |
| $x_i^2 n_i$ | 80 | 332 | 783 | 1232 | 2250 | 6588 | 8820 | 5760 | 2430 | 28275 |

Per procedere alla stima per intervallo è necessario fissare un livello di confidenza $(1-\alpha)$; nel nostro caso si è deciso di fissare un livello di confidenza del 95% (corrispondente ad $\alpha=5\%$).

La stima richiesta prevede il calcolo di un chi quadrato ad $n-1$ (899) gradi di libertà.

La maggioranza delle tabelle statistiche non riporta tale distribuzione, pertanto si utilizza la distribuzione limite del chi quadrato. Infatti, il numero di gradi di libertà è così elevato da poter approssimare la distribuzione in esame con una gaussiana avente pari valor atteso (899) e pari varianza ($899*2$).

Peranto i due valori critici del chi quadrato che lasciano alla propria sinistra / destra 2.5% possono essere ben approssimati dai rispettivi valori della normale $N(899, 1798)$ x_1 e x_2 . I valori x_1 e x_2 si ottengono destandardizzando i rispettivi valori della normale standardizzata secondo la seguente formula $z_1 = -1.96$ e $z_2 = 1.96$.

$$x = z * \sqrt{Var[X]} + E[X] = z * \sqrt{1798} + 899 \quad , \quad x_1 = 816 \quad , \quad x_2 = 982$$

Ora è possibile applicare la formula della stima per intervallo della varianza:

$$Var[P] \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} ; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{(899)5.15107}{982} ; \frac{(899)5.15107}{816} \right] = [4,716 ; 5,675]$$

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Essendo gli eventi elementari equiprobabili, le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 e dell'evento intersezione (estrarre un lavoratore sposato che abbia fatto al massimo sei giorni di assenza) possono essere ricavate utilizzando la definizione classica; secondo la quale la probabilità è il rapporto dei casi favorevoli sui casi totali. Pertanto si ha che:

$$P(E_1) = \frac{450}{900} = \frac{1}{2} \quad P(E_2) = \frac{250+350}{900} = \frac{2}{3} \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{105+185}{900} = \frac{29}{90}$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{450+600-290}{900} = \frac{76}{90} \quad P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{29}{90} \cdot \frac{90}{60} = \frac{29}{60}$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti.

Se due eventi sono indipendenti si ha che la probabilità condizionata è data dal prodotto delle probabilità, pertanto essendo

$$P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{29}{60} = P(E_1 \cap E_2)$$

Gli eventi non sono indipendenti.

- Appello del 22 Febbraio 2012 -

Esercizio 1)

Un laboratorio di analisi vuole verificare la precisione di una macchina di test per misurare la glicemia. Pertanto ha effettuato diverse misure relative a campioni avente concentrazione nota ed ottenendo i seguenti errori.

0.015 0.005 0.030 0.010 0.035 0.020 0.020 0.025 0.010 0.020 0.030

Determinare

- a) La tipologia del carattere.
- b) Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare indicando se siano opportuni.
- c) Se possibile, un indice sintetico di variabilità.
- d) Una rappresentazione grafica adeguata.

Esercizio 2)

Un ricercatore vuole verificare se esiste un legame fra la frequenza cardiaca (HR) ed il quoziente ventilatorio (rapporto fra il volume ossigeno ed il volume CO_2 nell'aria espulsa ad ogni espirazione). Per tanto, ha sottoposto un paziente ad una prova sotto sforzo (30 minuti di ciclette a velocità costante) ed ogni 5 minuti ha misurato entrambe le grandezze ottenendo le seguenti osservazioni

| Minuto | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|-----------------------------------|------|------|------|-----|-----|-----|
| HR [batt/min] | 70 | 76 | 77 | 77 | 80 | 82 |
| Vo ₂ /Vco ₂ | 0.84 | 0.87 | 0.89 | 0.9 | 0.8 | 1.1 |

Il candidato,

- a) Indichi e fornisca una rappresentazione grafica adeguata alla serie ottenuta.
- b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità
- c) Ipotizzando un legame di tipo lineare,
 1. Calcoli l'opportuna regressione
 2. Il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta.
 3. Ipotizzi quale sarebbe il quoziente respiratorio previsto nel caso si riscontrasse una frequenza cardiaca pari a 72 battiti al minuto

Esercizio 3)

Il candidato, utilizzando i dati dell'Esercizio 1, stimi puntualmente e per intervallo la percentuale d'errore atteso della macchina in esame evidenziando le ipotesi necessarie. Il candidato proceda al calcolo anche se queste risultassero non verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi legati all'estrazione di una delle misure descritte nell'Esercizio 2.

E_1 : si estragga una misura in cui la frequenza cardiaca sia superiore a 77

E_2 : si estragga una misura in cui il quoziente respiratorio sia inferiore 0.9

- a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_1 | E_2)$.
- b) Il candidato indichi se gli eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi incompatibili.

- Appello del 22 Febbraio 2012 -
Svolgimento

Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto concettualmente un errore relativo può assumere qualsiasi valore positivo)

b) *Tutti gli indici sintetici di posizione possibili da calcolare indicando se siano opportuni.*

Un carattere di tipo quantitativo ammette tre indici sintetici di posizione: la moda, la mediana e la media.

La moda è che la modalità con la frequenza maggiore: in questo caso essendo le osservazioni continue la moda è l'unico indice di posizione che generalmente non è affidabile. In ogni caso la moda risulta essere 0.020 che ha frequenza assoluta 3 (vedi tabella 1).

Per calcolare la mediana si devono ordinare le osservazioni

0.005 0.010 0.010 0.015 0.020 0.020 0.020 0.025 0.030 0.030 0.035

Dopo di che, la mediana è il valore che bipartisce la popolazione. Quindi, una volta ordinate le osservazioni, si ricerca quella che lascia alla sua destra $(N-1)/2 = 5$ elementi; ovvero il sesto elemento. Si ha che $q_2 = 0.02$.

La media, raggruppati i dati in modalità risulta essere :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M x_i * n_i = \frac{0.22}{11} = 0.02$$

Dove i conti sono stati svolti nella tabella in calce all'esercizio

c) *Se possibile, un indice sintetico di variabilità..*

Il carattere in esame (quantitativo continuo) ammette tutti gli indici di variabilità visti nel corso (range, varianza e distanza interquartile e sqm). Fra questi è stato deciso di calcolare la varianza utilizzando la seguente formula

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^M n_i * x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \frac{0.0053}{11} - 0.02^2 = 0.00048182 - 0.0004 = 0.00008182$$

| | | | | | | | | |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Errore (x_i) | 0.005 | 0.010 | 0.015 | 0.020 | 0.025 | 0.030 | 0.035 | |
| Frequenza (n_i) | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | |
| $x_i * n_i$ | 0.01 | 0.02 | 0.02 | 0.06 | 0.03 | 0.06 | 0.04 | 0.22 |
| x_i^2 | 0.000025 | 0.000100 | 0.000225 | 0.000400 | 0.000625 | 0.000900 | 0.001225 | |
| $x_i^2 * n_i$ | 0.000025 | 0.000200 | 0.000225 | 0.001200 | 0.000625 | 0.001800 | 0.001225 | 0.005300 |

Tabella 1) analisi dati Esercizio 1

d) *Una rappresentazione grafica adeguata.*

Una rappresentazione adeguata per dati qualitativi di una buona numerosità è il box-plot. Per descrivere un boxplot si debbono calcolare i quartili. I quartili sono 5 numeri dove il primo (quartile zero) e l'ultimo (quartile 4) sono gli estremi delle osservazioni, mentre il terzo è la mediana. Il primo ed il terzo quartile sono quelle osservazioni che lasciano rispettivamente alla destra ed alla sinistra un quarto delle osservazioni ordinate ovvero $(N-1)/2 = 2.5$. Poiché il numero non è tondo si mediano le due osservazioni successive; pertanto si ha che il primo quartile è la media fra la terza e quarta osservazione mentre il secondo sarà la media fra l'ottava ed il nona osservazione

$$q_0 = 0.005 \quad q_1 = (0.010 + 0.015)/2 = 0.0125 \quad q_2 = 0.020 \quad q_3 = (0.025 + 0.030)/2 = 0.0275 \quad q_4 = 0.035$$

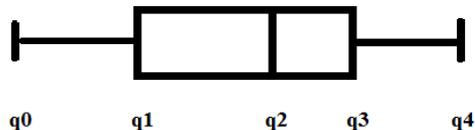
Per completare la raccolta di informazioni richiesta per il box-plot si debbono calcolare il Valore Adiacente Superiore e di Valore Adiacente Inferiore, per individuare i valori rispettivamente troppo alti o troppo bassi. Questi limiti vengono calcolati sottraendo al primo quartile K volte la distanza interquartile (VAI) e sommando al

terzo quartile K volte la distanza interquartile (VAS). I valori esterni all'intervallo $VAI-VAS$ vengono considerati outlier. Tipici valori di K sono 1, 1.5 e 2. Utilizzando $K = 1$ si ha che

$$VAI = 0.0125 - 1 * (0.0275 - 0.0125) = -0.0025$$

$$VAS = 0.0275 + 1 * (0.0275 - 0.0125) = 0.045$$

Essendo tutte le osservazioni interne all'intervallo $[VAI ; VAS]$ possiamo concludere che non vi siano outlier. A lato si riporta il box-plot ottenuto

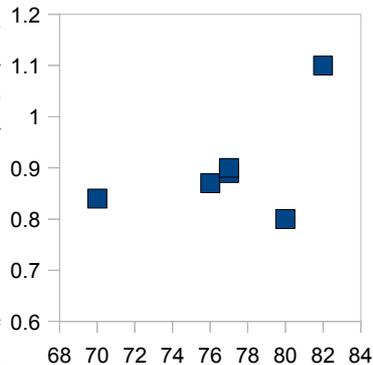


Esercizio 2)

a) *Indicare e fornire una rappresentazione grafica adeguata.*

Per serie bivariate continue o discrete cui le frequenze non siano particolarmente alte si usa rappresentare la serie mediante diagrammi a dispersione. Questi diagrammi sono diagrammi cartesiani i cui le modalità dei caratteri vengono posti sui due assi ed ogni osservazione viene rappresentata da un punto.

A lato si mostra il diagramma a dispersione ottenuto dai dati forniti.



b) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità*

Per serie bivariate continue o discrete l'indice di variabilità migliore è dato dalla matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone di 3 distinti valori: le due varianze dei distinti caratteri e la covarianza, della serie bivariata. Si seguito riportiamo i calcoli per le due varianze per i singoli caratteri:

X: Frequenza cardiaca

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{70+76+77+77+80+82}{6} = 77$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{7^2 + 1^2 + 0^2 + (-3)^2 + (5)^2}{6} = \frac{49+1+9+25}{6} = 14$$

Y: Coefficiente Ventilatorio

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{0.84+0.87+0.89+0.90+0.80+1.1}{6} = 0.90$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{(-0.06)^2 + (-0.03)^2 + (-0.01)^2 + (0)^2 + (0.1)^2 + (0.2)^2}{6} = \frac{5.4}{6} = 0.9$$

La covarianza si ottiene

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{0.42+0.03+0+0-0.3+1}{6} = \frac{1.15}{6}$$

I cui conti sono ripostati in Tabella 2. Pertanto la matrice varianza covarianza risulta essere

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 14 & \frac{1.15}{6} \\ \frac{1.15}{6} & 0.9 \end{bmatrix}$$

| | | | | | | |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-----|------|-----|
| x_i | 70 | 76 | 77 | 77 | 80 | 82 |
| y_i | 0.84 | 0.87 | 0.89 | 0.9 | 0.8 | 1.1 |
| $x_i - \bar{x}$ | -7 | -1 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| $y_i - \bar{y}$ | -0.06 | -0.03 | -0.01 | 0 | -0.1 | 0.2 |
| $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ | 0.42 | 0.03 | 0 | 0 | -0.3 | 1 |

Tabella 2) Dati relativi Esercizio 2 e 4

c) *1) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si calcoli l'opportuna regressione*

La retta di regressione ha equazione

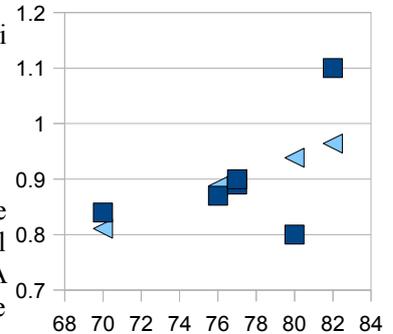
$$\hat{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \bar{x} \quad \hat{y} = \frac{1.15}{6 \cdot 14} x + 0.9 - \frac{1.15}{6 \cdot 14} 77 \quad \hat{y} = 0.0137x - 0.1542$$

c 2) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si verifichi il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta

Un buon indicatore della bontà del modello di regressione è dato dall'indice di correlazione di Pearson

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0.0029 \quad R = 0.053$$

Poiche l'indice risulta inferiore a 0.3 si può asserire che il legame è difficilmente possibile. Ovviamente il dato deve essere confermato dalla visualizzazione del modello. Infatti il coefficiente di Pearson può anche dare risultati molto errati. A lato si riportano le previsioni effettuate dal modello lineare che non sempre descrivono l'andamento dei dati



c 3) Ipotizzi quale sarebbe il quoziente respiratorio previsto nel caso si riscontrasse una frequenza cardiaca pari a 72 battiti al minuto

La risposta a questo quesito si ottiene applicando la retta nel punto $x = 72$; si ottiene quindi un quoziente ventilatorio previsto di 0.8322

Esercizio 3)

Le tecniche di stima viste nel corso prevedono che:

- la popolazione sia descrivibile mediante una variabile casuale,
- che il campione abbia una numerosità tale da far convergere lo stimatore e
- che le prove siano indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.).

