Modelli

Principali famiglie

- Tassonomia
- Modelli AR, MA, ARX, ARMAX, OE
- Famiglia Generale
- Predittore Generale

Descrizione generale

Modello: descrizione del legame fra le seguenti serie storiche:

- t: tempo
- $y(y)$: uscita (misurabile)
- $u(t)$: ingresso (misurabile e manipolabile)
- $e(t)$: disturbo o errore (mai manipolabile, a volte misurabile)

$$y(t)=f(u(.),y(.),e(.),t)$$

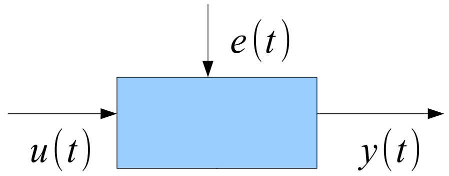


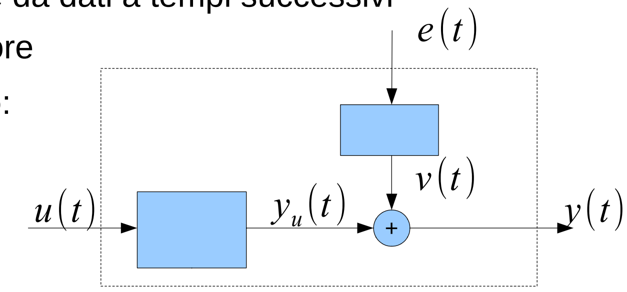
Diagramma a blocchi

Tassonomia - I

- Tipo di Tempo
  - Tempo continuo $t \in \mathrm{N}$
  - Tempo discreto $t \in R$
    - Campionamento
      - Uniforme (tempo di campionamento τ_c costante)
      - Non uniforme
- Dipendenza dal tempo
  - Tempo invarianza $y(t)=f(u(.),y(.),e(.))$
  - Tempo varianti $y(t)=f(u(.),y(.),e(.),t)$

Tassonomia - II

- Causalità
  - Causali: uscite future dipendono dai dati passati.
  - Non Causali: le uscite al tempo t possono dipendere anche da dati a tempi successivi
- Effetto dell'errore
  - Additivo:



$$y(t)=g(u(.),y(.),t)+h(y(.),e(.),t)$$

Modelli Considerati nel Corso

- Considereremo modelli
  - Tempo discreto
  - Campionamento uniforme (per comodità $\tau_c = 1$)
  - Tempo invarianti
  - Causali
  - Con errore bianco, stazionario (in senso debole) e additivo.

$$y(t+1)=g\left(u(t),y(t)\right)+h\left(y(t),e(t)\right)$$

$$con \quad t\in N, e(t)\sim WN\left(f_e(.)\right)$$

Media Mobile (MA) -definizione

- Modelli in cui l'uscita è combinazione lineare
  - dell'errore al tempo presente
  - degli nc valori precedenti dell'errore (nc è detto ordine)

$$y(t)=\sum_{i=1}^{nc} c_i e(t-i)+e(t)$$

- Usando l'operatore di shift

$$y(t)=C(q)e(t) \qquad C(q)=1+\sum_{i=1}^{nc} c_i q^{-i}$$

- Esempio di ordine 1

$$y(t+1)=c_1 e(t-1)+e(t)$$

Media Mobile (MA) - proprietà

$$y(t)=\sum_{i=1}^{nc} c_i e(t-i)+e(t) \quad e(t)\sim WN\left(\mu_e;\sigma_e\right)$$

L'uscita è un processo stazionario

- Valore atteso

$$E[y(t)]=E\left[\sum_{i=1}^{nc} c_i e(t-i)+e(t)\right]=\sum_{i=1}^{nc} c_i E[e(t-i)]+E[e(t)]$$

$$E[y(t)]=\sum_{i=1}^{nc} c_i\mu_e+\mu_e=\mu_e\left(\sum_{i=1}^{nc} c_i+1\right)=\mu_e C(1)$$

- Autocovarianza

$$\gamma_{yy}(\tau)=\begin{cases} 1\cdot c_\tau+c_1 c_{\tau+1}+\ldots+c_{ne-1}c_{\tau+ne-1}+c_{ne}c_{\tau+ne} & \tau\le n_e \\ 0 & \tau>n_e \end{cases}$$

