Programma ufficiale di Elementi di Geometria A.A. 2012/2013

Nicola Sansonetto*

25 gennaio 2013

Geometria Affine

Definizione di spazio affine, diverse notazioni. Sistemi di riferimento e coordinate affini; notazione unificata. Esempi: spazio vettoriale come spazio affine su se stesso, lo spazio affine standard e il caso del piano affine. Sottovarietà lineari per un punto P e di spazio direttore (o giacitura) W: punti, rette, piani e iperpiani. Intersezione e somma connessa di sottovarietà lineari. Un esempio in $\mathbb{A}^2$. Equazioni parametriche e cartesiane con esempi. Mutua posizione di sottovarietà lineari: incidenza, parallelismo, complementarietà e sottovarietà sghembe; la formula di Grassmann generalizzata con dimostrazione. Thm di coincidenza di sottovarietà. Trasformazioni affini e affinità. Isomorfismo tra spazi affini di dimensione finita e lo spazio affine standard, con dimostrazione. Il gruppo affine Aff($\mathbb{A}$). Sistemi di punti indipendenti e affinità (no dimostrazione). Alcune trasformazioni affine notevoli: traslazioni, omotetie, simmetria assiali e centrali e proiezioni. Omotetie, simmetrie e proiezioni e relative matrici associte; esempi. Lo spazio vettoriale geometrico: segmenti orientati, classi di equipollenza e vettori geometrici. Struttura vettoriale dell'insieme dei vettori geometrici, isomorfismo tra $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_A$ e S_A e coordinate, operazioni sulle corrdinate. Lo spazio euclideo $\mathbb{E}^n$: prodotto scalare standard, struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$, ortogonalità e riferimento cartesiano standard. *Giovedì 20 dicembre 2012.* Alcune proprietà di $\mathbb{E}^n$ e relative dimostrazioni. Il concetto di distanza tra sottoinsiemi di spai affini, esistenza del punto che realizza la (minima) distanza tra sottovarità con dimostrazione. Il prodotto vettoriale e relative proprietà, in particolare antisimmetria e identità di Lagrange. Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale e parallelismo. Area e determinante nel piano e nello spazio euclideo, in particolare l'area del triangolo. Determinante e affinità. L'area orientata. Il prodotto misto. Equazioni cartesiane e parametriche del piano e della retta, il vettore $\vec{n}$ normale un piano, le cui componenti sono i coefficienti delle incognite dell'equazione cartesiana del piano. Piano per tre punti e retta per due punti. Fasci di rette nel piano e fasci di piani nello spazio: fasci propri e impropri. Interpretazioni geometrica del Teorema di Rouchè–Capelli, mutua posizione di rette e piani: interpretazione geometrica e analitica. Parallelismo tra retta e piano. Ancora sull'interpretazione geometrica del teorema di Rouchè–Capelli e mutua posizione di tra piani, tra rette e tra rette e piani nello spazio. *Tutte le seguenti condizioni sono con dimostrazione o intepretazione geometrica o giustificazione geometrica.* Condizione di parallelelismo piano–retta (3 metodi distinti). Condizione di complanarietà tra rette. Condizione affinché due rette siano sghembe e conseguente interpretazione geometrica. *Nozioni metriche.* Distanza di due punti. Distanza punto–piano (in 2 metodi diversi). Distanza retta–piano tra loro paralleli. Distanza punto–retta. Distanza tra due rette sghembe (2 metodi distinti). Distanza tra due rette parallele. Angolo tra rette e tra piani. Bisettrici tra due rette nel piano. Isometrie, isometrie e affinità (nel caso reale); isometrie dirette e inverse, assiali e centrali. Esempi e condizioni lineari, matrici ortogonali. Condizione necessaria affincé una trasformazione affine sia un'isometria. Classificazione delle isometrie piane. (*I precedenti argomenti sono da intendersi senza dimostrazioni.*)

*Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Verona, Ca' Vignal 2, Strada le Grazie 14, 37134 Verona. e-mail: nicola.sansonetto@univr.it

Geometria Proiettiva

Definizione di spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale di dimensione finita. Interpretazione geometrica di $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}$ come classe di equivalenza di vettori proporzionali non nulli. Coordinate omogenee e affini. Esempi: $\mathbb{P}^0$, $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$ con conseguente interpretazione geometrica. Punti propri e impropri. Geometria del piano proiettivo: punti propri e impropri, retta per due punti. Incidenza, rette parallele, direzioni. Fasci di rette.

Il piano proiettivo reale complessificato. Matrici simmetriche e definizione di conica. Cenni a vettori isotropi e cono isotropo come recupero dell'idea classica. Equazione e polinomio individuanti una conica, polinomi equivalenti e coniche. Coniche proiettivamente equivalenti, matrici simmetriche congruenti e invarianza per proiettivittà. Classificazione proeittiva complessa e reale delle coniche: coniche riducibili e irriducibili. Coniche degeneri con esempi. Tangenti ad una conica irriducibile, equazione della tangente dato il punto di tangenza. Polare di un punto rispetto ad una conica, sia per punti interni che esterni. Tangenti condotte da un punto non appartenente alla conica (vari metodi). Fasci di coniche: per 4 punti distinti a tre a tre non allineati, per tre punti e una condizione di tangenza, fascio di coniche bitangenti. Cenni ai fasi osculanti e iperosculanti. Terzo metodo per la determinazione delle tangenti ad una conica irriducibile per un punto non appartenente alla conica, con esempi. Classificazione affine delle coniche: approccio geometrico ed analitico, il minore A_{00}. Proprietà affini delle coniche irriducibili: centro,diametri, diametri coniugati e relative proprietà; asintoti. Formula per il centro di una conica. Formula per i diametri coniugati e per gli asintoti reali, con esempi. Equazione canonica metrica: coniche a centro e coniche non a centro: assi di una conica. Il metodo degli invarianti ortogonali sia per le coniche a centro che per la parabola. Ulteriori aspetti metrici: rette isotrope, punti ciclici, fuochi e direttrice. Il caso della parabola: il vertice. Metodo operativo per la determinazione del vertice, del fuoco e della direttrice.