Inferenza II

Test di ipotesi

- Definizioni
- Costruzione di un test.
- Test sul valore atteso
- Test di aderenza alla distribuzione.
- Test di indipendenza.

Inferenza: tipologie di approcci.

- Teoria della stima: Cerco di ottenere una stima numerica di una caratteristica (spesso un indice) della popolazione dai dati.
- Test di ipotesi: Faccio un ipotesi su di una proprietà (parametro, distribuzione, indipendenza) della distribuzione teorica della popolazione P e verifico se le osservazioni consentono di accettarla.
  - Possibili domande da test:
    - $E[P]$ è maggiore di 15 ?
    - La variabile P è distribuita come una $Bin(2; 0.5)$?
    - (se P è multi-variata) P_1 e P_2 sono indipendenti?
- Osservazione: la stima trae un parametro dai dati, il test fa un ipotesi sul parametro e usa i dati per confermare l'ipotesi.

Test di ipotesi: ipotesi nulla.

- Osservazione: Un test di ipotesi cerca di verificare se una asserzione è vera o falsa.
- L'asserzione in esame:
  - Viene chiamata ipotesi nulla
  - Di norma è una ipotesi di uguaglianza
  - Si indica con la notazione H_0.
  - Si esprime in linguaggio naturale o in simboli
- Esempi
  - H_0: il valore atteso della popolazione è 2 $\rightarrow H_0{:}E[P]= 2$
  - H_0: la popolazione è distribuita come una binomiale avente $p = 0.2$ e $n = 3$. $\rightarrow H_0 : P \sim Bin(3; 0.2)$.

Test di ipotesi: ipotesi alternativa.

- Se il test da esito “negativo” si usa dire che l'ipotesi nulla viene rifiutata e si accetta l'ipotesi alternativa.
- Ipotesi alternativa:
  - Descrive l'evento che si pensa sia plausibile.
  - Si indica con la notazione H_1.
  - Si esprime in linguaggio naturale o in simboli.
- Esempi
  - $H_0 : E[P] = 2.$ $\quad H_1 : E[P] \neq 2.$
  - $H_0 : Var[P] = 1.$ $\quad H_1 : Var[P] \leq 1.$
- Osservazione: ad una ipotesi nulla posso corrispondere diverse ipotesi alternative.

Test di ipotesi: esempio I.

- Una ditta che produce sferette di acciaio garantisce che la sua produzione ha valore atteso $8\ mm$ e scarto quadratico medio di $0.2\ mm$.
- Per verificare la bontà della produzione si estrae un campione di 60 sfere (ottenendo $\bar{x} = 8.1\ mm$) e si vuole osservare se la produzione rispetta i canoni.

$$H_0 : E[P] = 8\ mm. \qquad H_1 : E[P] \neq 8\ mm.$$

- Osservazione: nel caso si ritenga vera H_0 vuol dire che la differenza fra la media campionaria ed il valore atteso è dovuta al particolare realizzazione di P e non da un mutamento della d.d.p. di P.

Test di ipotesi: esempio II.

- Un'azienda farmaceutica sostiene che il suo farmaco cura una particolare patologia nel $95\ \%$ dei casi.
- Un ricercatore ospedaliero sostiene che questa informazione non sia più attendibile e che il farmaco sia peggiorato. Pertanto, conduce una indagine su 120 pazienti è trova che solo 108 son guariti (il $90\ \%$).

$$P \sim Ber(p)$$

$$H_0 : p = E[P] = 0.95 \qquad H_1 : p < 0.95$$

- Osservazione: nel caso in esame dal testo si evince un modello per la v.c. usata per descrivere la popolazione.

Test di ipotesi: idea.

Come verificare se un'ipotesi è vera analizzando i dati di un campione C di dimensione n?

- Osservazione: l'ipotesi nulla si rifiuta se la differenza fra il valore stimato e quello teorico è “significativa”.
- Idea: Suppongo H_0 vera e calcolo un intervallo di valori probabili per lo stimatore A. Se la stima ottenuta dal campione ricade in A, accetto l'ipotesi nulla.
- Osservazione: A può essere calcolato basandosi sulle considerazioni viste nella stima per intervallo ad un livello di confidenza 1 - α.
- Nel test di ipotesi α prende il nome di livello di significatività.

