URTI: Collisioni fra particelle (e/o corpi) libere e vincolate.

Approssimazione di impulso: l'interazione fra le due particelle e/o corpi puntiformi è istantanea e l'azione delle forze esterne durante l'urto non è tale da cambiare lo stato di moto (traslazionale e rotazionale) del sistema delle due particelle nel suo insieme.

Lo stato di moto del centro di massa non cambia durante l'urto, dato che le forze esterne non hanno carattere impulsivo e le forze interne non sono in grado di variare la quantità di moto del sistema

Si tratta di studiare il moto del sistema dopo l'urto, cioè il moto del CM del sistema e delle due particelle relativamente al CM.

Generalmente si conosce lo stato (masse + velocità) delle particelle (e/o corpi) prima dell'urto e si tratta di trovare lo stato di moto (masse + velocità) delle particelle dopo l'urto.

N.B.: La massa delle particelle individuali o dei due corpi non varia durante l'urto, e, quindi, nei casi di urti si tratta determinare le velocità delle particelle o dei due corpi subito dopo l'urto.

Due classi di fenomeni:
a) Urti tra particelle libere o soggette a forze esterne non impulsive
b) Urti tra una particella libera e una particella vincolati.

a) Caso di urto tra una particella o un corpo puntiforme e/o particella libera o soggetta a forze esterne non impulsive.

Nel caso di urto tra due particelle o corpi che formano un sistema isolato si ha la conservazione della quantità di moto del sistema durante l'urto, dato che entrano in gioco solo forze interne, e queste come si sa dalla dinamica dei sistemi di particelle non sono in grado di far variare la quantità di moto totale del sistema.

N.B: La quantità di moto del sistema durante l’urto si conserva anche nel caso di sistema non isolato, se e solo se le forze esterne durante l’urto non hanno un comportamento impulsivo.

Es.: Corpo che pende verticalmente essendo appeso a un filo fissato ad un punto O del piano verticale, e colpito da un proiettile che viaggia in direzione ortogonale al filo. (pendolo balistico)

b) Caso di urto tra una particella libera e un corpo puntiforme o una particella vincolata.
Se una delle due particelle è vincolata (in tal caso il sistema delle due particelle che di urtano non può essere considerato isolato) e se, inoltre, durante l’urto anche le forze esterne agenti su di essa sono impulsive, allora la quantità di moto totale del sistema delle due particelle non si conserva. Infatti durante l’urto entrano in gioco sia forze impulsive interne che forze impulsive esterne al sistema (dovute alla reazione vincolare che ha carattere impulsivo) e queste ultime determinano una variazione della quantità di moto del sistema durante l’urto, in accordo al teorema dell’impulso.

Es.: Corpo che pende verticalmente essendo ancorato all’estremità di asta incernierata ad un punto O del piano verticale, e colpito lateralmente da un proiettile, che viaggia in direzione non parallela all’asta.

In questo caso durante l’urto si conserva il momento della quantità di moto totale del sistema rispetto al punto O in cui è imperniata la particella vincolata, ma non è detto che si conservi in generale la quantità di moto del sistema. Questa grandezza dinamica, infatti, si conserva solo nel caso in cui il proiettile al momento dell’urto stia viaggiando in direzione perpendicolare all’asta.

N.B.: In definitiva, nel caso di urto fra una particella e un corpo o una particella vincolato si conserva in generale il momento della quantità di moto del sistema, ma non la sua quantità di moto.

Urti centrali fra particelle (e/o corpi) libere nel sistema L

Definizione di urto centrale: quando la velocità relativa delle due particelle sia prima dell'urto che dopo l'urto è diretta lungo la retta congiungente le due particelle, si parla di un urto centrale, cioè di urto in una dimensione.

Conservazione della quantità di moto nel caso di particelle libere o soggette a forze esterne non impulsive.

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d}$$

cioé:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

N.B.: Un'equazione vettoriale con due (1+1) incognite; che nel caso di urto centrale origina 1 sola equazioni scalare in due incognite, e quindi il problema non si risolve solo usando la conservazione di $\mathbf{P}_S$.

Per risolvere il problema, bisogna trovare una condizione aggiuntiva che viene di solito fornita dall'energia cinetica del sistema subito prima dell'urto e subito dopo l'urto.

N.B.: Nel caso di urto non centrale (i.e.: urto piano), dalla (1) si otterranno due equazioni scalari: una per la componente lungo x e l'altra per la componente lungo y.