Nel caso in esame

- descrivere l'esperimento mediante la seguente variabile casuale X : *errore relativo di una misura*.
- la grandezza da stimare risulta $E[X]$ il cui stimatore è la media campionaria che converge in legge per campioni avente numerosità superiore a 30 (ipotesi non confermata).
- L'ipotesi di prove i.i.d. viene confermata in quanto si suppone che una sequenza di 6 prove (ovvero l'effettuare una misura) non alteri la distribuzione di probabilità di X (rovini lo strumento di misura).

La stima puntuale si ottiene semplicemente dall'applicazione dello stimatore, pertanto

$$\hat{\theta} = E[\hat{X}] = \bar{x} = 0.2$$

Per effettuare una stima per intervallo si deve come prima cosa fissare un livello di confidenza, nel nostro caso 95% ($\alpha=0.05$). Definita la stima (stima per intervallo al 95%), si ha che la stima in intervallo è data dalla seguente

$$E[X] \in \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{Var}[X]}{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{Var}[X]}{n}} \right]$$

Dove la varianza viene stimata mediante la varianza campionaria ed il valore della normale standardizzata si ricava dalle tavole:

$$\bar{x} = 0.2 \quad \text{Var}[\hat{X}] = s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = 0.00008122 \frac{11}{10} = 0.000090 \quad z_{\alpha/2} = 1.96$$

Infine si ottiene quindi:

$$E[X] \in [0.02 - 1.96 \cdot 0.002864 ; 0.02 + 1.96 \cdot 0.002864] \Rightarrow E[P] \in [0.0143936 ; 0.025606]$$

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Essendo gli eventi elementari equiprobabili (ogni coppia di misure ha la stessa probabilità di essere estratta), le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 e dell'evento intersezione (estrarre una misura in cui la frequenza cardiaca sia superiore a 77 ed il quoziente respiratorio sia inferiore a 0.9) possono essere ricavate utilizzando la definizione classica; secondo la quale la probabilità è il rapporto dei casi favorevoli sui casi totali. Pertanto si ha che:

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = 0.333 \quad P(E_2) = \frac{4}{6} = 0.667 \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} = 0.167$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{2+4-1}{6} = 0.833 \quad P(E_1|E_2) = P\left(\frac{E_1 \cap E_2}{E_2}\right) = \frac{1/6}{4/6} = 0.250$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili.

Se due eventi sono incompatibili se non possono verificarsi contemporaneamente pertanto la probabilità dell'evento intersezione è nulla. Essendo questa probabilità pari ad un sesto possiamo affermare che gli eventi non sono incompatibili (quindi sono compatibili).

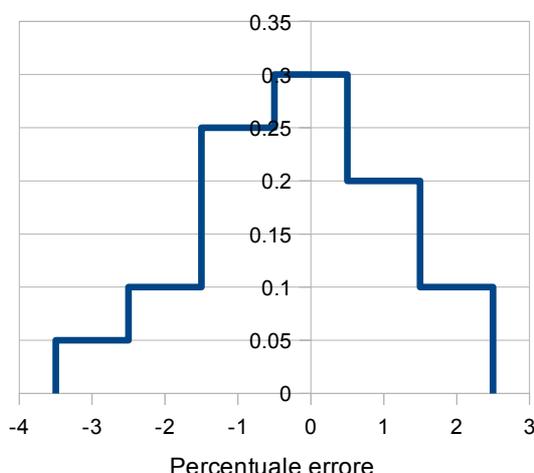
- Appello del 27 Giugno 2012 -

Esercizio 1)

Un laboratorio di analisi vuole comprare una macchina per la rilevazione dell'emoglobina. Il costruttore fornisce a testimonianza della bontà della propria macchina l'istogramma dell'errore di misura riportato a lato relativo alla misurazione di 1000 campioni

Il candidato

- Determini la tipologia del carattere.
- Fornisca una rappresentazione tabellare dei dati (mettendo in risalto le frequenze assolute).
- Se possibile, calcoli la mediana.
- Se possibile, calcoli la varianza.



Esercizio 2)

Un ricercatore vuole verificare se esista un legame fra le ore di sonno ed il livello di glicemia al risveglio in un soggetto diabetico. Per far ciò ha sottoposto lo stesso soggetto ad un protocollo sperimentale che prevede il monitoraggio di 6 notti di sonno ottenendo i seguenti dati

| Notte | I | II | III | IV | V | VI |
|----------------------------|----|----|-----|----|----|----|
| Ore di Sonno | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Glicemia alle 7:30 [mg/dl] | 71 | 75 | 70 | 75 | 82 | 80 |

Il candidato,

- Indichi e fornisca una rappresentazione grafica adeguata alla serie ottenuta.
- Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità
- Ipotizzando un legame di tipo lineare,
 - Calcoli l'opportuna regressione
 - Il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta.
 - Ipotizzi quale sarebbe il valore di glicemia se il soggetto dormisse 24 ore.

Esercizio 3)

Il candidato, utilizzando i dati dell'Esercizio 1, stimi puntualmente e per intervallo la varianza della percentuale d'errore attesa della macchina in esame evidenziando le ipotesi necessarie. Il candidato proceda al calcolo anche se queste risultassero non verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi considerati indipendenti:

E_1 : si abbia $z < 0$ dove z è una normale standardizzata

E_2 : si abbia $x=0$ dove $x \sim Ber(0.3)$

- Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_1 | E_2)$.
- Il candidato indichi se gli eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi incompatibili.

- Appello del 27 Giugno 2012 -
Svolgimento

Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto concettualmente un errore percentuale può assumere qualsiasi valore)

b) *Fornisca una rappresentazione tabellare dei dati (mettendo in risalto le frequenze assolute).*

Per risolvere questo punto, risulta opportuno esplicitare la relazione fra le grandezze riportate nell'istogramma e le frequenze assolute. In un istogramma le ordinate riportano la densità di frequenza (d_i) delle classi mentre le ascisse gli estremi delle classi che compongono la distribuzione. Ricordando che d_i è definita come il rapporto fra le frequenze relative (f_i) e l'ampiezza della classe cui sono riferite ($sup_i - inf_i$); e che le frequenze relative sono il rapporto fra le frequenze assolute (n_i) ed il totale delle osservazioni (N), si ha:

$$d_i = \frac{n_i}{N (sup_i - inf_i)} \quad \text{da cui si ottiene che} \quad n_i = N d_i (sup_i - inf_i)$$

Pertanto i dati richiesti possono essere ricavati applicando la formula testè ricavata. I risultati sono stati raccolti nella tabella ad entrata semplice (Tabella 1) riportata in calce.

c) *Se possibile, calcoli la mediana.*

La mediana è il valore che bipartisce le osservazioni ordinate, ovvero, quel valore che bipartisce l'area sottesa dell'istogramma. Considerando le frequenze cumulate in Tabella 1, si osserva come la mediana cada nella quarta classe ($i^* = 4$) contenente i valori fra 40% e 70% delle misurazioni ordinate. Per calcolare la mediana si deve trovare la parte del rettangolo relativo alla quarta classe che sottenda solo il 10% ($50\% - F_{i^*-1}$) delle misurazioni. Poiché l'atezza del rettangolo è nota ($d_{i^*} = 0.3$) possiamo facilmente ricavarne la base ($0.1 / 0.3 = 1/3$). Quindi la mediana si avrà sommando questo valore all'estremo inferiore della classe ($inf_{i^*} = -0.5$) ricavando il valore di $-1/6$.

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto applicando la seguente formula che riassume il procedimento appena descritto

$$Me = inf_{i^*} + (0.5 - F_{i^*-1}) / d_{i^*} = -1/2 + (0.5 - 0.4) / 0.1 = -1/2 + 1/3 = (-3+2)/6 = -1/6$$

d) *Se possibile, si calcoli la varianza.*

Il carattere in esame (quantitativo continuo) ammette tutti gli indici di variabilità visti nel corso (range, varianza e distanza interquartile e sqm) anche se ottenuto con sole rappresentazioni per classi di osservazioni. In questo caso gli indici sono ricavabili abbinando ad ogni classe il valore centrale della classe (c_i). La varianza delle osservazioni è stata calcolata utilizzando i dati ricavati in Tabella 1 nella seguente formula

$$\sigma_x^2 = \left(\sum_{i=1}^M f_i * c_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \left(\sum_{i=1}^M f_i * c_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^M f_i * c_i \right)^2 = 1.7 - (-0.2)^2 = 1.7 - 0.04 = 1.66$$

| i | inf _i | sup _i | c _i | n _i | f _i | F _i | c _i * f _i | c _i ² | c _i ² * f _i |
|--------|------------------|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|-----------------------------|--|
| 1 | -3.5 | -2.5 | -3 | 50 | 0.050 | 0.050 | -0.1500 | 9 | 0.45 |
| 2 | -2.5 | -1.5 | -2 | 100 | 0.100 | 0.150 | -0.2000 | 4 | 0.4 |
| 3 | -1.5 | -0.5 | -1 | 250 | 0.250 | 0.400 | -0.2500 | 1 | 0.25 |
| 4 | -0.5 | 0.5 | 0 | 300 | 0.300 | 0.700 | 0.0000 | 0 | 0 |
| 5 | 0.5 | 1.5 | 1 | 200 | 0.200 | 0.900 | 0.2000 | 1 | 0.2 |
| 6 | 1.5 | 2.5 | 2 | 100 | 0.100 | 1.000 | 0.2000 | 4 | 0.4 |
| Totali | | | | | 1 | | -0.2000 | | 1.7000 |

Tabella 1) analisi dati Esercizio 1

Esercizio 2)

a) *Indicare e fornire una rappresentazione grafica adeguata.*

Per serie bivariate continue o discrete cui le frequenze non siano particolarmente alte si usa rappresentare la serie mediante diagrammi a dispersione. Questi diagrammi sono diagrammi cartesiani i cui le modalità dei caratteri vengono poste sui due assi ed ogni osservazione viene rappresentata da un punto. Il grafico ottenuto dai dati nella consegna viene riportato in Figura 1 (serie "Dati Reali").

b) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità*

Per serie bivariate continue o discrete l'indice di variabilità migliore è dato dalla matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone di 3 distinti valori: le varianze dei distinti caratteri e la covarianza della serie bivariata. Si seguito riportiamo i calcoli relativi alle varianze dei i singoli caratteri:

X: Ore di sonno

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{5+6+6+7+7+8}{6} = 6.5$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(5-6.5)^2 + 2*(6-6.5)^2 + 2*(7-6.5)^2 + (8-6.5)^2}{6} = \frac{2.25+0.5+0.5+2.25}{6} = \frac{5.5}{6}$$

Y: Glicemia al mattino

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{71+75+70+75+82+80}{6} = 75.5$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{(-4.5)^2 + (-0.5)^2 + (-5.5)^2 + (-0.5)^2 + (6.5)^2 + (6.75)^2}{6} = \frac{113.5}{6}$$

Sfruttando i conti ripostati in Tabella 2 si ottiene la seguente covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{6.75+0.25+2.75-0.25+3.25+6.75}{6} = \frac{19.5}{6}$$

Pertanto la matrice varianza/covarianza risulta essere

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{5.5}{6} & \frac{19.5}{6} \\ \frac{19.5}{6} & \frac{113.5}{6} \end{bmatrix}$$

| | Osservazioni | | | | | | Totali |
|----------------------------------|--------------|------|------|-------|------|------|---------|
| x_i | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6.5000 |
| y_i | 71 | 75 | 70 | 75 | 82 | 80 | 75.5000 |
| $x_i - \bar{x}$ | -1.5 | -0.5 | -0.5 | 0.5 | 0.5 | 1.5 | |
| $y_i - \bar{y}$ | -4.5 | -0.5 | -5.5 | -0.5 | 6.5 | 4.5 | |
| $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ | 6.75 | 0.25 | 2.75 | -0.25 | 3.25 | 6.75 | 19.5000 |

Tabella 2) Dati relativi Esercizio 2

c 1) *Ipotizzando un legame di tipo lineare, si calcoli l'opportuna regressione*

La retta di regressione ha equazione

$$\hat{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \bar{x} \quad \hat{y} = \frac{19.5}{5.5} x + 75.5 - \frac{19.5}{5.5} 6.5 \quad \hat{y} = 3.54 x - 52.45$$

c 2) Ipotizzando un legame di tipo lineare, si verifichi il legame ipotizzato è attendibile? Motivare numericamente la risposta

Un buon indicatore della bontà del modello di regressione è dato dall'indice di correlazione di Pearson

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0.61 \quad R = 0.78$$

Poiché l'indice risulta superiore a 0.7 si può asserire che il legame è possibile. Ovviamente il dato deve essere confermato dalla visualizzazione del modello. Infatti il coefficiente di Pearson può anche dare risultati fuorvianti. A lato si riportano le presevisioni effettuate dal modello lineare che descrivono l'andamento dei dati con buona precisione.