Test di ipotesi: strategia.

- Come verificare se un'ipotesi è vera da un campione C?
- Possibile strategia:
  - Si suppone H_0 vera.
  - Si calcola la distribuzione di uno stimatore
    - corretto per il parametro θ descritto in H_0
    - calcolato da un campione a dimensione N.
  - Si fissa un livello di significatività α.
  - Si trova una regione di accettazione (A).
  - Si stima puntualmente il parametro θ dal campione C
    - Se il valore è interno ad A accetto l'ipotesi H_0
    - Se il valore è esterno ad A rifiuto l'ipotesi H_0
- Osservazione: i dati si usano solo nell'ultimo passo

Test sul valore atteso - I.

Applico la strategia:

- Si suppone H_0 vera.

Suppongo $E[P]=\mu_0$

- Si calcola la distribuzione di uno stimatore
  - corretto per il parametro θ descritto in H_0 .
  - calcolato da un campione a dimensione n.

Lo stimatore corretto è la media campionaria $\bar{x}$.

Si sa che per n “grande” si ha che

$$\overline{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(\mu_0; \frac{Var[P]}{n})$$

standardizzando

Se $Var[P]$ è nota $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}} \sim Z$ altrimenti $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim Z$

Test sul valore atteso - II.

- Si fissa un livello di significatività α.

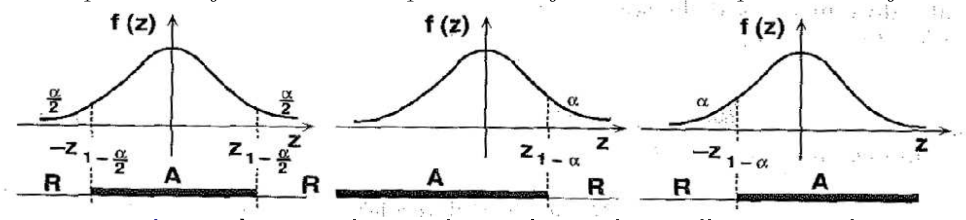
Valori tipici sono $\alpha = 0.05$; $\alpha = 0.02$; $\alpha = 0.01$

- Si trova una regione di accettazione (A).

tre possibili scenari

Test bilaterale (a 2 code) Test unilaterale (a 1 coda)

$H_1 : E[P] \neq \mu_0$ $H_1 : E[P] > \mu_0$ $H_1 : E[P] < \mu_0$



Osservazione: è H_1 a determinare la regione di accettazione.

Test sul valore atteso - III.

- Si stima puntualmente il parametro θ dal campione C
  - Se il valore è interno ad A accetto l'ipotesi H_0
  - Se il valore è esterno ad A rifiuto l'ipotesi H_0

Si procede al semplice calcolo della media campionaria

E si applica il criterio.

- Osservazione: anche se non esplicitate si sono sottintese due ipotesi:
  - Campionamento bernoulliano
  - Distribuzione limite (n>30)

Test di ipotesi:esempio I -svolgimento.

- Una ditta che produce sferette di acciaio garantisce che la produzione ha valore atteso $8\ mm$ e varianza $0.04\ mm$.
- Campione di $n = 60$ sfere ottenendo $\bar{x} = 8.1\ mm$.

$H_0 : E[P] = 8\ mm.$ $H_1 : E[P] \neq 8\ mm.$

Svolgimento:

- H_0 + *testo* $\rightarrow E[P] = 8$; $Var[P] = 0.04$
- $n = 60 \rightarrow \overline{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(8; \frac{0.002}{3})$
- $H_1 \rightarrow$ *test a due code*
- $\alpha = 0.05 \rightarrow$ *Valori Critici* $-1{,}96;\ 1.96 \rightarrow A=[-1{,}96;\ 1.96]$
- *Standardizzo* $\bar{x}$ $z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-8}{\sqrt{\frac{0.002}{3}}} = 3.873$
- $z_{\bar{x}} \notin A \rightarrow$ *Rifiuto* H_0

Test sul valore atteso.

