TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Lezione **XXXIV**

Omologia singolare

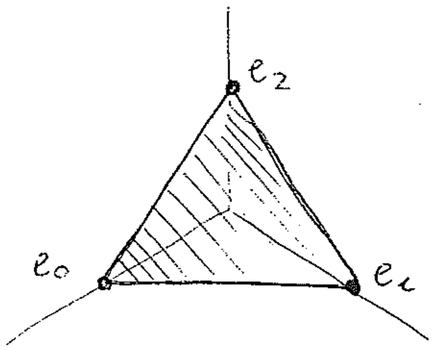
$$\mathbb{R}^\infty = [e_0, e_1, \dots] \quad \text{(comb. lineari arbitrarie ma finite)}$$

$$\| \quad \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}$$

p-simplesso standard

$$\Delta_p = \left\{ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \;/\; 0 \le \lambda_i \le 1,\ \sum \lambda_i = 1 \right\}.$$

λ_i : coordinate baricentriche



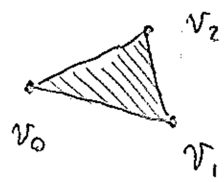
ex: $p = 2$

Siano dati $v_0, \dots v_n \in \mathbb{R}^N$ $\quad N \ge n+1$

$$[v_0, v_1, \dots, v_n] := f: \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$f\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i v_i \qquad 0 \le \lambda_i \le 1, \ \sum \lambda_i = 1$$

simplesso singolare affine



(= inviluppo convesso di $v_0, \dots v_n$)

in part.

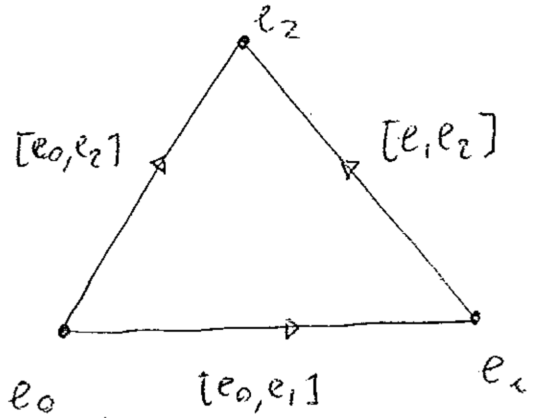
$$[e_0, \dots \hat{e}_i, \dots e_p] : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$$

$\underline{\underline{\text{omesso}}}$

è detto

<u>i-esima</u> ☆ <u>mappa di faccia</u> F_i^p

(opposta al vertice "i")



(c'è il problema dell'orientamento!)

esplicitamente:

$$\boxed{F_i^p(e_x) = \begin{cases} e_x & x < i \\ e_{x+1} & x \geq i \end{cases}}$$

$\Delta_{p-1} \to \Delta_{p+1}$

$$j > i \implies F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \dots \hat{e}_i, \dots \hat{e}_j, \dots e_p]$$

$$j \leq i \implies F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \dots \hat{e}_j, \dots \hat{e}_{i+1}, \dots e_p]$$

(☆) $F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0 \dots \hat{e}_j, \hat{e}_{i+1} \dots e_p]$ $\quad j \leq i$

$\parallel$

fatto cruciale $\quad F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p = [e_0 \dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_{i+1} \dots e_p]$ $\quad j \leq i$

$j < i+1$

Notare

X spazio topologico

p-simplesso singolare:

$$\sigma_p : \Delta_p \longrightarrow X \qquad \text{(continua)}$$

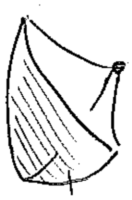
Il p-esimo gruppo delle catene singolari è il gruppo abeliano libero generato dai σ_p

$$c = \sum_{\text{(finita)}} n_\sigma \sigma, \qquad n_\sigma \in \mathbb{Z}$$

somma formale

p-catena singolare

notazione: C_p o $\Delta_p(X)$



☆ Sia $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p \equiv \text{i-esima faccia di } \sigma$$

☆ bordo di σ:

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)} \qquad \text{((p-1)-catena)}$$

$$\partial_p c := \sum n_\sigma \partial_p \sigma$$

$$\Rightarrow \quad \partial_p : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)$$

è un omomorfismo

<u>Fatto fondamentale</u>

$$\boxed{\partial_p \partial_{p+1} = 0}$$

(+) $i+1 = i'$

$i = i'-1$

$$\sum_{0 \le j < i' \le p+1} (-1)^{(i'+j-1)} \sigma \circ F_{i'}^{p+1} F_j^p$$

$= -A$

[scambiando gli indici muti $i \mapsto j$, $j \mapsto i'$

Dim: $$\partial_p \partial_{p+1} \sigma = \partial_p \left[\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\sigma \circ F_j^{p+1}) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma \circ F_j^{p+1}) \circ F_i^p$$

$$= \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p$$

se $j \le i$ si ricordi ($\star$)

$$= \overbrace{\sum_{0 \le i < j \le p+1} (\ )}^{A} + \sum_{0 \le j \le i \le p} (\ ) =$$

$$= A + \overbrace{\sum_{0 \le j \le i \le p} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p)}^{B}$$

se $i+1 \to i$ risulta $B = -A$ (+)