Cosa succede all'energia cinetica $E_{k,S}$ del sistema prima e dopo l'urto? L'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema:

– si conserva solo nel caso di urto elastico (in questo caso le forze interne che entrano in gioco durante l'urto sono conservative);
– ma NON non si conserva nel caso di urto anelastico (le forze interne che entrano in gioco durante l'urto non sono conservative).

Urti anelastici. Energia dissipata nell'urto: $E_D = - \Delta E_k$.

La variazione di energia cinetica è detta anche Q–valore.

Nel caso di urto <u>completamente o perfettamente</u> anelastico, dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa, e quindi sarà $E_{K,S,d} = E_{k,CM,p}$ dal momento che la velocità del CM è la stessa prima e dopo l'urto.

<u>N.B.: Urto completamente anelastico</u>: ($E_{k,d}^{INT} = 0$, $Q = E_{k,p}^{INT}$)
Si ha la conservazione della sola quantità di moto del sistema:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \qquad \Rightarrow \qquad m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}_{CM}$$

che nel caso di <u>urto centrale</u> si reduce a 1 equazione scalare.

L'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema <u>non</u> si conserva, ma si conserva l'energia cinetica $E_{k,CM}$ del centro di massa. Quindi in un urto anelastico, tutta l'energia cinetica interna del sistema prima dell'urto viene dissipata durante l'urto anelastico stesso.

Quindi E_D corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$E_D = (\tfrac{1}{2}m_1v_{1,d}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2,d}^2) - (\tfrac{1}{2}m_1\,v_{1,p}^2 + \tfrac{1}{2}m_1\,v_{2,p}^2) = -\tfrac{1}{2}\,\mu\,v_{12}^2$$

Infatti:

$$E_D = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM,d}^2 - [\tfrac{1}{2}(m_1 + m_1)\,v_{CM,p}^2 + \tfrac{1}{2}(m_1\,v_{1,p}'^2 + m_1\,v_{2,p}'^2)]$$
$$= -\tfrac{1}{2}[m_1m_2/(m_1+m_2)]v_{12,p}^2 = -\tfrac{1}{2}\,\mu\,v_{12,p}^2 = -E_{k,p}^{INT}$$

Di fatto, per l'energia dissipata, si ha:

$$E_D = E_{k,d} - E_{k,p} = -E_{k,p}^{INT}$$

Esercizi sull'urto centrale perfettamente anelastico:

1) proiettile di massa m sparato con velocità orizzontale $\mathbf{v}_0$ contro blocco di legno di massa M (>>m) vincolato a una fune di

lunghezza L in configurazione di equilibrio statico (pendolo balistico): calcolo della quota h_{max} dopo l'urto.

2) particella di massa *m* lasciata cadere da un'altezza h_0 su una piastra di massa *M* che si trova in posizione di equilibrio sopra una molla di costante elastica k. Studiare il moto successivo del sistema, assumendo che l'urto sia completamente anelastico.

<u>Urti centrali elastici</u>: $E_{K,p} = E_{K,d}$ (i..e.: Q = 0) e quindi:
Nel caso di urto elastico si conserva anche l'energia cinetica del sistema:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1,p}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,p}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,d}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,d}^2 \qquad (2)$$

Questa è la seconda equazione scalare da accoppiare alla:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

(che va proiettata lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente) per risolvere il problema della determinazione di $v_{1,d}$ e $v_{2,d}$.

Da (1) si ha: $$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

Da (2) si ha: $\tfrac{1}{2}m_1 (v_{1,p}^2 - v_{1,d}^2) = \tfrac{1}{2}m_2 (v_{2,d}^2 - v_{2,p}^2)$, cioé

$$m_1 (v_{1,p} - v_{1,d}) (v_{1,p} + v_{1,d}) = m_2 (v_{2,d} - v_{2,p}) (v_{2,d} + v_{2,p})$$

e ricordando la (1') si ha: $(v_{1,p} + v_{1,d}) = (v_{2,d} + v_{2,p})$, cioè:

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

In un urto centrale elastico la velocità di avvicinamento prima dell'urto è opposta alla velocità di allontanamento dopo l'urto.