- Popolazione P continua o discreta. Test per verificare se $E[P]=\hat{\mu}$.
- n osservazioni i.i.d. da cui ricavo la media campionaria $\bar{x}$.
- Svolgimento
  - H_0: $E[P]=\hat{\mu} \Rightarrow \hat{\bar{x}}=\hat{\mu}$

$$H_1: E[P]\neq\hat{\mu}$$
$$H_2: E[P]<\hat{\mu}$$
$$H_3: E[P]>\hat{\mu}$$

  - *Verificare la convergenza in legge dello stimatore.*

$$se\ n>30 \Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\hat{\mu} ; \frac{Var[P]}{n}\right) altrimenti\ \ aumentare\ \ n.$$

  - *Si fissa* $\alpha \rightarrow$ *trovo regione di accettazione*

$$H_1: A=\left[z_{\frac{\alpha}{2}} ; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
$$H_2: A=\left[z_{\alpha} ; \infty\right[$$
$$H_3: A=\left]-\infty ; z_{1-\alpha}\right[$$

  - *Standardizzo* $\bar{x}$ $\quad z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}-\hat{\mu}}{\sqrt{\dfrac{Var[P]}{n}}}$
  - *se* $z_{\bar{x}} \in A$ *accetto* H_0 *altrimenti rifiuto* H_0

Test di ipotesi:esempio II-svolgimento.

- Un farmaco cura una particolare patologia nel *95 %* dei casi.
- Campione di $n = 120$ pazienti con $\bar{x} = 90\ \%$ di guarigioni.

H_0 : $E[P] = 0.95$ $\qquad$ H_1 : $E[P] < 0.95$.

Svolgimento:

- H_0 + *testo* $\rightarrow P\sim Ber(p) \rightarrow E[P] = p=0.95; Var[P]=p(1-p)=0.0475$
- $n = 120 \rightarrow \bar{X} \sim N\left(E[P]; \frac{Var[P]}{n}\right)=N\left(0.95; \frac{0.0475}{120}\right)$
- H_1 $\rightarrow$ *test a una coda, unilaterale sinistro*
- $\alpha = 0.01 \rightarrow$ Valore Critico $-z_{0.01} = -2.33 \rightarrow A=[-2.33; +\infty[$
- *Standardizzo* $\bar{x}$ $\quad z(\bar{x})=\dfrac{\bar{x}-0.95}{\sqrt{\dfrac{0.0475}{120}}}=-2.513$
- $z(\bar{x}) \notin A \rightarrow$ *Rifiuto* H_0

Test sulla distribuzione.

- Osservazione: spesso sarebbe utile poter fare ipotesi sulla distribuzione di frequenza di una v.c.
- Esempio III:
  - Si ha il dubbio che un dado sia "truccato".
  - Lanciando il dado $n = 150$ volte si sono ottenuti gli esiti a lato
  - Come verificare l'asserzione?
- Per applicare la tecnica vista debbo
  - Definire un ipotesi
  - Scegliere uno stimatore
  - Calcolare la d.d.p. di riferimento dello stimatore

i	n_i
1	23
2	25
3	32
4	18
5	30
6	22
	150

Test sulla distribuzione: ipotesi I.

- L'esperimento può essere descritto mediante n realizzazioni i.i.d. di una v.c. discreta D la cui d.d.p. viene descritta da:
  - *6* modalità $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  - *6* parametri: $P(D=1)=\hat{p}_1 \quad P(D=2)=\hat{p}_2 \quad \dots \quad P(D=6)=\hat{p}_6$
- L'ipotesi nulla pertanto è che la d.d.p. sia constante ovvero

$$H_0: \quad \hat{p}_i=\frac{1}{6} \quad i=1,2,\dots,6$$

- L'ipotesi alternativa è quella data dall'evento complementare

$$H_1: \quad \exists i: \hat{p}_i \neq \frac{1}{6}$$

- Osservazione: in una v.c. discreta ad M valori, la somma delle probabilità deve essere unitaria. Pertanto è possibile fissare in modo arbitrario sono M-*1* valori.

Test sulla distribuzione: stimatore.