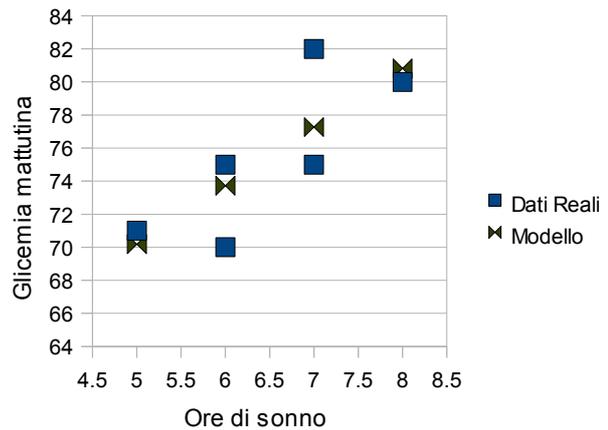


Figura 1) Rappresentazione dei dati dell'Es 2

c 3) Ipotizzi quale sarebbe il valore di glicemia se il soggetto dormisse 24 ore.

La risposta a questo quesito si ottiene applicando la retta nel punto $x = 24$; si ottiene quindi una glicemia prevista di 137.55.

Si ricorda che il valore risulta poco attendibile poiché il modello viene applicato in ascisse (24) molto lontane da quelle usate per stimarlo (5-8).

Esercizio 3)

Le tecniche di stima viste nel corso prevedono che:

- la popolazione sia descrivibile mediante una variabile casuale,
- che il campione abbia una numerosità tale da far convergere lo stimatore e
- che le prove siano indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.).

Nel caso in esame

- descrivere l'esperimento mediante la seguente variabile casuale X : *errore percentuale di una misura*;
- la grandezza da stimare risulta $Var[X]$ il cui stimatore è la varianza campionaria la quale converge in legge per campioni avente numerosità superiore a 30 (ipotesi confermata);
- l'ipotesi di prove i.i.d. viene confermata in quanto si suppone che una sequenza di 1000 prove (ovvero l'effettuare una misura) non alteri la distribuzione di probabilità di X (rovini lo strumento di misura) di una macchina da laboratorio progettata per svolgere molte più analisi.

La stima puntuale si ottiene semplicemente dall'applicazione dello stimatore, pertanto

$$\hat{\theta} = Var[\hat{X}] = s_x^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = 1.7 * 1000/999 = 1.7017$$

Si noti come con grandi numeri la varianza e la varianza campionaria tendano a coincidere

Per effettuare una stima per intervallo si deve come prima cosa fissare un livello di confidenza, nel nostro caso 95% ($\alpha=0.05$). Definita la tipologia di stima (stima per intervallo al 95%), si ha che essa è data dalla seguente

$$Var[P] \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$$

Dove i valori del $\chi^2(n-1)$ si dovrebbero ricavare dalle tavole, ma esse normalmente non riportano valori per un numero così elevato di gradi di libertà. In questi casi è possibile utilizzare la convergenza in legge della variabile chi quadrato. Infatti essa per un alto numero di gradi di libertà converge ad una normale con stesso valor medio e varianza. Si ha infatti che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi^2(n) = N(n, 2n) \quad \text{nel nostro caso} \quad \chi^2(999) \sim N(999, 1998)$$

Per ottenere i valori critici richiesti è possibile reperire i valori su di una standardizzata $z_{\alpha/2} = 1.96$ e poi destandardizzarli secondo la seguente formula

$$x = \sigma * z + \mu$$

Si ottengono quindi i due valori critici richiesti

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \sqrt{\text{Var}[\chi^2(n-1)]} z_{\frac{\alpha}{2}} + E[\chi^2(n-1)] = \sqrt{1998}(-1.96) + 999 = 991$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \sqrt{\text{Var}[\chi^2(n-1)]} z_{\frac{\alpha}{2}} + E[\chi^2(n-1)] = \sqrt{1998} 1.96 + 999 = 1086$$

Infine si ottiene la stima richiesta:

$$\text{Var}[P] \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{999 * 1.7017}{1086}, \frac{999 * 1.7017}{991} \right] = [1.565; 1.7154]$$

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

L'evento E_1 è dato dalla probabilità di estrarre un numero negativo da una normale standardizzata. Poiché essa ha mediana pari a 0, suddetta probabilità è pari al 50%. (Si ricorda che la mediana bipartisce l'area sottesa da una densità di probabilità in parti uguali)

L'evento E_2 è dato dalla probabilità di avere un esito negativo in una prova di Bernoulli con probabilità di esito positivo pari al 30%. Poiché in una prova di Bernoulli vi sono solo due esiti fra loro complementari abbiamo che

$$P(E_2) = 1 - P(\bar{E}_2) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.3 = 70\%$$

Essendo gli eventi indipendenti la probabilità dell'evento intersezione è data dal prodotto delle probabilità

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2) = 0.5 * 0.7 = 0.35$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.5 + 0.7 - 0.35 = 0.85 \quad P(E_1 | E_2) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0.35}{0.7} = 0.5 = P(E_1)$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili.

Due eventi sono incompatibili se non possono verificarsi contemporaneamente ne consegue che la probabilità dell'evento intersezione è nulla. Nel caso in esame questa probabilità è non nulla, quindi è possibile affermare che gli eventi non sono incompatibili.

- Appello del 11 Luglio 2012 -

Esercizio 1)

Si vuole monitorare la presenza di effetti collaterali nella somministrazione di un farmaco contro una particolare emicrania dovuta a cause vascolari. A tale scopo si sono scelti 20 soggetti malati e per ognuno di questi si è rilevato il numero di effetti collaterali

| | | | | |
|-------------------------------|----|---|---|---|
| Numero di Effetti Collaterali | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Frequenza assoluta | 10 | 6 | 3 | 1 |

- a) Determini la tipologia del carattere.
- b) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.
- c) Se possibile, calcoli un indice di variabilità.
- d) La distribuzione dei dati è approssimabile con una normale? Motivare numericamente la risposta.

Esercizio 2)

Si vuole verificare se l'uso del farmaco come placebo (ovvero in soggetti che non necessitano di trattamento), si è voluto verificare se l'incidenza degli effetti collaterali sia influenzata dalla presenza della malattia. Pertanto si sono presi dei soggetti sani e si è ripetuto il protocollo descritto all'Esercizio 1 ottenendo i seguenti dati:

| | | | | |
|-------------------------------|----|----|---|---|
| Numero di Effetti Collaterali | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Frequenza assoluta | 12 | 10 | 6 | 2 |

Il candidato,

- a) realizzi una tabella a doppia entrata che raccolga i dati ricavati nel primo e nel secondo Esercizio (effetti collaterali in pazienti sani e non);
- b) se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione per la serie bivariata;
- c) se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata;
- d) verifichi se l'uso del farmaco in soggetti sani (ovvero la cui emicrania è di origine psicologica) aumenta l'incidenza degli effetti collaterali. Il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)

Il candidato, utilizzando i dati riportati negli Esercizi 1 e 2, stimi puntualmente e per intervallo il valore atteso del numero di effetti collaterali evidenziando le ipotesi necessarie. Il candidato proceda al calcolo anche se queste risultassero non verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi considerati incompatibili:

E_1 : si abbia $x < 5$ dove x è estratto da una normale con valore atteso 5 e varianza 1.

E_2 : estraendo un soggetto a caso dalla sperimentazione descritta all'Esercizio 1, questi abbia mostrato più di un effetto collaterale

- a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_2 | E_1)$.
- b) Il candidato indichi se gli eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi dipendenti.

- Appello del 11 Luglio 2012 -
Svolgimento

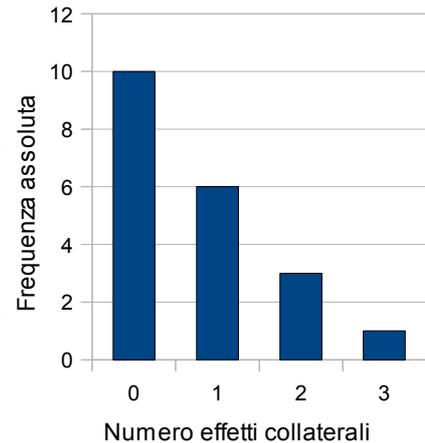
Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto (in quanto non è possibile mostrare 1 effetto collaterale e mezzo).

b) *Fornisca una rappresentazione grafica adeguata dei dati .*

Per un carattere quantitativo discreto una rappresentazione dei dati idonea può essere il diagramma a barre. Questo diagramma è ottenuto ponendo sulle ascisse di un piano cartesiano le modalità delle osservazioni e disegnando per ogni modalità un rettangolo la cui altezza è pari alla relativa frequenza assoluta. A lato si mostra il diagramma ottenuto dai dati in oggetto.



c) *Se possibile, calcoli un indice di variabilità.*

Il carattere in esame (quantitativo discreto) ammette tutti gli indici di variabilità visti nel corso (range, varianza e distanza interquartile e sqm). La varianza delle osservazioni è stata calcolata utilizzando i dati ricavati in Tabella 1 nella seguente formula

$$\sigma_x^2 = \left(\sum_{i=1}^M f_i * c_i^2 \right) - \bar{m}^2 = \left(\sum_{i=1}^M f_i * c_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^M f_i * c_i \right)^2 = 1.35 - 0.75^2 = 1.35 - 0.5625 = 0.7875$$

d) *La distribuzione dei dati è approssimabile con una normale? Motivare numericamente la risposta.*

Una distribuzione viene approssimata ad una normale se è simmetrica (la normale è una d.d.p. simmetrica) e se il suo d.d.p. presenta un andamento simile a quello di una normale con lo stesso valor atteso e la stessa varianza. Spesso non si testa la simmetria, in ogni caso ognuna delle due caratteristiche può essere testata con diversi indici

- *Simmetria:* momento centrale terzo; indice di simmetria (momento centrale terzo standardizzato); indice di asimmetria del Pearson
- *Vicinanza alla gaussiana:* centrale quarto oppure indice di curtosi (momento centrale quarto standardizzato) oppure eccesso curtosi.

Nel caso in esame abbiamo sfruttato i valori in Tabella 1 per il calcolo degli indici di simmetria e di eccesso curtosi: se entrambi i valori sono prossimi allo zero l'approssimazione può definirsi accettabile.