Autoregressivi (AR) - definizione

- Modelli in cui l'uscita è combinazione lineare di
  - I precedenti na valori (na è detto ordine)
  - L'errore al tempo presente

$$y(t)=\sum_{i=1}^{na} a_i y(t-i)+e(t)$$

- Usando l'operatore di shift

$$A_0(q)y(t)=e(t) \qquad A_0(q)=1-\sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}$$

- Esempio di ordine 1

$$y(t+1)=a_1 y(t)+e(t)$$

Autoregressivi (AR) – proprietà - I

$$y(t)=\sum_{i=1}^{na} a_i\, y(t-i)+e(t) \quad e(t)\sim WN(\mu_e;\sigma_e)$$

L'uscita NON è un processo stazionario

- Potrebbe divergere

  esempio $$y(t)=2\,y(t-1)+e(t) \quad e(t)\sim WN(\mu_e;\sigma_e)$$

  L'uscita si "auto alimenta" e cresce sempre più!
- Si considereranno solo processi stabili

  per cogliere il concetto pratico della stabilità si può considerare la BIBO stabilità (Bounded Input – Bounded Outpur) che richiede che ad un ingresso limitato corrisponda, eventualmente dopo un transitorio, un uscita limitata.
- Si studiano le proprietà asintotiche ottenute a regime.

Autoregressivi (AR) – proprietà - II

Si dimostra che se $|\alpha_i|<1\,\forall\,\alpha_i : A_0(\alpha_i)=0$

l'uscita asintoticamente è un p.c. stazionario avente

- Valore atteso $$E[y(t)]=\frac{1}{A_0(1)}E[e(t)]$$
- Autocovarianza (ricavabile dalle Yule–Walker eq.)

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(1) & \dots & \gamma_{yy}(na-1) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \dots & \gamma_{yy}(na-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \gamma_{yy}(na-1) & \gamma_{yy}(na-2) & \dots & \gamma_{yy}(0) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(2) & \dots & \gamma_{yy}(na) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{na} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \dots \\ \gamma_{yy}(na) \\ \gamma_{yy}(0)-\sigma \end{bmatrix}$$

Autoregressivi con media mobile (ARMA)

- Modelli in cui l'uscita è chiusura lineare di
  - I precedenti na valori dell'uscita
  - L'errore al tempo presente
  - I precedenti nc valori dell'errore

$$y(t)=\sum_{i=1}^{na} a_i\, y(t-i)+\sum_{i=1}^{nc} c_i\, e(t-i)+e(t)$$

- Usando l'operatore di shift

$$A_0(q)\,y(t)=C(q)\,e(t) \quad \rightarrow \quad y(t)=\frac{C(q)}{A(q)}e(t)$$

- Si indicano con *ARMA(na,nc)*

ARMA – proprietà - I

$$y(t)=\frac{C(q)}{A_0(q)}e(t) \quad e(t)\sim WN(\mu_e;\sigma)$$

- **Stabilità** Si dimostra che se $|\alpha_i|<1\,\forall\,\alpha_i : A_0(\alpha_i)=0$

  l'uscita asintoticamente tende ad un p.c. stazionario avente

$$E[y(t)]=\frac{C(1)}{A_0(1)}E[e(t)]$$

- **Osservazione**: ARMA generalizza MA e AR

$$C(q)=1\rightarrow AR \qquad A_0(q)=1\rightarrow MA$$

- Spesso usata per "filtrare" il rumore bianco per ottenere

$$v(t)=\frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad e(t)\sim WN(\mu_e;\sigma)$$

AR con ingresso esogeno (ARX)

- Modelli in cui l'uscita è chiusura lineare di
  - I precedenti *na* valori dell'uscita
  - L'errore al tempo presente
  - I precedenti *nb* valori dell'ingresso deterministico

$$y(t)=\sum_{i=1}^{na} a_i y(t-i)+\sum_{i=1}^{nb} b_i u(t-i)+e(t)$$

- Introducendo $B(q)=\sum_{i=1}^{nb} b_i q^{-i}$ si ha:

$$A_0(q)y(t)=B(q)u(t)+e(t) \quad \rightarrow \quad y(t)=\frac{B(q)}{A_0(q)}u(t)+\frac{1}{A_0(q)}e(t)$$