- Osservazione: l'ipotesi nulla coinvolge più parametri. Vorrei ottenere un solo valore per avere una v.c. mono-variata.
- Frequenze teoriche: frequenza attesa se H_0 è vera:

$$\hat{n}_i = n\,\hat{p}_i$$

- Contingenza: scarto fra frequenza rilevata e teorica:

$$c_i = n_i - \hat{n}_i$$

- Osservazione: se H_0 è vera è verosimile che tutte le contingenze (in valore assoluto) siano piccole.
- Osservazione: se H_1 è vera è verosimile che almeno una contingenza (in valore assoluto) sia elevata.

Stimatore di Pizzetti-Pearson.

- La contingenza è la base di uno stimatore per quantificare l'aderenza di una distribuzione teorica ad una reale (H_0).
- Stimatore di Pizzetti-Pearson: $\sum_{i=1}^{M} \frac{c_i^2}{\hat{n}_i} = \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$
  - Il quadrato evita il segno e pesa molto i valori alti.
  - Il rapporto serve per scalare correttamente i contributi.
- Calcolo in tabella
  - Esempio III
  - $\sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} = 5{,}8$

i	n_i	$\hat{n}_i$	$n_i - \hat{n}_i$	$(n_i - \hat{n}_i)^2$	$(n_i - \hat{n}_i)^2 / \hat{n}_i$
1	23	25	-2	4	0.16
2	25	25	0	0	0
3	32	25	7	49	1,96
4	18	25	-7	49	1,96
5	30	25	5	25	1
6	22	25	-3	9	0,36
	150				5,8

Stimatore di Pizzetti-Pearson : d.d.p.

- La strategia di test richiede la d.d.p. dello stimatore.
- Teorema: si dimostra che, al crescere della dimensione del campione (n) allora si ha che

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(\upsilon)$$

dove ν sono i parametri liberi della d.d.p. di P (M-1).

- Nota: il risultato si fonda sul limite centrale.
- Molti autori ritengono che si abbia una buona convergenza in legge quando tutte le frequenze teoriche son maggiori di 5.
- Osservazione: l'ipotesi ($\hat{n}_i > 5 \quad \forall\, i$), nota la d.d.p. ($\hat{p}_i$) può sempre venir rispettata aumentando la dimensione del campione n. $\hat{n}_i = n\,\hat{p}_i$

Test sulla distribuzione: ipotesi II.

- Osservazione: l'ipotesi alternativa si basa sulla frequenza teorica. $H_1:\ \exists i : \hat{p}_i \neq \frac{1}{6}$
- Osservazione: lo stimatore si basa sulla contingenza.

$$c_i = n_i - \hat{n}_i = n_i - n\,\hat{p}_i$$

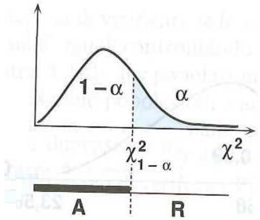
Come fissare la regione di accettazione per lo stimatore di Pizzetti-Pearson ?

- Osservazione: se l'ipotesi nulla sulle frequenze teoriche è rispettata, la contingenza è bassa → il valore $\chi^2(\upsilon) = 0$ deve essere incluso nell'intervallo di accettazione.
- Conclusione: Il test richiesto deve essere unilaterale destro.

Esempio III: svolgimento.

- Si vuole vedere se un dado è truccato.
- Si son effettuati $n=150$ lanci rilevando 6 frequenze $n_1, n_2, \dots, n_6$.
- Svolgimento
  - $H_0:\ \hat{p}_i=\frac{1}{6} \Rightarrow \hat{n}_i=25 \qquad H_1:\ \exists i: \hat{p}_i \neq \frac{1}{6}$
  - *Verificare la convergenza in legge*

    $$\hat{n}_i=25>5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i-\hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(5)$$
  - $H_1 \rightarrow$ *test a una coda, unilaterale dx*
  - $\alpha=0.01 \rightarrow$ Valore Critico $\chi^2_{0.99}(5)=15.1 \rightarrow A=[0\ ;\ 15.1]$
  - *Calcolo lo stimatore =* 5.8
  - $5.8 \in A \rightarrow$ *Accetto* H_0 *(il dado è "onesto" ad un livello del 1%)*



- Osservazione:il procedimento può essere generalizzato.