- simmetria $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^M f_i (m_i - \bar{m})^3}{(\sqrt{\sigma^2})^3} = \frac{0.6563}{(\sqrt{0.7875})^3} = 0.939$
- vicinanza alla gaussiana $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^M f_i (m_i - \bar{m})^4}{(\sigma^2)^2} - 3 = \frac{1.81}{(0.7875)^2} - 3 = -0.09$

Sebbene l'eccesso curtosi sia prossimo allo zero la distribuzione è fortemente asimmetrica (si ricorda che il valore del coefficiente di curtosi ha come massimo l'unità). Pertanto l'approssimazione alla gaussiana è da sconsigliarsi.

| Effetti Collaterali modalità | frequenze assolute | frequenze relative | scarto | | | | | | | | |
|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|---------|---------------|-----------------|---------------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|--|
| | | | $m_i * f_i$ | m_i^2 | $m_i^2 * f_i$ | $m_i - \bar{m}$ | $(m_i - \bar{m})^3$ | $(m_i - \bar{m})^3 * f_i$ | $(m_i - \bar{m})^4$ | $(m_i - \bar{m})^4 * f_i$ | |
| 0 | 10 | 0.50 | 0 | 0 | 0 | -0.75 | -0.42 | -0.21 | 0.32 | 0.16 | |
| 1 | 6 | 0.30 | 0.300 | 1 | 0.3 | 0.25 | 0.02 | 0 | 0.00 | 0 | |
| 2 | 3 | 0.15 | 0.300 | 4 | 0.6 | 1.25 | 1.95 | 0.29 | 2.44 | 0.37 | |
| 3 | 1 | 0.05 | 0.150 | 9 | 0.45 | 2.25 | 11.39 | 0.57 | 25.63 | 1.28 | |
| Totali | 20 | 1 | 0.750 | | 1.35 | | | 0.6563 | | 1.81 | |

Tabella 1) analisi dati Esercizio 1

Esercizio 2)

a) Realizzi una tabella a doppia entrata che raccolga i dati ricavati nel primo e nel secondo Esercizio (effetti collaterali in pazienti sani e non).

Nei due esercizi si descrive una bivariata che raccoglie i seguenti caratteri

- X: stato del soggetto (carattere qualitativo non ordinabile)
- Y: numero di effetti collaterali riscontrati (carattere quantitativo discreto)

Le cui osservazioni possono essere raccolte nella seguente tabella a doppia entrata.

| | | Y: numero di effetti collaterali riscontrati | | | | Totali |
|----------|--------|--|----|---|---|--------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| X: stato | Sano | 12 | 10 | 6 | 2 | 30 |
| | Malato | 10 | 6 | 3 | 1 | 20 |
| Totali | | 22 | 16 | 9 | 3 | 50 |

b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione per la serie bivariata

Per serie bivariate con almeno un carattere quantitativo, l'unico indice di posizione possibile è la moda ovvero la modalità corrispondente alla frequenza maggiore. Nel nostro caso la frequenza maggiore è 12, pertanto la moda è:

(Sano; 0)

c) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata

Non è possibile, con le tecniche viste nel corso, calcolare indici di variabilità per serie bivariate con almeno un carattere quantitativo.

d) verifichi se l'uso del farmaco in soggetti sani (ovvero la cui emicrania è di origine psicologica) aumenta l'incidenza degli effetti collaterali. Il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Se vi fosse un legame fra i due caratteri questi dovrebbero essere dipendenti; pertanto come prima cosa si valuta la loro indipendenza. Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze.

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze teoriche sono state riportate fra parentesi nella seguente tabella

| | | Y: numero di effetti collaterali riscontrati | | | | Totali |
|----------|--------|--|----------|---------|---------|--------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| X: stato | Sano | 12 (13.2) | 10 (9.6) | 6 (5.4) | 2 (1.8) | 30 |
| | Malato | 10 (8.8) | 6 (6.4) | 3 (3.6) | 1 (1.2) | 20 |
| Totali | | 22 | 16 | 9 | 3 | 50 |

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson mediante la verifica dell'unica ipotesi vista a tal riguardo ovvero che tutte le frequenze teoriche siano superiori a 5.

Constatato che la condizione non è verificata ci si dovrebbe fermare nella valutazione. Nonostante ciò il test richiede di procedere nella procedura.

Si calcola la regione di accettazione dopo aver fissato il livello di significatività (posto nel nostro caso al 5%).

$$A = [0; \chi^2_{1-\alpha}((M_x - 1)(M_y - 1))] = [0; \chi^2_{1-0.05}((2-1)(4-1))] = [0; \chi^2_{0.95}(3)] = [0; 7.82]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} = \frac{(12-13.2)^2}{13.2} + \frac{(10-9.6)^2}{9.6} + \frac{(6-5.4)^2}{5.4} + \frac{(2-1.8)^2}{1.8} + \frac{(10-8.8)^2}{8.8} + \frac{(10-8.8)^2}{8.8} + \frac{(6-6.4)^2}{6.4} + \frac{(3-3.4)^2}{3.4} + \frac{(1-1.2)^2}{1.2} = 0.11 + 0.02 + 0.07 + 0.02 + 0.16 + 0.03 + 0.10 + 0.03 = 0.54$$

Poichè il valore dello stimatore è interno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri sono indipendenti ad un livello di significatività del 5%. Quindi si può scartare l'ipotesi che esista un'influenza fra il numero di effetti collaterali riscontrati e lo stato del soggetto.

Esercizio 3)

Le tecniche di stima viste nel corso prevedono che:

- la popolazione sia descrivibile mediante una variabile casuale,
- che il campione abbia una numerosità tale da far convergere lo stimatore e
- che le prove siano indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.).

Nel caso in esame

- descrivere l'esperimento mediante la seguente variabile casuale X : *numero di effetti collaterali riscontrati*.
- la grandezza da stimare risulta $E[X]$ il cui stimatore è la media campionaria la quale converge in legge per campioni avente numerosità superiore a 30 (ipotesi confermata, si hanno infatti 50 prove: 30 provenienti dal primo esercizio e 20 dal secondo).
- L'ipotesi di prove i.i.d. è un po' debole in quanto si suppone che la probabilità di avere un effetto collaterale sia distribuita in maniera identica per ogni soggetto.

La stima puntuale si ottiene semplicemente dall'applicazione dello stimatore, pertanto

$$\hat{\theta} = E[\hat{X}] = \bar{x} = \sum_1^M f_i m_i = 0.86$$

Per effettuare una stima per intervallo si deve, come prima cosa, fissare un livello di confidenza: nel nostro caso 95% ($\alpha=0.05$). Avendo così definito la tipologia di stima (stima per intervallo al 95%), si ha che essa è data dalla seguente formula

$$E[\hat{P}] \in \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\text{Var}[X]}{N}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\text{Var}[X]}{N}} \right]$$

Dove il valore della normale standardizzata si ottiene dalle tavole mentre la varianza della popolazione si stima puntualmente come illustrato nel seguito.

- $z_{1-\alpha/2}$: con questa notazione si intende il valore di z che lasci alla sua sinistra una probabilità (data dall'area sottesa dalla d.d.p) pari ad $1-\alpha/2$.

$$\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = 1 - \alpha/2$$

Ricodando che nelle tavole sono graficati le aree sottese dalla normale standardizzata fra 0 ed un valore positivo di Z , dobbiamo trovare un modo per ricondurci all'uso di questa tipologia di integrali. Questo può essere fatto spezzando l'integrale in due: fra meno infinito e zero e fra zero e $z_{1-\alpha/2}$. In simboli:

$$\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = 1 - \alpha/2$$

Elaborando gli ultimi due membri l'equazione si ottiene il seguente risultato

$$\int_0^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = - \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 1 - \alpha/2 = 0.5 - \alpha/2 = 0.5 - 0.05/2 = 0.475$$

Pertanto il valore $z_{1-\alpha/2}$ è quello a cui sulle tavole corrisponde l'area di 0.475; ottenendo

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

- *Stima della varianza*. La varianza viene stimata utilizzando il suo stimatore corretto: la varianza campionaria s^2 . Essa viene ricavata utilizzando la seguente formula in cui i dati sono estratti dalla Tabella 2

$$s^2 = \sigma^2 \frac{N}{N-1} = \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i^2 - \bar{m} \right) \frac{N}{N-1} = \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i \right)^2 \right) \frac{N}{N-1} = (1.58 - 0.86^2) \frac{50}{49} = 0.88$$

Infine si ottiene la stima richiesta:

$$E[\hat{P}] \in \left[\bar{x} - \sqrt{\frac{Var[X]}{N}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{Var[X]}{N}} \right] = \left[0.86 - 1.96 \sqrt{\frac{0.88}{50}}; 0.86 + 1.96 \sqrt{\frac{0.88}{50}} \right] = [0.60; 1.12]$$

| Effetti Collaterali modalità m_i | frequenze assolute n_i | frequenze relative f_i | $m_i * f_i$ | m_i^2 | $m_i^2 * f_i$ |
|--|--------------------------------|--------------------------------|-------------|---------|---------------|
| 0 | 22 | 0.4400 | 0 | 0 | 0.0000 |
| 1 | 16 | 0.3200 | 0.3200 | 1 | 0.3200 |
| 2 | 9 | 0.1800 | 0.3600 | 4 | 0.7200 |
| 3 | 3 | 0.0600 | 0.1800 | 9 | 0.5400 |
| Totali | 50 | | 0.8600 | | 1.5800 |

Tabella 2) Dati Esercizio 3 ottenuti raggruppando i dati degli Esercizi 1 e 2.

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

L'evento E_1 è dato dalla probabilità di estrarre un numero minore di $X < 5$ dove $X \sim N(5, 1)$. Per ottenere questa probabilità si deve standardizzare la v.c. X , ottenendo il corrispondente valore standardizzato

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}} \rightarrow z = \frac{5 - 5}{\sqrt{1}} = 0$$

Pertanto si ha che

$$P(E_1) = P(X < 5) = P(Z < 0) = 0.5$$

L'evento E_2 può essere ricavato utilizzando la definizione classica di probabilità (casi favorevoli su casi totali). I casi totali sono date dalle 20 osservazioni, mentre i casi favorevoli sono quelli in cui si osservano più di un effetto collaterale (quindi i casi in cui si osservano 2 o 3 effetti collaterali). Pertanto si ha che

$$P(E_2) = \frac{3+1}{20} = \frac{4}{20} = 0.2$$

Essendo gli eventi incompatibili la probabilità dell'evento intersezione (ovvero che si verificano entrambi gli eventi) è nulla.

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.5 + 0.2 - 0 = 0.7 \quad P(E_2 | E_1) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{0}{0.5} = 0$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi dipendenti.

Due eventi sono dipendenti se il verificarsi di un evento modifica la probabilità che si verifichi l'altro. Poiché gli eventi sono incompatibili sono ovviamente dipendenti. Infatti, il verificarsi di un evento azzerava la probabilità del verificarsi dell'altro.

- Appello del 05 Settembre 2012 -

Esercizio 1)

Si vuole monitorare lo sforzo percepito da un atleta durante sequenza di 11 esercizi. Tali esercizi richiedono uno sforzo crescente da parte dell'atleta. La misurazione avviene nel momento in cui sono stati svolti 3/4 dell'esercizio e si chiede all'atleta di esprimere una delle seguenti valutazioni dello sforzo: (N) nullo, (L) leggero, (M) moderato, (I) intenso, (MI) molto intenso, (IN) insostenibile. Nella prima seduta si sono ottenute le seguenti misurazioni:

N L L L M I I M I M I M I

- a) Determini la tipologia del carattere.
- b) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.
- c) Si indichino e si calcolino tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati.
- d) Si indichino gli indici di variabilità adeguati ai dati e, se possibile, se ne calcoli uno.

Esercizio 2)

Il soggetto descritto nell'Esercizio 1 ha ripetuto il test dopo un mese di allenamento ottenendo le seguenti misurazioni:

N L L L L M M I I M I M I

Il candidato,

- a) realizzi una tabella a doppia entrata che raccolga i dati ricavati nel primo e nel secondo Esercizio (prima e seconda sessione di allenamento);
- b) se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione per la serie bivariata;
- c) se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata;
- d) verifichi se l'allenamento ha inciso in maniera significativa sulla fatica percepita dall'atleta. Il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)

Nello scenario tratteggiato nell'Esercizio 1, si vuole fornire un indicatore numerico della fatica percepita pertanto si sostituiscono alle modalità il rispettivo numero d'ordine. (N => 1, L => 2, ... , IN => 6). Il candidato, stimi per intervallo il valore atteso della fatica percepita dall'atleta durante la prima sessione di allenamento (descritta nell'Esercizio 1). Il candidato evidenzi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste risultassero non verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi:

E_1 : si abbia $y = 1$ estraendo da una $Ber(0.4)$

E_2 : si abbia $z < 0$ dove z è estratto da una normale standardizzata.

Il candidato, sapendo che la probabilità che gli eventi si verifichino contemporaneamente è del 20%,

- a) calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_1 | E_2)$; $P(E_2 | E_1)$;
- b) indichi se gli eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi dipendenti.

