EX 3

Calcolare la lunghezza di una curva $\gamma = [\varphi]$ con γ rappresentata da

$\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

dopo aver verificato se φ sia una rappresentazione parametrica regolare di classe C^1.

Ris

Def. $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\varphi \in C^1([a,b])$, $\|\varphi'(t)\| > 0$ $\forall t \in [a,b]$

si dice rappresentazione parametrica regolare di classe C^1 e si indica $\varphi \in Reg_1$.

$\varphi(t) = (\underbrace{\cos^3 t}_{\varphi_1(t)}, \underbrace{\sin^3 t}_{\varphi_2(t)})$ $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \varphi \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$ perchè $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1_{[0,\frac{\pi}{2}]}$

$$\|\varphi'(t)\|^2 = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 = (-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2 =$$

$$= 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t = 9\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9\cos^2 t \sin^2 t > 0 \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$\varphi'(t) = 0$ in $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow \varphi$ non è una rappresentazione param. regolare.

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/2} \|\varphi'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}}\,dt =$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2(2t)}{4}}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} |\sin(2t)|\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } [0,\frac{\pi}{2}]\ \sin(2t) \geq 0}}{=} \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} 2\sin(2t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{4}(\underbrace{-\cos\pi}_{1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{3}{2}$$

Osservazione EXTRA esame

Si osservi che la rappresentazione della curva non è regolare ma la traccia della curva, se "disegnata", ha lunghezza finita.

Infatti si può dimostrare che se $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1([a,b])$ (la derivata negli estremi è da intendersi derivata dx / sx), $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a,b)$

$\Rightarrow \varphi$ è rettificabile (cioè $\ell(\gamma) < +\infty$) e vale

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt.$$

EX 3 file A