- Si indicano con *ARX(na, nc)*

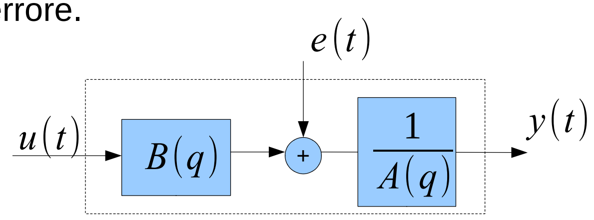
ARX – proprietà - I

$$y(t)=\frac{B(q)}{A_0(q)}u(t)+\frac{1}{A_0(q)}e(t) \quad e(t)\sim WN(\mu_e;\sigma)$$

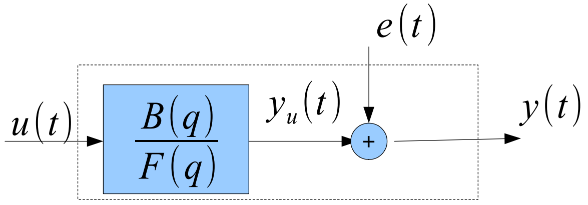
Stabilità Si dimostra che se $|\alpha_i|<1\,\forall\,\alpha_i : A_0(\alpha_i)=0$

l'uscita è asintoticamente stabile e tende ad un p.c. stazionario

Oss:la parte determinista è soggetta alla stessa “dinamica“ dell'errore.



Output Error - idea



- Serve introdurre un segnale di appoggio

  $y_u(t)$: uscite calcolate dai **soli** ingressi passati

- $y_u(t)$ è deterministico.
- Debbo definire due equazioni
  - Una per la serie $y_u(t)$
  - Una per la serie $y(t)$

OE - definizione

- Modelli in cui l'uscita è data da
  - I precedenti *nf* valori dell'uscita predetta di soli ingressi
  - L'errore al tempo presente
  - I precedenti *nb* valori dell'ingresso deterministico

$$y_u(t)=\sum_{i=1}^{na} f_i y_u(t-i)+\sum_{i=1}^{nb} b_i u(t-i)$$

$$y(t)=y_u(t)+e(t) \quad e(t)\sim WN(\mu_e;\sigma)$$

- Usando l'operatore di shift

$$y_u(t)=\frac{B(q)}{F(q)}u(t)+e(t) \qquad F(q)=1-\sum_{i=1}^{nf} f_i q^{-i}$$

- Si indicano con *OE(nb,nf)*

Famiglia generale

- I segnali possibili risultano essere
  - L'errore al tempo presente
  - I precedenti *na* valori delle uscite
  - I precedenti *nb* valori dell'ingresso deterministico
  - I precedenti *nc* valori dell'errore
  - I precedenti *nd* valori del rumore filtrato
  - I precedenti *nf* valori delle uscite ricavate dai soli ingressi
- Notazione compatta

$$A_0 y(t)=\frac{B(q)}{F(q)}u(t)+\frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

$$y(t)=G(q)u(t)+H(q)e(t)$$

Famiglia generale – Polinomi

- Struttura polinomi di base

$$G(q)=\frac{B(q)}{A_0(q)F(q)}=\frac{\sum_{i=1}^{nb} b_i q^{-i}}{\left(1+\sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}\right)\left(1+\sum_{i=1}^{nf} f_i q^{-i}\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{nb} b_i q^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{nf+na} g_i q^{-i}}$$

$$H(q)=\frac{C(q)}{A_0(q)D(q)}=\frac{1+\sum_{i=1}^{nc} c_i q^{-i}}{\left(1+\sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}\right)\left(1+\sum_{i=1}^{nd} d_i q^{-i}\right)}=\frac{1+\sum_{i=1}^{nc} c_i q^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{nd+na} h_i q^{-i}}$$

Il modello è stabile se i polinomi al denominatore di $G(q)$ e $H(q)$ hanno radici in modulo (strettamente) minori di uno

- **Osservazione**: I polinomi in gioco hanno sempre termine noto pari a 1 tranne il numeratore di $G(q)$.

