ANALISI MATEMATICA II
-SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI-
AA 2015-2016

GIULIA CAVAGNARI

Esercizio 1 (5pt.). Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione definita per $xy \neq 0$ da

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sqrt[3]{1-x^2y} - \sqrt[3]{1+x^2y}}{(x^2y)^\alpha}.$$

Si dica se esiste il $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} f_\alpha(x,y)$ e in caso affermativo lo si calcoli.

Esercizio 2 (8pt.). Si consideri la seguente funzione, definita in un intorno di $(0,0)$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2\cos x^2 + 3\sin x \tan y + 6e^{y^2} - 4 - 5x^2}{x^2+xy+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ -5, & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

(1) Si dica se f è continua nell'origine.
(2) Posto
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2+y^2 > |y|\},$$
si verifichi che l'origine è un punto di accumulazione per D e si dica se f è continua in $\overline{D}$.
(3) Si dica se esistono le derivate direzionali di f nell'origine e in caso affermativo le si calcoli. Si stabilisca se f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 3 (4pt.). Si stabilisca se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi, limitati, compatti, e se ne descriva per ciascuno l'interno e la chiusura:

$$\begin{aligned} E :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -x^3y + 5y^6 + 6xy + 1 < 0\}, \\ F :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 4x^4 + 6y^2 + 10xy^2 + 3xy - 4 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8pt.). Si considerino le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (5x^2 + 4yz, 6z - 3x^3, 7y + 4x^2) \\ g(x,y) &= (9x^2y^3, 6x + y, 5y^2) \\ h(x,y,z) &= (7x^2 + 6xz, 3y^2zx). \end{aligned}$$

Si calcolino i differerenziali di $f \circ g$, $g \circ h$, $h \circ f$ laddove sono definiti.

Esercizio 5 (5pt.). Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in \mathbb{R}^n$. Si provi che f è continua in x se e solo se valgono le uguaglianze

$$f(x) = \sup_{V \in \mathscr{F}(x)} \left(\inf_{y \in V \setminus \{x\}} f(y) \right) = \inf_{V \in \mathscr{F}(x)} \left(\sup_{y \in V \setminus \{x\}} f(y) \right),$$

dove $\mathscr{F}(x)$ indica l'insieme degli intorni di x.

Consegna entro: mercoledì 28.10.2015

E-mail address: `giulia.cavagnari@unitn.it`

Date: 19 ottobre 2015.