Test per la distribuzione empirica

- Popolazione P con M modalità. Test per verificare se $P(P=i)=\hat{p}_i$.
- n realizzazioni i.i.d. con $n_1, n_2, \dots, n_M$ osservazioni
- Svolgimento
  - $H_0:\ P(P=i)=\hat{p}_i \Rightarrow \hat{n}_i=n\,p_i \qquad H_1:\ \exists i: P(P=i)\neq \hat{p}_i$
  - *Verificare la convergenza in legge dello stimatore.*

    $$se\ \hat{n}_i>5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_i-\hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(M-1)\ altrimenti\ aumentare\ n.$$
  - $H_1 \rightarrow$ *test a una coda, unilaterale dx*
  - *Si fissa* $\alpha \rightarrow A=\left[0\ ;\chi^2_{1-\alpha}(M-1)\right]$
  - *Calcolo lo stimatore*
    - *se lo stimatore è interno ad* $A \rightarrow$ *accetto* H_0
    - *se lo stimatore è esterno ad* $A \rightarrow$ *rifiuto* H_0

Test di indipendenza: Esempio IV.

- Osservazione: In una bi-variata (x_i, y_i) il test di indipendenza mira a stabilire se i caratteri X ed Y son indipendenti.
- Esempio IV: (tratto da descrittiva III)
  - Caratteri:

X: trattamento antibiotico — Y: stato dell'infezione

$M_x = 2$ {Si; No} — $M_y = 3$ {Espansa, Stabile, Ridotta}

  - $n = 100$ rilevazioni

		Infezione			
		Espansa	Stabile	Ridotta	Totali
Trattamento	Si	*31*	*9*	*10*	50
	No	*9*	*15*	*26*	50
	Totali	40	24	36	100

Test di indipendenza: idea - I.

- Supposizione: i caratteri X ed Y sono indipendenti.
- Conseguenza: le probabilità degli eventi della bivariata son dati dal prodotto degli eventi delle due monovariate.

$$P(X=Si \cap Y=Espansa) = P(X=Si)\ P(Y=Espansa)$$
$$P(X=x_i \cap Y=y_j) = P(X=x_i)\ P(Y=y_j)$$

- Osservazione: $P(X=x_i)$ e $P(Y=y_j)$ possono essere stimate dalle frequenze relative marginali. (definizione classica)
- Conseguenza: nel caso di indipendenza è possibile ricavare una distribuzione teorica valida per la bivariata.

		Y			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
X	Si	20/100	12/100	18/100	50/100
	No	20/100	12/100	18/100	50/100
Totali		40/100	24/100	36/100	1

- Osservazione: Tabella ricavata dalle SOLE marginali.

Test di indipendenza: idea - II.

- Date le osservazioni di una bi-variata, la v.c. P avente:
  - $M = M_x M_y$ modalità (indicate da $m_{i,j}$).
  - d.d.p. $\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}}{n}\frac{n_{+,j}}{n} \quad i=1,2,..M_x, j=1,2,..M_y$

  descrive la bi-variata se e solo se vi è indipendenza.
- Idea: L'indipendenza viene testata con un test di aderenza alla distribuzione teorica.
- Per poter applicare l'idea debbo:
  - Calcolare le frequenze teoriche

    $\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} \quad \forall\, i,j$
  - Verificare la convergenza in legge dello stimatore di Pizzetti – Pearson. $(\hat{n}_{i,j} > 5 \quad \forall\, i,j)$
  - Calcolare i parametri liberi di P.

Test di indipendenza: parametri liberi.