$\square$

Se $p < 0$ poniamo $\Delta_p(X) = 0$

e $\partial_p = 0$ per $p \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \Delta_{p-1}(X)$$

$$\ell' \equiv 0 \quad ; \quad \partial_p \partial_{p+1} = 0$$

($\Delta_*(X)$, complesso de catene singolari)

p-cicli $= \ker \partial_p = Z_p(X)$

p-bordi $\operatorname{Im} \partial_{p+1} = B_p(X)$

$$\boxed{H_p(X) = Z_p(X) \Big/ B_p(X) = \ker \partial_p \Big/ \operatorname{Im} \partial_{p+1}}$$

p-esimo gruppo di omologia singolare

$$H_*(X) \equiv H_*(\Delta_*(X))$$

Nota: l'omologia singolare è una generalizzazione dell'omologia simpliciale relativa ai complessi simpliciali, e risulta più flessibile di quest'ultima. In generale, il calcolo efficiente dei gruppi di coomologia necessita di tecniche sofisticate.

Se le catene sono prese a coeff. reali si ottengono spazi vettoriali. $\dim H_p(X) \equiv h_p =: b_p$ è detto p-esimo (*) numero di Betti (in onore di Enrico Betti)

(*) In ogni caso, è il rango del gruppo abeliano $H_p(X)$

☆ Prologo al teorema di de Rham

Riprendiamo il complesso di de Rham

$$\Lambda^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Lambda^{k}(M) \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1}(M) \to \dots \qquad d^2 = 0$$

$$Z^k_{dR}(M) = \{ \omega \in \Lambda^k(M) \ / \ d\omega = 0 \}$$ k-forme chiuse

$$B^k_{dR}(M) = \{ \omega \in \Lambda^k(M) \ / \ \omega = d\alpha, \ \alpha \in \Lambda^{k-1}(M) \}$$ k-forme esatte

$$H^k_{dR}(M) = Z^k_{dR}(M) \big/ B^k_{dR}(M)$$ k-gruppo di coomologia di de Rham

$$h^k_{dR} := \dim H^k_{dR}(M)$$

Faremo vedere che se M ammette un buon ricoprimento(*) finito, $H^k_{dR}(M)$ ha dim finita

(*) intersezioni vuote o contraibili

Per semplicità di esposizione, assumiamo M compatta.

Se c è una catena liscia ($\sigma : \Delta_p \to M$ liscia ...)

ha senso definire $\int_c \omega$ e

vale il teorema di Stokes : $\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$

Siano ora c un k-ciclo : $\partial c = 0$

e ω una k-forma chiusa $d\omega = 0$

☆ Fatto fondamentale:

$$\int_{c+\partial b} (\omega + d\alpha) = \int_c \omega$$

Ciò segue subito dal teorema di Stokes:

$$\int_{c+\partial b} (\omega + d\alpha) = \int_c \omega + \overset{①}{\int_c d\alpha} + \overset{②}{\int_{\partial b} \omega} + \overset{③}{\int_{\partial b} d\alpha}$$

① $\int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha = 0$

③ $\int_{\partial b} d\alpha = \int_{\partial^2 b} \alpha = 0$

② $\int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0$

oppure $\int_{\partial b} d\alpha = \int_b d^2\alpha = 0$

In altre parole, $\int_c \omega$ dipende solo da $[\omega]$ e $[c]$ (classi di coomologia e omologia, risp.)

Resta definito un accoppiamento (pairing)

catene a coeff. reali

$$H_p(M) \times H^p_{dR}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([c], [\omega]) \longmapsto \int_c \omega$$

ponendo $\Psi_{[\omega]} : H_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[c] \longmapsto \int_c \omega$$

si vede subito che $\Psi_{[\omega]} \in H_p(M)^*$ (duale)

pertanto $[\omega]$ individua un elemento di $H_p(M)^*$

di fatto è $H^p_{dR}(M) \cong H_p(M)$ teorema di de Rham ###

Esistono molte dimostrazioni di questo teorema fondamentale

In ogni caso si deve mostrare

che

$$\Psi : [\omega] \longmapsto \Psi_{[\omega]}$$ è iniettiva e suriettiva

- iniettività: $\Psi_{[\omega]} \equiv 0 \Rightarrow [\omega] = 0$ ossia

$$\int_c \omega = 0 \quad \forall \underset{\text{ciclo}}{c} \Rightarrow \omega \text{ esatta}$$

- suriettività: ogni elemento di $H_p(M)^*$ è della forma $\Psi_{[\omega]}$ per qualche $[\omega]$:

sia $(c_i)_{i=1..b_p}$ una base di cicli in $H_p(M)$

b_p ← p-esimo numero di Betti

Sia $(\alpha_1 \ldots \alpha_{b_p}) \in \mathbb{R}^{b_p}$

$\exists\, [\omega]$ tale che $\int_{c_i} \omega = \alpha_i \quad i = 1 \ldots b_p$

periodi di $[\omega]$

sinteticamente: $\exists!\, [\omega]$ t.c.