- Appello del 5 Settembre 2012 -
Svolgimento

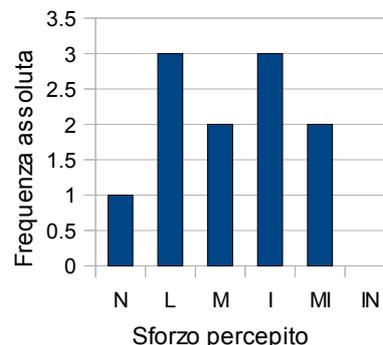
Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto non espresso da numeri ma da etichette) ordinabile (in quanto è possibile ordinare le modalità in maniera oggettiva $N < L < M < I < MI < IN$).

b) *Fornisca una rappresentazione grafica adeguata dei dati.*

Per un carattere qualitativo ordinabile una rappresentazione dei dati idonea può essere il diagramma a barre. Questo diagramma è ottenuto ponendo sulle ascisse di un piano cartesiano le modalità delle osservazioni e disegnando per ogni modalità un rettangolo la cui altezza è pari alla relativa frequenza assoluta. A lato si mostra il diagramma ottenuto dai dati in oggetto.



c) *Si indichino e si calcolino tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati.*

Gli indici di posizione visti nel corso sono tre: media, moda e mediana. Nel caso in esame è possibile calcolare solo gli ultimi due. La moda è data dalla modalità avente la più alta frequenza assoluta. Nel caso in esame la moda non è unica: si hanno infatti due modalità a frequenza maggiore: L ed I (si parla di distribuzione *bi-modale*). La mediana è invece l'osservazione che bipartisce i dati ordinati. Avendo 11 osservazioni la mediana sarà la sesta (essa è preceduta da 5 osservazioni e seguita da 5 osservazioni) pertanto ordinano le osservazioni

N L L L M M I I I MI MI

Si evince che la mediana è M.

d) *Si indichino gli indici di variabilità adeguati ai dati e, se possibile, se ne calcoli uno.*

Nel caso di caratteri qualitativi non è possibile introdurre il concetto di variabilità.

Esercizio 2)

a) *Realizzi una tabella a doppia entrata che raccolga i dati ricavati nel primo e nel secondo Esercizio (effetti collaterali in pazienti sani e non).*

Nei due esercizi si descrive una bivariata che raccoglie i seguenti caratteri

- X: sessione di allenamento (carattere qualitativo ordinabile)
- Y: sensazione di fatica (carattere qualitativo ordinabile)

Le cui osservazioni possono essere raccolte nella seguente tabella a doppia entrata.

| | | Y: sensazione di fatica | | | | | Totali |
|----------------------------|---------|-------------------------|---|---|---|----|--------|
| | | N | L | M | I | MI | |
| X: sessione di allenamento | Prima | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 11 |
| | Seconda | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 11 |
| Totali | | 2 | 7 | 4 | 5 | 4 | 22 |

b) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione per la serie bivariata*

Per serie bivariate con almeno un carattere quantitativo, l'unico indice di posizione possibile è la moda ovvero la modalità corrispondente alla frequenza maggiore. Nel nostro caso la frequenza maggiore è 12, pertanto la moda è:

(Seconda; L)

c) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata*

Non è possibile, con le tecniche viste nel corso, calcolare indici di variabilità per serie bivariate con almeno un carattere quantitativo.

d) *verifichi se l'allenamento ha inciso in maniera significativa sulla fatica percepita dall'atleta. Il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.*

Se vi fosse un legame fra i due caratteri questi dovrebbero essere dipendenti; pertanto come primo passo si valuta la loro indipendenza. Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza. Il test viene fatto

sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze teoriche sono state riportate fra parentesi nella seguente tabella

| | | Y: sensazione di fatica | | | | | Totali |
|----------------------------|---------|-------------------------|---------|-------|---------|-------|--------|
| | | N | L | M | I | MI | |
| X: sessione di allenamento | Prima | 1 (1) | 3 (3.5) | 2 (2) | 3 (2.5) | 2 (2) | 11 |
| | Seconda | 1 (1) | 4 (3.5) | 2 (2) | 2 (2.5) | 2 (2) | 11 |
| Totali | | 2 | 7 | 4 | 5 | 4 | 22 |

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson mediante la verifica dell'unica ipotesi vista a tal riguardo ovvero che tutte le frequenze teoriche siano superiori a 5.

Constatato che la condizione non è verificata ci si dovrebbe fermare nella valutazione. Nonostante ciò il test richiede di procedere nella procedura. Pertanto, si procede al calcolo della regione di accettazione dopo aver fissato il livello di significatività (posto nel nostro caso al 1%).

$$A = [0; \chi^2_{1-\alpha}((M_x - 1)(M_y - 1))] = [0; \chi^2_{1-0.01}((2-1)(5-1))] = [0; \chi^2_{0.99}(4)] = [0; 13.28]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} =$$

$$= \frac{(1-1)^2}{1} + \frac{(3-3.5)^2}{3.5} + \frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(3-2.5)^2}{2.5} + \frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(1-1)^2}{1} + \frac{(4-3.5)^2}{3.5} + \frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(2-2.5)^2}{2.5} + \frac{(2-2)^2}{2} =$$

$$= 0 + 0.07 + 0 + 0.1 + 0 + 0 + 0.07 + 0 + 0.1 + 0 = 0.34$$

Poichè il valore dello stimatore è interno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri sono indipendenti ad un livello di significatività del 1%. Quindi si può scartare l'ipotesi che esista un'influenza fra l'allenamento e la fatica percepita dal soggetto.

Esercizio 3)

Le tecniche di stima viste nel corso prevedono che:

- la popolazione sia descrivibile mediante una variabile casuale,
- che il campione abbia una numerosità tale da far convergere lo stimatore e
- che le prove siano indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.).

Nel caso in esame

- descrivere l'esperimento mediante la seguente variabile casuale X : *fatica percepita durante lo svolgimento di un esercizio.*
- la grandezza da stimare risulta $E[X]$ il cui stimatore è la media campionaria la quale converge in legge per campioni avente numerosità superiore a 30 (ipotesi non confermata, si hanno infatti 11 estrazioni in ambo i casi).
- L'ipotesi di prove i.i.d. è un molto debole in quanto si suppone che la distribuzione della v.c. di avere un non cambi attraverso le prove (sappiamo che gli esercizi sono fra di loro a difficoltà crescente).

Per effettuare una stima per intervallo si deve, come prima cosa, fissare un livello di confidenza: nel nostro caso 95% ($\alpha=0.05$). Avendo così definito la tipologia di stima (stima per intervallo al 95%), si ha che essa è data dalla seguente formula

$$E[\hat{P}] \in \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{Var[X]}{N}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{Var[X]}{N}} \right]$$

Dove il valore della normale standardizzata si ottiene dalle tavole mentre la varianza della popolazione si stima puntualmente come illustrato nel seguito.

- $z_{1-\alpha/2}$: con questa notazione si intende il valore di z che lasci alla sua sinistra una probabilità (data dall'area sottesa dalla d.d.p) pari ad $1-\alpha/2$.

$$\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = 1 - \alpha/2$$

Ricodando che nelle tavole sono graficati le aree sottese dalla normale standardizzata fra 0 ed un valore positivo di Z , dobbiamo trovare un modo per rindurci all'uso di questa tipologia di integrali. Questo può essere fatto spezzando l'integrale in due: fra meno infinito e zero e fra zero e $z_{1-\alpha/2}$. In simboli:

$$\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = 1 - \alpha/2$$

Elaborando gli ultimi due membri l'equazione si ottiene il seguente risultato

$$\int_0^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = - \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 1 - \alpha/2 = 0.5 - \alpha/2 = 0.5 - 0.05/2 = 0.475$$

Pertanto il valore $z_{1-\alpha/2}$ è quello a cui sulle tavole corrisponde l'area di 0.475; ottenendo

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

- *Stima della varianza.* La varianza viene stimata utilizzando il suo stimatore corretto: la varianza campionaria s^2 . Essa viene ricavata utilizzando la seguente formula in cui i dati sono estratti dalla Tabella 1

$$s^2 = \sigma^2 \frac{N}{N-1} = \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i^2 - \bar{m} \right) \frac{N}{N-1} = \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i \right)^2 \right) \frac{N}{N-1} = (11.73 - 3.18^2) \frac{11}{10} = 1.76$$

Infine si ottiene la stima richiesta:

$$E[\hat{P}] \in \left[\bar{x} - \sqrt{\frac{Var[X]}{N}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{Var[X]}{N}} \right] = \left[3.18 - 1.96 \sqrt{\frac{1.76}{11}}; 3.18 + 1.96 \sqrt{\frac{1.76}{11}} \right] = [2.40; 3.96]$$

| Fatica percepita modalità m_i | frequenze assolute n_i | frequenze relative f_i | $m_i * f_i$ | m_i^2 | $m_i^2 * f_i$ |
|---------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------|---------|----------------|
| 1 | 1 | 0.0909 | 0.09 | 1 | 0.0909 |
| 2 | 3 | 0.2727 | 0.5455 | 4 | 1.0909 |
| 3 | 2 | 0.1818 | 0.5455 | 9 | 1.6364 |
| 4 | 3 | 0.2727 | 1.0909 | 16 | 4.3636 |
| 5 | 2 | 0.1818 | 0.9091 | 25 | 4.5455 |
| 6 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 36 | 0.0000 |
| Totali | 11 | | 3.1818 | | 11.7273 |

Tabella 1) Dati Esercizio 3 ottenuti convertendo i dati dell'Esercizio 1 in modalita numeriche.

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_1 | E_2)$; $P(E_2 | E_1)$.

La probabilità dell'evento E_1 è pari alla probabilità di avere un esito positivo (ovvero pari ad uno) estraendo un valore da una distribuzione di Bernoulli. Ricordando che una generica distribuzione di Bernoulli di parametro p (ovvero $Ber(p)$) sono possibili solo due esiti (0 ed 1) e che il parametro indica la probabilità dell'esito positivo si ottiene immediatamente che:

$$P(E_1) = P(Y=1) = p = 0.4$$

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di avere un esito maggiore di zero da una normale standardizzata. Questa probabilità è pari all'area sottesa della d.d.p. della normale standardizzata fra 0 e + infinito. Questa area può essere facilmente ricavata ricordando che la d.d.p sottende area unitaria (come tutte le d.d.p.) ed simmetrica e centrata nell'origine. Pertanto si può dire che il valore atteso (ovvero l'origine) bipartisce l'area sottesa. Pertanto:

$$P(E_2) = P(Z > 0) = 1/2 = 0.5$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7 \quad P(E_2 | E_1) = P\left(\frac{E_1 \cap E_2}{E_1}\right) = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

b) Il candidato indichi se i due eventi E_1 ed E_2 possono ritenersi dipendenti.

Due eventi sono dipendenti se il verificarsi di un evento modifica la probabilità che si verifichi l'altro. Nel caso in esame questo non succede, pertanto possiamo ritenere i due eventi statisticamente indipendenti.

- Appello del 19 Settembre 2012 -

Esercizio 1)

Un mese prima di una elezione è stato chiesto ad un campione di 35 maggiorenni di esprimere una intenzione di voto in cui le risposte possibili sono (D = destra, C = centro, S= sinistra, R = non andrò a votare). Le osservazioni ottenute sono le seguenti:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | C | R | R | R | D | D | D | R | D |
| C | S | D | S | S | S | C | S | D | S |
| D | S | D | C | S | S | C | C | S | D |
| R | D | S | S | R | | | | | |

Il candidato

- determini la tipologia del carattere;
- fornisca una rappresentazione grafica dei dati;
- indichi e calcoli tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati;
- indichi gli indici di variabilità adeguati ai dati e, se possibile, se ne calcoli uno.

Esercizio 2)

Due giorni prima delle elezioni si è ripetuto il sondaggio ottenendo le seguenti misurazioni:

| | Destra | Sinistra | Centro | Non Voto | Totale |
|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| Fequenza | 13 | 14 | 6 | 2 | 35 |

Il candidato,

- realizzi una tabella a doppia entrata che raccolga i dati ricavati nei sondaggi descritti negli Esercizi 1 e 2;
- se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione per la serie bivariata e per le distribuzioni marginali;
- se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata;
- stabilisca ad un livello di significatività del 1% se i risultati dei due sondaggi presentano differenze statisticamente significative. Il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)

Nel sondaggio descritto negli Es. 1 e 2 si è rilevata anche l'età degli intervistati ottenendo la distribuzione a classi:

| | da 19 a 25 | da 25 a 35 | da 35 a 55 | da 55 a 85 | Totale |
|----------|------------|------------|------------|------------|--------|
| Fequenza | 10 | 25 | 15 | 20 | 70 |

Il candidato, stimi per intervallo il valore atteso dell'età dei votanti. Il candidato evidenzi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste risultassero non verificate.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi:

E_1 : si abbia $Y = 1$ estraendo da una v.c. $Y \sim Ber(0.4)$

E_2 : estraendo un votante dal campione descritto nell'Esercizio 2 questo voti a sinistra.

