★ **Teorema.** Sia X Hausdorff e $\sim$ aperta.

$X/\sim$ è Hausdorff $\iff$

$R \equiv R_\sim := \{(x,y) \mid x \sim y\}$ $\quad \pi : X \to X/\sim$

è chiuso in $X \times X$

Dim. ($\Rightarrow$) $X/\sim$ è T_2; siano $U \ni \pi(x)$, $V \ni \pi(y)$ disgiunti ($\pi(x) \neq \pi(y)$)

si ponga $\tilde{U} = \pi^{-1}(U) \ni x$

aperti

$y \in \tilde{V} = \pi^{-1}(V)$

ma allora

$\tilde{U} \times \tilde{V} \ni (x,y)$ e non interseca R. [ovvero $X \setminus R$ è aperto]

altrimenti $\exists\, (x', y')$ t.c. $U \ni \pi(x') = \pi(y') \in \tilde{V}$

contro l'ipotesi che $\underset{\pi(x)}{U} \cap \underset{\pi(y)}{V} = \phi$.

($\Leftarrow$) Dati $[x]$ e $[y] \in X/\sim$. Si consideri

$(x,y) \in \underset{\text{aperto}}{\tilde{U} \times \tilde{V}} \subset X \setminus R$ ($X \setminus R$ è aperto)

si ha $U = \underset{\text{aperto}}{\pi(\tilde{U})} \ni [x]$ $\quad V = \pi(\tilde{V}) \ni [y]$ [π è aperta]

e $U \cap V = \phi$

Richiamo

☆ G gruppo topologico (coesistono una struttura di gruppo e una topologia)

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longmapsto g \cdot h$$

si richiedono continue

$$G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

$R_h : G \to G$

$R_h(g) = g h$ "traslazione destra" "moltip. destra"

$$G \longrightarrow G \times G \longrightarrow G$$
$$g \longrightarrow (g, h) \longrightarrow g h$$

continua continua

R_h è di fatto un omeomorfismo (inverso continuo: $R_{h^{-1}}$)

Es: • Ogni gruppo, dotato di τ_d, è gr. top.

• $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo topologico (top, quella di $\mathbb{R}^{n^2}$. Le operazioni sono continue)

4 <u>Teorema</u> Sia X uno spazio topologico di Hausdorff su cui agisca $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$

$X/_G$ è Hausdorff $\Leftrightarrow$ $R = \{(x, g\cdot x) / x \in X, g \in G\}$ è <u>chiuso</u> in $X \times X$.

<u>Dim.</u> Immediata da quanto precede e dal fatto che $\pi : X \to X/_G$ è aperta.$^{(*)}$

4 Es. $\mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R})$ non è di Hausdorff.

azione: $x \mapsto A \cdot x$, $A \in GL(n,\mathbb{R})$

$$R = \{(\underset{\in \mathbb{R}^n}{\underline{0}}, \underline{0})\} \cup \{(\underset{\in \mathbb{R}^n}{e_1}, \underset{\in \mathbb{R}^n}{v})\}_{v \neq 0}$$

$v = A e_1$, A opportuna $\begin{bmatrix} v & \cdots \end{bmatrix}$

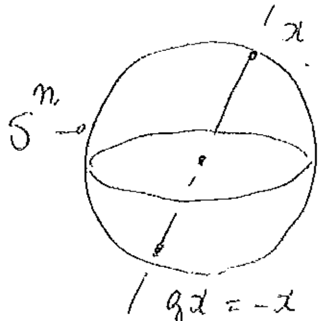
non è <u>chiuso</u>: $(e_1, \underline{0})$ è punto di accumulazione di R ma non gli appartiene

$\left[\; A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0 \quad e_1 \mapsto \lambda e_1 \;;\; \text{sia } \lambda \to 0 \ldots \right]$

(*) Se $A \subset X$ è aperto, $\pi(A) = \bigcup_{g \in G} g(A)$.
Ma $g(A)$ è aperto ($g \in G \subset \mathrm{Omeo}(X)$), e un'unione arbitraria di aperti è un aperto; $\pi(A)$ è dunque aperto, i.e. π <u>è aperta</u>

Esempio: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ Sp. proiettivo reale

(I)



$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\Gamma \qquad \Gamma = \mathbb{Z}/_2$$

$$g : \underset{S^n}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto g \cdot x \equiv -x$$

mappa antipodale

$\|x\| = 1$

NOTA

$\tilde{\pi} : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

è un'applicazione di rivestimento.

S^n è il rivestimento universale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$x \sim y \iff y = \pm x$

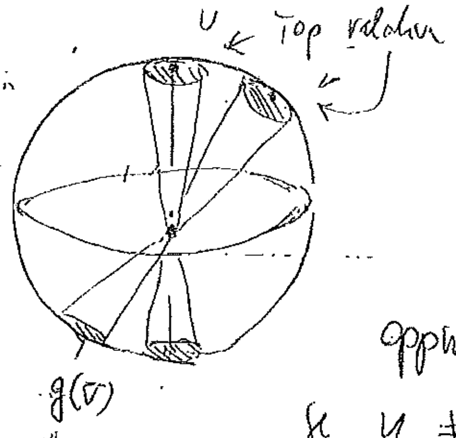
$$\begin{pmatrix} x_0 & \text{———} & x_n \\ y_0 & \text{———} & y_n \end{pmatrix}$$

$\sim$ è una relazione aperta.

banalmente è chiuso

★ mostriamo che $R \equiv R_\sim$ è chiuso $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2

ecco:



$U \cap g(V) = \phi$

$\forall g \in \Gamma$

vedi anche poco oltre

oppure, analiticamente:

se $y_0 \neq \pm x_0$, tale disuguaglianza persiste localmente...