- La d.d.p. di P possiede $M = M_x M_y$ modalità.
- Vi sono dei vincoli dati dalle marginali.
  - M_x vincoli $\sum_{j=1}^{M_y} \hat{n}_{i,j} = n_{i,+} \quad i=1,2,..M_x$
  - M_y vincoli $\sum_{i=1}^{M_x} \hat{n}_{i,j} = n_{+,j} \quad j=1,2,..M_y$
  - 1 vincolo doppio
    - Verde: libero
    - Rosso: vincolato

		Y				
		a	b	c	d	
X	1					$n_{1,+}/n$
	2					$n_{2,+}/n$
	3					$n_{3,+}/n$
		$n_{+,1}/n$	$n_{+,2}/n$	$n_{+,3}/n$	$n_{+,4}/n$	1

- I parametri liberi risultano essere $(M_x -1)(M_y -1)$
- se $\hat{n}_{i,j} > 5 \quad \forall\, i,j$ si ha che: $\sum_{i=1}^{M_x}\sum_{j=1}^{M_y} \frac{\left(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2\left((M_x - 1)(M_y - 1)\right)$

Test di indipendenza (di Pearson)

- Popolazione bi-variata (x_i,y_i) dove X ed Y son indipendenti.
- n prove i.i.d. con $n_{i,j}$ osservazioni delle $M = M_x M_y$ modalità.
- Svolgimento
  - *H_0: X ed Y indipendenti* *H_1: X ed Y dipendenti*
  - *Calcolo le frequenze teoriche* $\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall\, i,j$
  - *Verificare la convergenza in legge dello stimatore.* $\hat{n}_{i,j} > 5\, \forall\, i,j$
  - *Si fissa* $\alpha \rightarrow A = \left[0; \chi^2_{1-\alpha}\left((M_x - 1)(M_y - 1)\right)\right]$
  - *Calcolo lo stimatore di Pizzetti-Pearson*
  - *se lo stimatore è interno ad A* $\rightarrow$ *accetto* H_0
- Osservazione: $\hat{n}_{i,j}$ si calcola dalle osservazioni.
- Conseguenza: se la convergenza non è verificata non è detto che lo sia aumentando n!

Esempio IV - svolgimento I.

X: trattamento antibiotico

Y: stato dell'infezione

$M_x = 2 \quad M_y = 3 \quad n = 100$

		Infezione			
		Espansa	Stabile	Ridotta	Totali
Trattamento	Si	*31*	*9*	*10*	50
	No	*9*	*15*	*26*	50
	Totali	40	24	36	100

- *Calcolo frequenze teoriche*

		Y			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
X	Si	20/100	12/100	18/100	50/100
	No	20/100	12/100	18/100	50/100
Totali		40/100	24/100	36/100	1

		Y		
		Espansa	Stabile	Ridotta
X	Si	20	12	18
	No	20	12	18

- *Convergenza verificata* $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{\left(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2(2)$
- $\alpha = 0.01 \rightarrow A = [0; 9.21]$

Esempio IV – svolgimento II.

- *Calcolo contingenza e stimatore di Pizzetti - Pearson*

		Infezione			
		Espansa	Stabile	Ridotta	Totali
Trattamento	Si	*31*	*9*	*10*	50
	No	*9*	*15*	*26*	50
	Totali	40	24	36	100

		Y		
		Espansa	Stabile	Ridotta
X	Si	20	12	18
	No	20	12	18

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{i,j}-\hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}}=20{,}71$$

- *Lo stimatore è esterno ad A → rifiuto H_0 → le variabili sono dipendenti.*
- Osservazione: il test asserisce che la conoscenza di un carattere (es. ha fatto il trattamento) modifica la proprietà dell'altra (es. lo stato dell'infezione).
- Osservazione: il trattamento è però pessimo. Si è provato che esso aumenta la probabilità espandere l'infezione $m_{1,1}>m_{2,1}$.

Livello di significatività: considerazioni

- Osservazione: α corrisponde ad una probabilità, quale?

Probabilità corrispondente alla regione di rifiuto nella distribuzione di riferimento

- Pertanto:
  - Distribuzione di riferimento → H_0 vera
  - Regione di rifiuto → rifiuto l'ipotesi
- Conclusione: Il livello di significatività descrive la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è vera.

$$P(rifiutare\ H_0|H_0\ vera)=\alpha$$

Test di ipotesi: tipo di errori

- In quanti modi posso sbagliare a fornire un risultato?

	Realtà	
Risultato test	H_0 Vera	H_0 Falsa
Accettare H_0	OK	Errore
Rifiutare H_0	Errore	OK

  - Errore di I° tipo: rifiutare un'ipotesi valida (falso positivo)
  - Errore di II° tipo: accettare un'ipotesi falsa (falso negativo)
- Osservazione: le probabilità dei due errori son dipendenti.
- Osservazione: la probabilità di un falso positivo dipende dal livello di significatività
- Osservazione: la probabilità di un falso negativo difficilmente è calcolabile.