Il candidato, sapendo che gli eventi sono indipendenti, calcoli le seguenti probabilità:

$P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_1 | E_2)$; $P(E_2 | E_1)$.

- Appello del 19 Settembre 2012 -
Svolgimento

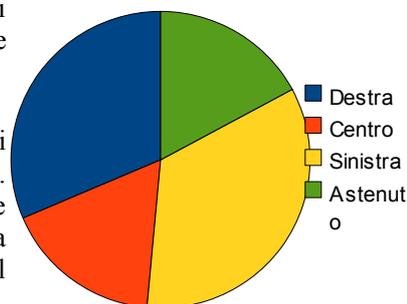
Esercizio 1)

a) *Determinare la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto non espresso da numeri ma da etichette) non ordinabile (in quanto è non possibile ordinare le modalità in maniera oggettiva).

b) *Fornisca una rappresentazione grafica adeguata dei dati.*

Per un carattere qualitativo non ordinabile una rappresentazione dei dati idonea può essere il diagramma a barre o il diagramma a torta. Quest'ultimo è ottenuto dividendo una sulle ascisse di un piano cartesiano le modalità delle osservazioni e disegnando per ogni modalità un rettangolo la cui altezza è pari alla relativa frequenza assoluta. A lato si mostra il diagramma ottenuto dai dati in oggetto.



c) *Si indichino e si calcolino tutti gli indici di posizioni adeguati ai dati.*

Gli indici di posizione visti nel corso sono tre: media, moda e mediana. Nel caso in esame è possibile calcolare solo la moda. La moda è data dalla modalità avente la più alta frequenza assoluta. Nel caso in esame la moda è unica ed è rappresentata dalla modalità "Sinistra" avente 12 osservazioni.

d) *Si indichino gli indici di variabilità adeguati ai dati e, se possibile, se ne calcoli uno.*

Nel caso di caratteri qualitativi non è possibile introdurre il concetto di variabilità.

Esercizio 2)

a) *realizzi una tabella a doppia entrata che raccolga i dati ricavati nei sondaggi descritti negli Esercizi 1 e 2*

Nei due esercizi si descrive una bivariata che raccoglie i seguenti caratteri

- X: sondaggio (carattere qualitativo ordinabile)
- Y: intenzione di voto (carattere qualitativo non ordinabile)

Le cui osservazioni possono essere raccolte nella seguente tabella a doppia entrata.

| | | Y: intenzione di voto | | | | Totali |
|--------------|---------|-----------------------|--------|----------|----------|--------|
| | | Destra | Centro | Sinistra | Astenuto | |
| X: sondaggio | primo | 11 | 6 | 12 | 6 | 35 |
| | secondo | 13 | 6 | 14 | 2 | 35 |
| Totali | | 24 | 12 | 26 | 8 | 70 |

b) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione per la serie bivariata*

Per serie bivariata con almeno un carattere quantitativo, l'unico indice di posizione possibile è la moda ovvero la modalità corrispondente alla frequenza maggiore. Nel nostro caso la frequenza maggiore è 12, pertanto la moda è:

(Seconda; Sinistra)

c) *Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata*

Non è possibile, con le tecniche viste nel corso, calcolare indici di variabilità per serie bivariata con almeno un carattere quantitativo.

d) *stabilista ad un livello di significatività del 1% se i risultati dei due sondaggi presentano differenze statisticamente significative. Il candidato indichi le necessarie ipotesi e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.*

Se vi fossero differenze statistiche significative vorrebbe dire che un legame sarebbe ipotizzabile fra l'appartenenza ad un sondaggio (valore della v.c. X) e l'esito del sondaggio (v.c. Y). Pertanto è lecito affermare che se vi è statistica differenza fra i due sondaggi allora le due variabili casuali non sono indipendenti (ossia un legame sussiste fra i due caratteri). Pertanto una possibile risposta alla domanda viene data valutando l'indipendenza fra i caratteri della bivariata. Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendenza che risulta essere l'ipotesi nulla del test. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti

Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

le frequenze teoriche sono state riportate fra parentesi nella seguente tabella

| | | Y: intenzione di voto | | | | Totali |
|--------------|---------|-----------------------|--------|----------|----------|--------|
| | | Destra | Centro | Sinistra | Astenuto | |
| X: sondaggio | primo | 11 (12) | 6 (6) | 12 (13) | 6 (4) | 35 |
| | secondo | 13 (12) | 6 (6) | 14 (13) | 2 (4) | 35 |
| Totali | | 24 | 12 | 26 | 8 | 70 |

A questo punto è possibile valutare la convergenza dell stimatore di Pizzetti Pearson mediante la verifica dell'unica ipotesi vista a tal riguardo ovvero che tutte le frequenze teoriche siano superiori a 5.

Constatato che la condizione non è verificata ci si dovrebbe fermare nella valutazione. Nonostante ciò il testo richiede di procedere nella procedura. Pertanto, si procede al calcolo della regione di accettazione dopo aver fissato il livello di significatività (posto nel nostro caso al 1%).

$$A = [0; \chi^2_{1-\alpha}((M_x - 1)(M_y - 1))] = [0; \chi^2_{1-0.01}((2-1)(4-1))] = [0; \chi^2_{0.99}(3)] = [0; 11.341]$$

Si può ora procedere al calcolo dello stimatore vero e proprio

$$\frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} =$$

$$= \frac{(11-12)^2}{12} + \frac{(6-6)^2}{6} + \frac{(12-13)^2}{13} + \frac{(6-4)^2}{4} + \frac{(13-12)^2}{12} + \frac{(6-6)^2}{6} + \frac{(14-13)^2}{13} + \frac{(2-4)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{13} + 1 + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{13} + 1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{13} + 2 = 2.32$$

Poichè il valore dello stimatore è interno all'intervallo di accettazione posso dire che i due caratteri sono indipendenti ad un livello di significatività del 1%. Quindi si può asserire che non vi sia una differenza statisticamente significativa fra i due campioni.

Esercizio 3)

Le tecniche di stima viste nel corso prevedono che:

- la popolazione sia descrivibile mediante una variabile casuale,
- che il campione abbia una numerosità tale da far convergere lo stimatore e
- che le prove siano indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.).

Nel caso in esame

- descrivere l'esperimento mediante la seguente variabile casuale X : età degli intervistati durante un sondaggio composto da due sessioni.
- la grandezza da stimare risulta $E[X]$ il cui stimatore è la media campionaria la quale converge in legge per campioni avente numerosità superiore a 30 (ipotesi confermata, si hanno infatti 70 soggetti selezionati).
- L'ipotesi di prove i.i.d. è solida in quanto si suppone che la distribuzione della v.c. di avere un non cambi attraverso le prove (si suppone che la probabilità che un soggetto entri nel campione sia fondamentalmente inalterata nelle varie estrazioni).

Per effettuare una stima per intervallo si deve, come prima cosa, fissare un livello di confidenza: nel nostro caso 95% ($\alpha=0.05$).Avendo così definito la tipologia di stima (stima per intervallo al 95%), si ha che essa è data dalla seguente formula

$$E[\hat{P}] \in \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{Var[X]}}{N}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{Var[X]}}{N} \right]$$

Dove il valore della normale standardizzata si ottiene dalle tavole mentre la varianza della popolazione si stima puntualmente come illustrato nel seguito.

- $z_{1-\alpha/2}$: con questa notazione si intende il valore di z che lasci alla sua sinistra una probabilità (data dall'area sottesa dalla d.d.p) pari ad $1-\alpha/2$.

$$\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = 1 - \alpha/2$$

Ricodando che nelle tavole sono graficati le aree sottese dalla normale standardizzata fra 0 ed un valore

positivo di Z , dobbiamo trovare un modo per ricondurci all'uso di questa tipologia di integrali. Questo può essere fatto spezzando l'integrale in due: fra meno infinito e zero e fra zero e $z_{1-\alpha/2}$. In simboli:

$$\int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = 1 - \alpha/2$$

Elaborando gli ultimi due membri l'equazione si ottiene il seguente risultato

$$\int_0^{z_{1-\alpha/2}} f(x) dx = - \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 1 - \alpha/2 = 0.5 - \alpha/2 = 0.5 - 0.05/2 = 0.475$$

Pertanto il valore $z_{1-\alpha/2}$ è quello a cui sulle tavole corrisponde l'area di 0.475; ottenendo

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

- *Calcolo della media.* Quando si ha a disposizione una statistica organizzata per classi per procedere al calcolo della media si può associare ad ogni classe il proprio valore centrale. Questo diviene in sostanza la modalità cui si riferiscono le frequenze (sia relative che assolute). A questo punto si procede normalmente come mostrato in Tabella 1 ottenendo una media di 43.5.
- *Stima della varianza.* La varianza viene stimata utilizzando il suo stimatore corretto: la varianza campionaria s^2 . Essa viene ricavata utilizzando la seguente formula in cui i dati sono estratti dalla Tabella 1

$$s^2 = \sigma^2 \frac{N}{N-1} = \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i^2 - \bar{m} \right) \frac{N}{N-1} = \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M f_i m_i \right)^2 \right) \frac{N}{N-1} = (2224.5 - 43.5^2) \frac{70}{69} = 337.07$$

Infine si ottiene la stima richiesta:

$$E[\hat{P}] \in \left[\bar{x} - \sqrt{\frac{Var[X]}{N}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{Var[X]}{N}} \right] = \left[43.5 - 1.96 \sqrt{\frac{337.07}{70}}; 43.5 + 1.96 \sqrt{\frac{337.07}{70}} \right] = [41.31; 45.69]$$

| Classe | Valore Centrale c_i | frequenze assolute n_i | frequenze relative f_i | $m_i * f_i$ | m_i^2 | $m_i^2 * f_i$ |
|---------|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------|---------|---------------|
| 19 - 25 | 22 | 10 | 0.1429 | 3.14 | 484 | 69.1429 |
| 25 - 35 | 30 | 25 | 0.3571 | 10.7143 | 900 | 321.4286 |
| 35 - 55 | 45 | 15 | 0.2143 | 9.6429 | 2025 | 433.9286 |
| 55 - 85 | 70 | 20 | 0.2857 | 20.0000 | 4900 | 1400.0000 |
| Totali | | 70 | | 43.5000 | | 2224.5000 |

Tabella 1) Dati Esercizio 3.

Esercizio 4)

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$; $P(E_1 | E_2)$; $P(E_2 | E_1)$.

La probabilità dell'evento E_1 è pari alla probabilità di avere un esito positivo (ovvero pari ad uno) da distribuzione di Bernoulli. Ricordando che una generica distribuzione di Bernoulli di parametro p (ovvero $Ber(p)$) sono possibili solo due esiti (0 ed 1) e che il parametro indica il la probabilità dell'esito positivo si ottiene immediatamente che:

$$P(E_1) = P(Y=1) = p = 0.4$$

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di estrarre dai 35 soggetti del campione dell'esercizio 2 uno dei 14 votanti di sinistra. Ricordando che la probabilità in caso di eventi equiprobabili è data dal rapporto casi favorevoli su casi totali si ha che:

$$P(E_2) = 14/35 = 2/5 = 0.4$$

Anche se non richiesto dal testo, è utile calcolare la probabilità dell'evento intersezione che per eventi indipendenti è data dalla seguente

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2) = 0.4^2 = 0.16$$

Noto ciò, le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.4 + 0.4 - 0.16 = 0.64$$

$$P(E_2 | E_1) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{0.16}{0.4} = 0.4$$

$$P(E_1 | E_2) = P \frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0.16}{0.4} = 0.4$$

- Appello del 26 Giugno 2013 -

Esercizio 1)

Un medico vuole monitorare la glicemia di un soggetto. A tale scopo fa eseguire 11 prelievi di sangue ad intervalli regolari e mediante un fingerstik (apparecchio personale per la misurazione della glicemia) ottenendo le seguenti misurazioni espresse in mg/dl

80 120 88 73 89 88 84 64 90 105 98

Il candidato

- a) Determini la tipologia del carattere.
- b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.
- c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
- d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

Esercizio 2)

Il candidato usi le osservazioni presentate nell'esercizio precedenti per stimare puntualmente e per intervallo il valore atteso della glicemia del paziente in esame. Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)

Per cinque clienti di un laboratorio di analisi, si è misurato il numero di anni di clientela ed il numero di esami svolti nel periodo, ottenendo le seguenti osservazioni:

A(12; 35) B(13; 40) C(11;40) D(25; 105) E(39;130)

dove la lettera indica il codice del cliente, il primo numero gli anni di fideiussione, ed il secondo numero il quantitativo di esami richiesti.