Famiglia generale – Modelli Notevoli

- A seconda di quali polinomi sono in uso (i. e. diversi dal loro termine noto) si hanno modelli diversi.

Polinomio in uso	Nome modello
B	FIR (finite impulse response)
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE (output-error)
BFCD	BJ (Box-Jenkins)

- I modelli ARARX e ARARMAX son tipicamente poco usati.

Il problema della predizione

Il problema della predizione può essere così definito

- Dati
  - un modello $y(t)=G(q)u(t)+H(q)e(t)$
  - e N misurazioni di ingressi ed uscite

$$Z^N:=(y(i);u(i))\, con\, 0<i<N$$

- Determinare la migliore stima (detta predizione) per un uscita futura (fra k istanti di campionamento)

$$\hat{y}(N+k|Z^N)$$

Osservazione :$y(t)$ dipende da $e(t)$ che è ignoto, quindi è lecito aspettarsi che

$$\hat{y}(N+k|Z^N)\neq y(N+k)$$

Predittori & Predizioni

Si definisce

- **Predittore a *k* passi** un modello *P(.)* che leghi la predizione dell'uscita a valori di passate osservazioni

$$y(t+k|t)=P(u(t),y(t))$$

Nel seguito tratteremo solo predittori ad un passo *LTI*

- **Predizione a k passi** il valore assunto dal predittore noti dati

$$y(N+k|Z^N)=P(Z^N)$$

Spesso non si enfatizza la dipendenza dagli ingressi passati e si usa la notazione

$$\hat{y}(N+k)=P(Z^N)$$

Predittore ad un passo – Calcolo

$$y(t|t-1)=G(q)u(t|t-1)+H(q)e(t|t-1)$$

Nel calcolo tralascio la dipendenza da q

- Moltiplico per l'inverso di H ambo i membri

$$H^{-1}y(t|t-1)=H^{-1}Gu(t|t-1)+e(t|t-1)$$

- Scorporo l'unita dal polinomio H^{-1}

$$y(t|t-1)+(H^{-1}-1)y(t|t-1)=H^{-1}Gu(t|t-1)+e(t|t-1)$$

- Gli ingessi sono considerati sempre noti, pertanto posso sostituire $u(t|t\text{-}1)$ con $u(t)$.

$$y(t|t-1)=(1-H^{-1})y(t|t-1)+H^{-1}Gu(t)+e(t|t-1)$$

Predittore ad un passo – Calcolo II

- Considero il contributo delle predizioni

$$1-H^{-1}(q)=1-\frac{1+\sum_{i=1}^{nd+na}h_iq^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{nc}c_iq^{-i}}=\frac{\sum_{i=1}^{nc}c_iq^{-i}-\sum_{i=1}^{nd+na}h_iq^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{nc}c_iq^{-i}}$$

- Il polinomio al numeratore indica solo dati nel passato: posso sostituire $y(t|t\text{-}1)$ con $y(t)$.

$$y(t|t-1)=(1-H^{-1})y(t)+H^{-1}Gu(t)+e(t|t-1)$$

- Procedo al calcolo della stima sostituendo l'errore con il suo valore atteso

$$y(t|\hat{t}-1)=\hat{y}(t)=(1-H^{-1})y(t)+H^{-1}Gu(t)$$

Errore di predizione

- L'errore di predizione è l'errore che si commette usando l'uscita stimata (predetta) in vece di quella reale (del sistema)

$$\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}(t|t-1)$$

- Si dimostra che l'errore di stima usando il predittore ottimo è pari a $e(t)$.

$$\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}(t|t-1)=Gu(t)+He(t)-(1-H^{-1})y(t)-H^{-1}Gu(t)$$

$$\varepsilon(t)=Gu(t)+He(t)-(1-H^{-1})(Gu(t)+He(t))-H^{-1}Gu(t)$$

$$\varepsilon(t)=Gu(t)+He(t)-Gu(t)-He(t)+H^{-1}Gu(t)+e(t)-H^{-1}Gu(t)$$

$$\varepsilon(t)=e(t)$$