Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

9 febbraio 2010

1. Anelli euclidei: si enunci la definizione e si diano almeno due esempi. (*5 punti*)

2. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati (motivando la risposta).
   (a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]\,/(x^3+x+1)$ è un campo di 27 elementi. (*1 punto*)
   (b) $x^5+6x^3+4x^2+2$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$. (*1 punto*)
   (c) $\overline{1}+\overline{x}^2$ è un elemento invertibile in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4+x+1)$. (*1 punto*)

3. Si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $x^4-1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)

Risposte

2. (a) FALSO. Non si tratta di un campo, perché il polinomio x^3+x+1 ha lo zero $x=1$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ed è riducibile.
   (b) VERO, per il criterio di Eisenstein con $p=2$.
   (c) VERO. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4+x+1)$ è un campo. Infatti x^4+x+1 è irriducibile perché non ha zeri in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, né divisori di grado 2 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ (l'unico polinomio irriducibile di grado 2 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ è x^2+x+1 e non è un divisore di x^4+x+1). Inoltre $1+x^2 \notin (x^4+x+1)$ perché altrimenti avrebbe grado ≥ 4, quindi $\overline{1}+\overline{x}^2 \neq \overline{0}$ è un elemento invertibile in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4+x+1)$.

3. $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ e i fattori sono tutti irriducibili: i primi in quanto sono polinomi di grado uno su un campo, il terzo in quanto è un polinomio di grado due che non ha zeri in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

23 febbraio 2010

1. Si enunci il Teorema Fondamentale dell'Omomorfismo e lo si usi per dimostrare che $R[x]/(x) \cong R$ per ogni anello R. (*5 punti*)

2. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati (motivando la risposta).
   (a) $3x + 6$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$. (*1 punto*)
   (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x + 1)$ è un'estensione di campi di grado 4.(*1 punto*)
   (c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x]$ è un dominio. (*1 punto*)

3. Si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)

Risposte

2. (a) FALSO. $3x + 6 = 3(x + 2)$ ed entrambi i fattori sono non invertibili.
   (b) VERO. Basta dimostrare che $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x + 1)$ è un campo; il grado dell'estensione è poi pari al grado di $x^4 + x + 1$ e quindi uguale a 4.
   $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x + 1)$ è un campo perché $x^4 + x + 1$ è irriducibile. Infatti non ha zeri in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, né divisori di grado 2 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ (l'unico polinomio irriducibile di grado 2 in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ è x^2+x+1 e non è un divisore di x^4+x+1).
   (c) FALSO perché ha divisori di zero. Ad esempio per $2, 2x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ si ha $2 \cdot 2x = 0$.

3. $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$ e i fattori sono tutti irriducibili: il primo in quanto polinomio di grado uno su un campo, il secondo in quanto è un polinomio di grado due che non ha zeri in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.