Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2011/12
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

7 febbraio 2012

1. Sottospazi di uno spazio vettoriale: si diano la definizione e un esempio.

   Inoltre si decida se l'insieme di tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ di modulo $\mid z \mid= 1$ forma un $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathbb{C}$. (*6 punti*)

2. (a) Per quali valori $c \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$? (*3 punti*)

   (b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

   (*3 punti*)

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. (*2 punti*)

   (b) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$. (*4 punti*)

   (c) Si decida (motivando la risposta) se f è un'applicazione iniettiva. (*2 punti*)

   (d) Si decida se A ammette un'inversa destra B (ovvero una matrice B tale che AB sia la matrice identica) ed eventualmente si determini tale B. (*6 punti*)

4. Siano $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times t}$ due matrici con $\det AB \neq 0$. Si dimostri che $t \leq n$.

   (*4 punti*)

Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e spiegazioni !

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2011/12
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

7 febbraio 2012

Soluzioni

1. L'insieme di tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ di modulo $\mid z \mid = 1$ *non* forma un $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathbb{C}$, poiché ad esempio non contiene 0, oppure non è chiuso rispetto alla moltiplicazione con uno scalare.

2. (a) Solo per $c = 0$.
   (b) A è diagonalizzabile perché ha i tre autovalori distinti 2,1,4.

3. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $A' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$
   (c) f *non* è un'applicazione iniettiva, poiché altrimenti la dimensione del dominio non potrebbe eccedere la dimensione del codominio (nullità + rango: $3 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ con $\dim \mathrm{Im} f \leq 2$ implica $\dim \mathrm{Ker} f \neq 0$).
   (d) Sì, A ammette un'inversa destra B poiché il rango di A è 2, pari al numero di righe. La matrice B soddisfa $AB = I_2$ e quindi le sue colonne possono essere determinate risolvendo i sistemi lineari $Ax = e_i, i = 1, 2$. Si ottiene $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Siano $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times t}$ due matrici con $\det AB \neq 0$. Allora AB è invertibile, dunque B ha un'inversa sinistra e quindi $t = \mathrm{rk} B \leq n$.

   Oppure: poiché AB è invertibile, l'applicazione lineare $f_{AB} = f_A \circ f_B$ è un isomorfismo e $f_B : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva, quindi $t \leq n$.

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2011/12
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

21 febbraio 2012

1. Matrici unitarie: si diano la definizione e un esempio. Inoltre si enunci il Teorema di Schur. (*6 punti*)

2. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + 2z = 0 \ \text{ e } \ 3x + 2y = 0\}$$

$$W = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} >$$

   (a) si trovi una base di U,
   (b) si dimostri che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ è somma diretta di U e W.

   (*6 punti*)

3. Data l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2z \\ 2y + z \\ y + x \end{pmatrix},$$

   (a) si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica su dominio e codominio. (*2 punti*)
   (b) Si decida se f è un isomorfismo e si determini eventualmente l'applicazione inversa. (*4 punti*)
   (c) Si decida se A è diagonalizzabile. (*3 punti*)

4. Si determinino le quattro radici quarte complesse z_0, z_1, z_2, z_3 di -16 in forma trigonometrica e in forma algebrica.

   (*5 punti*)

5. Si dimostri che una matrice $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$ tale che $A^T = -A$ non è mai invertibile.

   (*4 punti*)

Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e spiegazioni !