Il candidato

- a) indichi il carattere della serie bi-variata ottenuta
- b) se possibile calcoli un indice sintetico di posizione
- c) se possibile calcoli un indice sintetico di variabilità
- d) fornisca una rappresentazione grafica adeguata dei dati
- e) il candidato ipotizzi un legame di tipo lineare e:
 - e1) calcoli un modello per tale legame
 - e2) valuti la bontà del modello ottenuto (quantitativamente e qualitativamente)
 - e3) utilizzi il modello ottenuto per prevedere quanti esami richiede un soggetto al primo anno di fideiussione

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

E_1 : si ottenga $x \geq 0$ dove x è estratto da una v. c. distribuita come un $\chi^2(2)$.

E_2 : si ottenga $y > 2$ dove y è estratto da una v. c. $Unif(-5;5)$.

- a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
- b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente dipendenti, evento certo ed evento impossibile.

- Tema d'esame del 26 Giugno 2013 -
Svolgimento

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto la concentrazione di fatto è una grandezza continua).

b) *Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.*

L'indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili tutti e tre ma la moda non essendo presenti alte frequenze assolute non risulta indicativo. In questa sede si è scelto di calcolare la mediana (ovvero l'osservazione che bipartisce le osservazioni ordinate). In questo caso si hanno 11 osservazioni pertanto la mediana deve lasciarne $(11-1)/2 = 5$ alla propria destra ed altrettante alla propria sinistra ovvero si considera la sesta osservazione (vedi a tabella a lato).

| i | o_i |
|----|-------|
| 1 | 64 |
| 2 | 73 |
| 3 | 80 |
| 4 | 84 |
| 5 | 88 |
| 6 | 88 |
| 7 | 89 |
| 8 | 90 |
| 9 | 98 |
| 10 | 105 |
| 11 | 120 |

$$Q_1 = (80 + 84)/2 = 82$$

$$Q_2 = 88$$

$$Q_3 = (90 + 98)/2 = 94$$

c) *Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.*

Avendo scelto la mediana come indice di posizione l'indice di variabilità associato risulta essere la distanza interquartile. Per calcolare questo indice debbo fare la differenza fra il terzo ed i primo quartile. Il calcolo è mostrato nella tabella a lato. Si ricorda che il primo (terzo) quartile è quell'osservazione preceduta (seguita) da $(N-1)/4$ osservazioni. Nel caso in esame si ha che $(N-1)/4 = 2.5$ Poiché non è possibile prendere l'osservazione 3.5 per il primo quartile si mediano la terza e la quarta osservazione. Riassunto la distanza interquartile risulta essere

$$Q_3 - Q_1 = 94 - 82 = 12$$

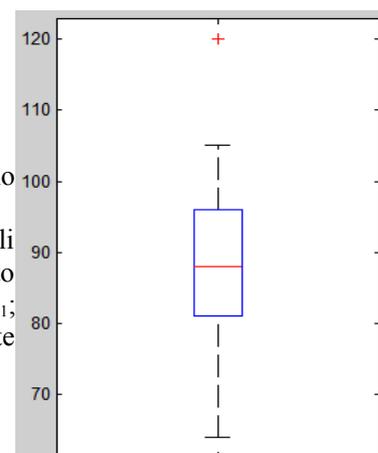
d) *Fornisca una rappresentazione grafica opportuna.*

Per caratteri quantitativi continui due rappresentazioni possibili sono l'istogramma ed il box plot. In questa sede discuteremo quest'ultimo.

Per poter tracciare il box-plot, nota mediana e quartili, si devono identificare gli estremi dei due "baffi" che completano il boxplot. Il baffo inferiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la minima osservazione o_1 ; mentre il baffo superiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la massima osservazione o_{11} . Posta la costante $K=1.5$ si ha che:

$$VAI = Q_1 - 1.5*(Q_3 - Q_1) = 82 - 18 = 64 \quad VAS = Q_2 + 1.5*(Q_3 - Q_1) = 94 + 18 = 116$$

Da cui si ricava agevolmente diagramma a lato che mostra un outlier.



Esercizio 2)

Possiamo modellare il processo di generazione dei dati del presentati nell'esercizio 1 come il frutto di diverse estrazioni dalla variabile casuale

P : glicemia di un soggetto

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $n = 11$ osservazioni.

Continuando con il modello precedentemente definito l'esercizio richiede di stimare $E[P]$ puntualmente e per intervallo.

La stima è possibile solo se la le estrazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite e se la dimensione del campione è pari ad almeno 30 unità. Nel caso in esame entrambe nessuna delle ipotesi si può considerare verificata. Infatti i campioni sono troppo pochi e non sapendo quanto tempo intercorra fra le misurazioni non è facile dire se le misure di glicemia si influenzano fra di loro.

Lo stimatore puntuale del valore atteso è la media campionaria che, utilizzando i conti riportati in tabella produce la seguente stima

$$E[\hat{P}] = \bar{o} = \frac{\sum_{i=1}^n o_i}{n} = \frac{979}{11} = 89$$

Per ottenere la stima per intervallo occorre fissare un livello di confidenza $1-\alpha = 95\%$; da cui si ricava $\alpha = 5\%$. La stima per intervallo è in caso che la varianza della popolazione sia ignota è data dalla

$$E[P] \in \left[\bar{o} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{o} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

ricordando la formula del calcolo della varianza campionaria ed utilizzando i conti riportati in tabella si ha che:

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n o_i^2}{n} - \bar{o}^2 \right) \frac{n}{n-1} = \left(\frac{89419}{11} - 89^2 \right) \frac{11}{11-1} = (8129 - 7921) 1.1 = 228.8 \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Pertanto l'intervallo richiesto è: $E[P] \in \left[89 - 1.96 \sqrt{\frac{228.8}{11}} ; 89 + 1.96 \sqrt{\frac{228.8}{11}} \right] = [80.06 ; 97.34]$

| i | o_i | o_i^2 |
|-----|-------|---------|
| 1 | 64 | 4096 |
| 2 | 73 | 5329 |
| 3 | 80 | 6400 |
| 4 | 84 | 7056 |
| 5 | 88 | 7744 |
| 6 | 88 | 7744 |
| 7 | 89 | 7921 |
| 8 | 90 | 8100 |
| 9 | 98 | 9604 |
| 10 | 105 | 11025 |
| 11 | 120 | 14400 |
| TOT | 979 | 89419 |

Esercizio 3)

I dati forniti nell'esercizio descrivono una bivariata (x, y) dove

X: anni di fideiussione, Y: quantitativo di esami richiesti

a) indichi il carattere della serie bi-variata ottenuta

La serie bivariata è data dall'unione di due caratteri quantitativo discreti pertanto non presenta il medesimo carattere.

b) Se possibile calcoli un indice sintetico di posizione adeguato

Formalmente la serie ammette due indice di posizioni: la media e la moda. Non essendo presenti frequenze significative la moda non è informativa, pertanto si procede al calcolo della media. Questa si ottiene unendo le medie dei caratteri considerate separatamente. Utilizzando i conti riportati nella tabella 1 si ha che

M (20; 70)

c) se possibile calcoli un indice sintetico di variabilità

L'indice di variabilità è dato dalla matrice di varianza/covarianza ottenuta usando le varianze dei due caratteri e la

loro covarianza. Usando la i dati riportati nella Tabella 1 si ha che:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{580}{5} = 116 \qquad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{7850}{5} = 1570$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{2075}{5} = 415$$

Da cui si ha la seguente matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 116 & 415 \\ 415 & 1570 \end{bmatrix}$$

e1) calcoli un modello per tale legame

Il modello utilizzato è quello di regressione lineare che dice che

$$y_i = a x_i + b + e_i \quad \text{dove } e \text{ rappresenta l'errore di misura.}$$

Usando una stima ai minimi quadrati si riesce a stimare le costanti a e b ottenendo la retta di regressione che ha equazione

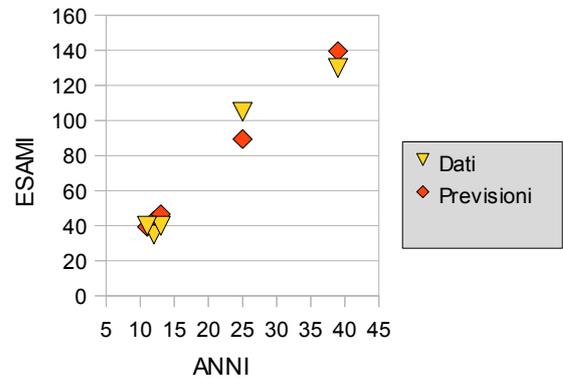
$$\hat{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \bar{x} \qquad \hat{y} = \frac{415}{116} x + 70 - \frac{415}{116} 20 \qquad \hat{y} = 3.58 x - 1.55$$

e2) valuti la bontà del modello ottenuto (quantitativamente e qualitativamente)

Un buon indicatore della bontà del modello di regressione è dato dall'indice di correlazione

di Pearson

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0.945 \qquad R = 0.972$$



Poiche l'indice risulta prossimo all'unità si può asserire che il legame è plausibile. Ovviamente il dato deve essere confermato dalla visualizzazione del modello. Infatti il coefficiente di Pearson può anche dare risultati molto errati. A lato si riportano le presevisioni effettuate dal modello lineare (in rosso nel diagramma) che ben descrivono l'andamento dei dati

e3) utilizzi il modello ottenuto per prevedere quanti esami richiede un soggetto al primo anno di fideiussione

La risposta si ottiene applicando la retta di regressione nel punto di ascissa unitaria.

$$\hat{y}(1) = 3.58 * 1 - 1.55 = 2.03$$

Ci si aspetta quindi due esami.

| osservazione | x | x - \bar{x} | (x - \bar{x}) ² | y | y - \bar{y} | (y - \bar{y}) ² | (y - \bar{y})(x - \bar{x}) |
|--------------|-----|---------------|-------------------------------|-----|---------------|-------------------------------|----------------------------------|
| A | 12 | -8 | 64 | 35 | -35 | 1225 | 280 |
| B | 13 | -7 | 49 | 40 | -30 | 900 | 210 |
| C | 11 | -9 | 81 | 40 | -30 | 900 | 270 |
| D | 25 | 5 | 25 | 105 | 35 | 1225 | 175 |
| E | 39 | 19 | 361 | 130 | 60 | 3600 | 1140 |
| Somma | 100 | | 580 | 350 | | 7850 | 2075 |

Tabella 1 - analisi dati dell'esercizio 3.

Esercizio 4)

Nel testo si considerano come eventi elementari delle estrazioni da due vv. cc. continue. Si ricorda che per una v.c. continua X, la probabilità di ottenere una realizzazione x compresa fra due estremi x_{inf} ed x_{sup} è data dall'integrale (area sottesa) dalla densità di probabilità $f_X(x)$ fra x_{inf} ed x_{sup} . In simboli

$$P(x \in [x_{inf}; x_{sup}]) = \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} f_X(\tau) d\tau$$

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Per il calcolo di $P(E_1)$, si deve calcolare l'area sottesa dalla curva della densità di probabilità di un chi quadro a 2 gradi di libertà da meno infinito a 0. Poiché i valori che assume la v.c. chi quadro per ogni possibile grado di libertà sono tutti non negativi la probabilità richiesta è l'evento certo.

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di estrarre un numero y positivo da una v. c. uniforme fra -5 ed 5.

In questo caso è possibile ricavare la d.d.p. della v.c. Y . Basta imporre che l'area sottesa dalla d.d.p. sia unitaria. Pertanto si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tau) d\tau = 1$$

poiché la d.d.p è nulla per valori esterni all'intervallo $[-5; 5]$ la predente diviene

$$\int_{-5}^{+5} f_Y(\tau) d\tau = 1$$

ricordando che la d.d.p. è costante si ha che

$$\int_{-5}^{+5} C d\tau = (5 - (-5))C = 10C = 1$$

da cui si ha che $C = 1/10 = 0.1$.

Il calcolo della probabilità richiesta diviene ora facile

$$P(E_2) = P(y > 2) = \int_2^5 \frac{1}{10} d\tau = (5 - 2) \frac{1}{10} = 0.3$$

Propedeutico al calcolo delle altre due probabilità e il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (ovvero che i due eventi si verificano contemporaneamente). Per eventi indipendenti essa è il prodotto delle due probabilità ovvero

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = 1 \cdot 0.3 = 0.3$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 1 + 0.3 - 0.3 = 1 \quad P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0.3}{0.3} = 1$$

b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente indipendenti, evento certo ed evento impossibile.

Due eventi si dicono

- *statisticamente indipendenti* se il verificarsi di un evento non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. Se A e B sono due eventi statisticamente indipendenti si ha che
$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$
- *certo*: un evento certo è un evento che si verifica sempre. Se E è un evento certo si ha che $P(E) = 1$.
- *impossibile*: un evento impossibile è un evento che non si verifica mai. Se E è un evento impossibile si ha che $P(E) = 0$.