Risolvendo ora il sistema di equazioni la (3) e la (1'):

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

$$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

si ottengono le velocità delle particelle dopo l'urto:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)\, v_{1p} + 2\, m_2 v_{2p}]/(m_1 + m_2) \qquad (4)$$

e

$$v_{2d} = [(m_2 - m_1)\, v_{2p} + 2\, m_1 v_{1p}]/(m_1 + m_2) \qquad (5)$$

Casi particolarmente interessanti:

1) masse uguali $m_1 = m_2$: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = v_{2p}$$

$$v_{2d} = v_{1p}$$

cioé durante l'urto i due corpi puntiformi si scambiano le velocità.

2) massa m_2 inizialmente in quiete: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

$$v_{2d} = [2m_1/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

a) se $m_1 = m_2$ si ha $v_{1d} = 0$ e $v_{2d} = v_{1p}$

b) se $m_1 > m_2$, allora v_{1d} e v_{2d} hanno lo stesso segno ma $v_{2d} > v_{1d}$, cioé la particella urtante procede anche dopo l'urto nel verso iniziale, ma con velocità minore;

c) se $m_1 < m_2$, allora $v_{1d} < 0$ ed è in modulo $< v_{1p}$, cioé la particella di massa m_1 rimbalza, con velocità ridotta.

d) se $m_2 = \infty$, $v_{2d} = 0$ e $v_{1d} = - v_{1p}$, cioè rimbalza elasticamente.

Esercizi sull'urto centrale:

1) pendolo semplice di massa *m* e lunghezza *L*, lasciato andare dalla configurazione orizzontale, urta un blocco di massa *M* (*M*>>*m*) istantaneamente in quiete sul piano orizzontale liscio.

2) blocco di massa *M* lanciato contro una particella di massa *m* posta in quiete alla base di un profilo circolare di raggio *R*

Urti centrali fra particelle libere nel sistema C:

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l'energia cinetica, si ha:

$$E_{k,p} = ½m_1v_{i,p}^2+½\, m_2v_{2,p}^2 = ½\, Mv_{CM,p}^2 + E'_{k,p} = E_{k,CM} + E_{k,p}^{INT}$$

$$E_{k,d} = ½m_1v_{i,d}^2+½\, m_2v_{2,d}^2= ½\, Mv_{CM,d}^2 + E'_{k,d} = E_{k,CM} + E_{k,d}^{INT}$$

E dato che l'energia cinetica del CM del sistema si conserva prima e dopo l'urto ($E_{k,CM}$ non cambia) si avrà:

Urto perfettamente elastico: ($E_{k,p} = E_{k,d}$)

$$\mathbf{P'}_{S,p} = m_1\mathbf{v'}_{1.p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = 0 = \mathbf{P'}_{S,d} = m_1\mathbf{v'}_{1d} + m_2\mathbf{v'}_{2d}$$

Cioè: $m_1\mathbf{v'}_{1,p} = -m_2\mathbf{v'}_{2,p}$ e $m_1\mathbf{v'}_{1,d} = -m_2\mathbf{v'}_{2,d}$ ($\mathbf{p'}_1 = -\mathbf{p'}_2$)

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l'energia cinetica, si ha $E'_{k,d} = E'_{k,p}$:

$$½m_1\, v'^2_{1,p} + ½m_1\, v'^2_{1,p} = ½m_1\, v'^2_{1,d} + ½m_2\, v'^2_{2,d}$$

Urto completamente anelastico: ($E'_{k,d} = 0$)

Dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa.

Conservazione della quantità di moto del sistema:

$$\mathbf{P'}_{S,p} = \mathbf{P'}_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v'}_{1,p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = \mathbf{0}$$

Mentre per l'energia, si ha:

$$E_D = E_{k,,d} - E_{k,,p} = - E_{k,p}^{INT}$$

A) <u>Urti fra particelle libere e corpi rigidi liberi</u>.

<u>Urto elastic</u>o: oltre alla conservazione della quantità di moto totale e dell'energia cinetica totale del sistema durante l'urto, bisogna considerare anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

<u>Urto completamente anelastico</u>: si ha la conservazione della quantità di moto totale del sistema durante l'urto, e anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

B) <u>Urti fra particelle libere e corpi rigidi vincolati</u>

<u>Urto elastic</u>o: oltre alla conservazione dell'energia cinetica totale del sistema durante l'urto, si conserva anche il momento angolare rispetto al punto O a cui è vincolato il corpo rigido.

<u>Urto perfettamente anelastico</u>: si conserva solamente il momento angolare totale rispetto al punto O in cui è imperniato il corpo urtato. L'energia dissipata nell'urto è data dalla variazione dell'energia propria U del sistema.