P-value: problematiche & definizione

- Osservazione: il risultato di un test è
  - l'accettazione di una delle ipotesi iniziali (H_0 o H_1)
  - legato al valore del livello di significatività α.
- Osservazione: la stima θ può essere più o meno vicina ai valori critici che delimitano la regione di accettazione A

A=[-2 ; 2] $\theta = 2.1$ oppure $\theta = 21.9$

- Si usa pertanto affiancare alla stima il p-value ovvero:

il valore del livello di significatività tale per cui uno dei il valori critici coincida con la stima in esame.

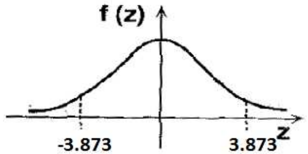
Esempio I -calcolo p-value.

- Campione di n = *60* sfere con $\bar{x}$ = *8.1 mm*

  H_0 : E[P] = *8 mm.* H_1 : E[P] $\neq$ *8 mm.*

Svolgimento:

- Ipotesi *Var[P] =0.002*.
- Stimatore: media $\bar{X} \sim N(E[P]; \frac{Var[P]}{n}) = N(8; \frac{0.002}{3})$
- H_1 $\rightarrow$ *test a due code*
- α = *0.05* $\rightarrow$ *Valori Critici* *-1,96; 1.96* $\rightarrow$ *A=[-1,96; 1.96]*
- *Standardizzo* $\bar{x}$ $z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-8}{\sqrt{\frac{0.002}{3}}} = 3.873$
- *Il p-value è la probabilità nelle code di Z*



dalla tabella ricavo p=2(0.5- 0.4499) = 0.0002*

Ricapitolando - I

- Ipotesi: nulla (H_0) e alternativa (H_1).
  - H_0: stato normale. Sempre ipotesi di uguaglianza.
  - H_1: descrive il motivo per cui faccio il test.
- Strategia di progetto del test
  - Suppongo valida l'ipotesi nulla.
  - Noto stimatore T che confermi H_0 e ne trovo la d.d.p.
  - Fisso un livello di significatività α.
  - Fisso la regione di accettazione A tale $P(T \in A) = 1 - \alpha$

H_1 *:bilaterale* H_1 *:unilaterale dx* H_1 *: unilaterale sx*

  - Se lo stimatore calcolato nel campione è in A accetto H_0.

Ricapitolando - II

- Test sul valore atteso $H_0: E[P] = \hat{\mu}$
  - Stimatore media standardizzata $z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \hat{\mu}}{\sqrt{\frac{Var[P]}{n}}}$
  - Convergenza $n > 30 \Rightarrow z_{\bar{x}} \sim Z$

    $H_1: E[P] \neq \hat{\mu} \Rightarrow A = \left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

    $H_2: E[P] < \hat{\mu} \Rightarrow A = \left[z_\alpha; \infty\right[$

    $H_3: E[P] > \hat{\mu} \Rightarrow A = \left[-\infty; z_{1-\alpha}\right[$
  - Se $Var[P]$ ignota si stima con la varianza campionaria s^2.
- Test di aderenza H_0: $P(P=i) = \hat{p}_i \Rightarrow \hat{n}_i = n\, p_i$ H_1: $\exists i : P(P=i) \neq \hat{p}_i$
  - Stimatore di Pizzetti-Pearson
  - Condizione di convergenza $\hat{n}_i > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \sim \chi^2(M-1)$

  $A = \left[0; \chi^2_{1-\alpha}(M-1)\right]$

Ricapitolando - III

- Test di indipendenza
  - H_0: *X ed Y indipendenti* H_1: *X ed Y dipendenti*
  - Stimatore di Pizzetti-Pearson
  - Condizione di convergenza

$$\hat{n}_{i,j} > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2\left((M_x - 1)(M_y - 1)\right).$$

$$A = \left[0; \chi^2_{1-\alpha}\left((M_x - 1)(M_y - 1)\right)\right]$$