- Appello del 25 Settembre 2013 -

Esercizio 1)

Si vogliono verificare il numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne in Italia. A tale scopo si è estratto un campione di 30 ragazzi richiedendo ad ognuno il numero di vaccinazioni sostenute.

Si sono ottenute le seguenti osservazioni.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 4 | 5 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 1 | 6 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 1 | 3 | 5 | 4 | 2 | 1 | 4 | 3 | 5 | 4 |

Il candidato

- a) Determini la tipologia del carattere osservato.
- b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.
- c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
- d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

Esercizio 2)

Il candidato usi le osservazioni presentate nell'esercizio precedenti per stimare puntualmente e per intervallo la varianza della distribuzione della variabile casuale

X: numero di vaccinazioni di un diciottenne italiano

Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)

Un indagine svolta a livello europeo condotta sui dati dell'ultimo decennio¹ mostra che un diciottenne ha effettuato in media 3.2 vaccinazioni con una varianza di 2.7. Utilizzando il campione descritto nell'esercizio 1, è corretto asserire, ad un livello di significatività del 10%, che un diciottenne italiano ha subito un numero di vaccinazioni inferiore a alla media europea? Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 4)

Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

E_1 : si ottenga $x \geq 0$ dove x è estratto da una v. c. distribuita come un $\chi^2(2)$.

E_2 : si ottenga $y > 2$ dove y è estratto da una v. c. $Unif(-5;5)$.

- a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
- b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi stasticamente dipendenti, evento certo ed evento impossibile.

1 Dato fittizio

- Tema d'esame del 25 Settembre 2013 -
Svolgimento

a) *Determini la tipologia del carattere.*

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) discreto (in quanto non è possibile fare una frazione di misurazioni).

b) *Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.*

Un indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili tutti e tre. In questa sede si è scelto di calcolare la media.

Dalle osservazioni è possibile individuare 7 modalità (da 0 a 6) e, sfruttando i dati in tabella 1, è possibile calcolare la seguente media

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i x_i}{n} = \frac{90}{30} = 3$$

c) *Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.*

Avendo scelto la media come indice di posizione l'indice di variabilità associato risulta essere la deviazione standard, (ovvero la radice quadrata della varianza). Utilizzando i calcoli ripostati in tabella è possibile ottenere:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{64}{30} = 2.13 \quad \sigma = \sqrt{2.13} = 1.46$$

d) *Fornisca una rappresentazione grafica opportuna.*

Per caratteri quantitativi discreti due rappresentazioni frequenti sono il diagramma a barre, il diagramma a torta ed il box plot. A lato si riposta un esempio del primo.

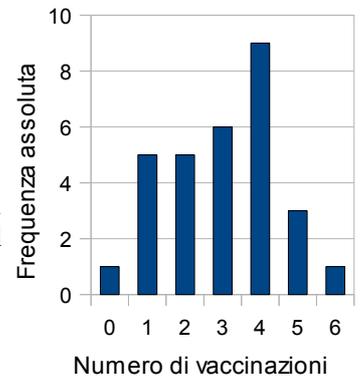


Tabella 1 - dati relativa ai primi 3 esercizi

| i | x_i | n_i | $n_i x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $n_i (x_i - \bar{x})^2$ |
|---|-------|-------|-----------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 1 | 0 | 1 | 0 | -3 | 9 | 9 |
| 2 | 1 | 5 | 5 | -2 | 4 | 20 |
| 3 | 2 | 5 | 10 | -1 | 1 | 5 |
| 4 | 3 | 6 | 18 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 4 | 9 | 36 | 1 | 1 | 9 |
| 6 | 5 | 3 | 15 | 2 | 4 | 12 |
| 7 | 6 | 1 | 6 | 3 | 9 | 9 |

Totali 30 90 64

Esercizio 2)

Possiamo modellare il processo di generazione dei dati del presentati nell'esercizio 1 come il frutto di diverse estrazioni dalla variabile casuale

X : numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne italiano

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $n = 30$ osservazioni.

Continuando con il modello precedentemente definito l'esercizio richiede di stimare $Var[X]$ puntualmente e per intervallo.

La stima è possibile solo se la le estrazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite e se la dimensione del campione è pari ad almeno 30 unità. Nel caso in esame entrambe le ipotesi si possono considerare verificati.

Lo stimatore puntuale della varianza è la campionaria che, utilizzando i conti riportati in tabella produce la seguente stima

$$\widehat{Var}[X] = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m n_i (o_i - \bar{o})^2}{n-1} = \frac{64}{29} = 2.207$$

Per ottenere la stima per intervallo occorre fissare un livello di confidenza α . Posto $\alpha = 90\%$, la stima per intervallo è data dalla seguente formula

$$\widehat{Var}[P] \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[\frac{29 \frac{64}{29}}{\chi^2_{0.95}(29)}, \frac{29 \frac{64}{29}}{\chi^2_{0.05}(29)} \right] = \left[\frac{64}{42.6}, \frac{64}{17.7} \right] = [1.50; 3.61]$$

Esercizio 3)

Nell'esercizio viene richiesto di realizzare un test di ipotesi sul valor atteso della variabile casuale X. Nello specifico si richiede se sia inferiore a quello della v.c. P: numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne europeo avente $E[P] = 3.2$ e $Var[P] = 2.7$. Nel caso in esame le due ipotesi sono

$$H_0: E[X] = 3.2$$

$$H_1: E[X] < 3.2$$

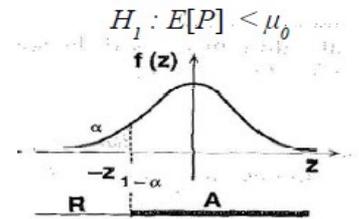
Per procedere alla verifica del test di ipotesi è necessario avere un campione di almeno trenta elementi ottenuti da estrazioni di tipo bernoulliano (ovvero i.i.d.). Entrambe le ipotesi possono dirsi confermate.

Lo stimatore del valor atteso da utilizzare è la media campionaria. Supponendo vera l'ipotesi nulla (H_0) la media campionaria calcolata su di un campione di 30 elementi estratti in maniera bernoulliana si distribuisce come la seguente normale

$$N\left(E[P]; Var\left[\frac{P}{n}\right]\right) = N\left(3.2; \frac{2.7}{30}\right) = N(3.2; 0.09)$$

Dal tipo di ipotesi alternativa (H_1) possiamo stabilire come il test da realizzare sia ad una coda, come indicato dalla figura a lato. Da cui si ricava la seguente regione di accettazione (dell'ipotesi nulla)

$$A: [-1.28; +\infty[$$



Per verificare se il campione ricade nella regione di accettazione è sufficiente standardizzare la media campionaria calcolata all'esercizio 1. Ottenendo il seguente valore standard

$$z = \frac{\bar{x} - E[P]}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}} = \frac{3 - 3.2}{\sqrt{0.09}} = -\frac{0.2}{0.3} = -0.67$$

Essendo il valore interno alla regione di accettazione, si accetta l'ipotesi nulla. Si può per tanto dire che con una significatività del 10 % in numero di vaccinazioni effettuate da un diciottenne in Italia non è inferiore alla media europea.

Esercizio 4)

Nel testo si considerano come eventi elementari delle estrazioni da due vv. cc. continue. Si ricorda che per una v.c. continua X, la probabilità di ottenere una realizzazione x compresa fra due estremi x_{inf} ed x_{sup} è data dall'integrale (area sottesa) dalla densità di probabilità $f_X(x)$ fra x_{inf} ed x_{sup} . In simboli

$$P(x \in [x_{inf}; x_{sup}]) = \int_{x_{inf}}^{x_{sup}} f_X(\tau) d\tau$$

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Per il calcolo di $P(E_1)$, si deve calcolare l'area sottesa dalla curva della densità di probabilità di un chi quadro a 2 gradi di libertà da meno infinito a 0. Poiché i valori che assume la v.c. chi quadro per ogni possibile grado di libertà sono tutti non negativi la probabilità richiesta è l'evento certo.

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di estrarre un numero y positivo da una v. c. uniforme fra -5 ed 5.

In questo caso è possibile ricavare la d.d.p. della v.c. Y . Basta imporre che l'area sottesa dalla d.d.p. sia unitaria. Pertanto si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tau) d\tau = 1$$

poiché la d.d.p è nulla per valori esterni all'intervallo $[-5; 5]$ la precedente diviene

$$\int_{-5}^{+5} f_Y(\tau) d\tau = 1$$

ricordando che la d.d.p. è costante si ha che

$$\int_{-5}^{+5} C d\tau = (5 - (-5))C = 10C = 1$$

da cui si ha che $C = 1/10 = 0.1$.

Il calcolo della probabilità richiesta diviene ora facile

$$P(E_2) = P(y > 2) = \int_2^5 \frac{1}{10} d\tau = (5 - 2) \frac{1}{10} = 0.3$$

Propedeutico al calcolo delle altre due probabilità e il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (ovvero che i due eventi si verificano contemporaneamente). Per eventi indipendenti essa è il prodotto delle due probabilità ovvero

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = 1 \cdot 0.3 = 0.3$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 1 + 0.3 - 0.3 = 1 \quad P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0.3}{0.3} = 1$$

b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente indipendenti, evento certo ed evento impossibile.

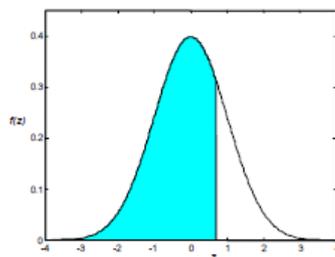
Due eventi si dicono

- *statisticamente indipendenti* se il verificarsi di un evento non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. Se A e B sono due eventi statisticamente indipendenti si ha che

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$
- *certo*: un evento certo è un evento che si verifica sempre. Pertanto se E è un evento certo si ha che $P(E) = 1$.
- *impossibile*: un evento impossibile è un evento che non si verifica mai. Se E è un evento impossibile si ha che $P(E) = 0$.

Tavola I - Distribuzione normale standardizzata

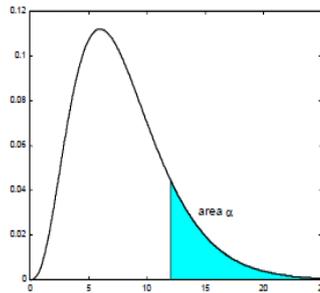
La tavola fornisce i valori sottesi dalla distribuzione di probabilita della normale standardizzata $f(z)$ da $-\infty$ a z .



| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 0.99995 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Tavola II - Distribuzione χ^2

La tabella fornisce i valori di $\chi^2_{\alpha}(v)$ per i quali $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(v)) = \alpha$ per alcuni valori notevoli della probabilità α e dei gradi di libertà v .



| v | $\alpha = 0.995$ | $\alpha = 0.99$ | $\alpha = 0.975$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.025$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.005$ | v |
|-----|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----|
| 1 | 0.0000393 | 0.000157 | 0.000982 | 0.00393 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 1 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 | 2 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 | 3 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 | 4 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 11.070 | 12.832 | 15.086 | 16.750 | 5 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 | 6 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 | 7 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 | 8 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 | 9 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 | 10 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 | 11 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.300 | 12 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 | 13 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 | 14 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 | 15 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 | 16 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 | 17 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 | 18 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 | 19 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 | 20 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 | 21 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 | 22 |
| 23 | 9.260 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 | 23 |
| 24 | 9.886 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.558 | 24 |
| 25 | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 | 25 |
| 26 | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 | 26 |
| 27 | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 40.113 | 43.194 | 46.963 | 49.645 | 27 |
| 28 | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 | 28 |
| 29 | 13.121 | 14.256 | 16.047 | 17.708 | 42.557 | 45.722 | 49.588 | 52.336 | 29 |
| 30 | 13.787 | 14.953 | 16.791 | 18.493 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 | 30 |
| 40 | 20.706 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 55.758 | 59.342 | 63.691 | 66.766 | 40 |
| 50 | 27.991 | 29.707 | 32.357 | 34.764 | 67.505 | 71.420 | 76.154 | 79.490 | 50 |
| 60 | 35.535 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 79.082 | 83.298 | 88.379 | 91.952 | 60 |
| 70 | 43.275 | 45.442 | 48.758 | 51.739 | 90.531 | 95.023 | 100.425 | 104.215 | 70 |
| 80 | 51.172 | 53.540 | 57.153 | 60.391 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 | 80 |
| 90 | 59.196 | 61.754 | 65.647 | 69.126 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 | 90 |
| 100 | 67.328 | 70.065 | 74.222 | 77.929 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 | 100 |