Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Esercizi per il Corso di ALGEBRA

**Foglio 6**
7 novembre 2012

1. Si decida se i seguenti polinomi sono irriducibili:
   (a) $16\,x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (b) $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (c) $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.
   (d) $15x^2 + 11x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (e) $x^8 + 3x^4 + 15x^3 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (f) $x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 21 \in \mathbb{Q}[x]$.

(*10 punti*)

2. Vero o falso?
   (a) $(X)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$.
   (b) $(X)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$.
   (c) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]\,/(x^3 + 2x + 1)$ è un campo di 27 elementi.
   (d) Esiste un campo $F$ tale che $x^4 + x^3 + x + 1$ è un polinomio irriducibile in $F[x]$.
   (e) Dati $n \geq 2$ numeri primi distinti $p_1, \ldots, p_n$, la radice $n$-sima del prodotto $\sqrt[n]{p_1 \ldots p_n}$ è sempre irrazionale.

*(8 punti)*

3. Si dimostri:
   (a) Se un polinomio $f \in K[x]$ di grado 5 su un campo $K$ è riducibile e non ha zeri, allora possiede un divisore monico irriducibile di secondo grado.
   (b) Gli unici polinomi monici irriducibili di secondo grado in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ sono $x^2 + 1, x^2 + x + 2$, e $x^2 + 2\,x + 2$.
   (c) $f = x^5 - x + 1$ è un polinomio irriducibile in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$.

(*8 punti*)

4. Sia $f$ un polinomio irriducibile di secondo grado in $\mathbb{R}[x]$. Si dimostri che $\mathbb{R}[x]/(f) \cong \mathbb{C}$. (Sugg: $f$ ha una radice $u \in \mathbb{C}$. Si consideri $\mathbb{R}(u)$)

*(4 punti)*

5. (a) Sia $F$ un campo e $f, g$ due polinomi irriducibili in $F[x]$. Sia $I = (f)$, $J = (g)$, $T = (fg)$. Si dimostri che $F[x]/T \cong F[x]/I \times F[x]/J$.
   (b) Si dimostri che $\mathbb{R}[x]/(x^3 + 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

*(**)*

**Consegna: mercoledì 14 novembre durante la lezione.**