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (II) $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\sim$: $x \sim y$ se $x = ty$ $\quad t \neq 0$

$\sim$ è ancora aperta. $\quad G = \underset{\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\overset{\mathbb{R}^*}{\|}} \quad x \mapsto g \cdot x = tx$

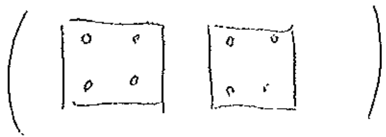
$R_\sim$ è chiuso: vediamolo così (Boothby) ☆

Sia $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto f(x,y) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & \text{———} & x_n \\ y_0 & \text{———} & y_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq 0 \end{matrix}$$

minori 2×2 estratti



$f(x,y) = 0 \iff x = ty$ per qualche $t \neq 0$

f è continua

$\Rightarrow \quad R_\sim = f^{-1}(0)$

$\Rightarrow \quad R_\sim$ è chiuso (controimm. di un chiuso)

⚠ NOME INFELICE !
in realtà si tratta di una azione continua di un gruppo di Lie discreto)

★ <u>Azione</u> <u>propriamente</u> <u>discontinua</u>

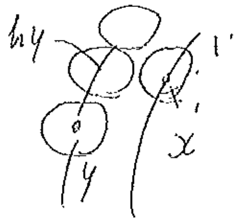
Γ <u>gruppo</u> <u>discreto</u> [i.e. (numerabile), top. discreta]

agisce su X (s.top., T_2) se

(i) $\forall x \in X$, $\exists\ U \ni x$ t.c. $\{ h \in \Gamma \,/\, hU \cap U \neq \emptyset \}$ è finito

(ii) se x, y non sono sulla stessa orbita ($hy \neq x\ \forall h$)

$\exists\ U \ni x,\ V \ni y$ t. che $U \cap hV = \emptyset$



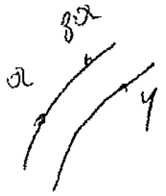
(ii) $\Rightarrow$ X/Γ

Hausdorff

[ν : è aperta, e $R_\sim$ è chiusa]
def. in modo ovvio

<u>Osservazione</u> $R_\sim = \{ (x, gx) \,/\, x \in X, g \in G \}$

è chiusa $\Leftrightarrow$ $X \setminus R_\sim = \{ (x, y) \,/\, y \neq gx\ \forall g \}$



$= \{ (x, g \cdot y) \,/\, y \neq g'x\ \forall g' \in G \}$

è aperto. $\Rightarrow$ la condizione (ii)

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

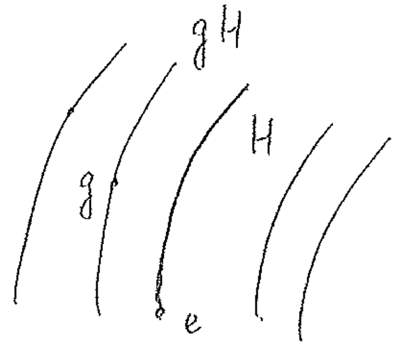
gruppo topologico — sottogruppo (top) di H

Motivazione culturale: il programma di Erlangen di F. Klein (1872)

geometria $\longleftrightarrow$ proprietà invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni

$$g \longmapsto [g] = \{gh \,/\, h \in H\}$$
$$[g] \equiv gH \quad \text{(classe laterale sinistra)}$$

left coset



☆ spazio delle orbite di H; H agisce su G a destra

$$G \ni g \longmapsto g \cdot h \in G$$

$\boxed{\pi \text{ è continua e aperta}}$

☆☆ Dimostriamo che: G/H è Hausdorff $\Longleftrightarrow$ H è chiuso (in G)

($\Leftarrow$) Sia H chiuso.

Si consideri $F : G \times G \longrightarrow G$
$$(x, y) \longmapsto y^{-1}x$$

F è continua e
$$F^{-1}(H) = \{(x,y) \,/\, \underbrace{y^{-1}x}_{h} \in H\}$$
$$= \{(x,y) \,/\, x \sim y\}$$
stessa orbita di H

$= R$ che è chiusa.

($\Rightarrow$) G/H Hausdorff $\Rightarrow$ R chiusa. Sia $h_i \to g \in G$

$(h_i, e) \in F^{-1}(H)$ $\quad (F(e, h_i) = e^{-1}h_i = h_i)$ $\quad (h_i, e) \to (g, e) \in F^{-1}(H)$

$\Downarrow$

$g \in H$

~~44~~ esempio importante (negativo):

la foliazione di Kronecker del toro $S^1 \times S^1 \equiv G$

Sia $H = \gamma(\mathbb{R})$ $\quad \gamma : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$

$t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i c t}) \equiv \gamma(t)$

$c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

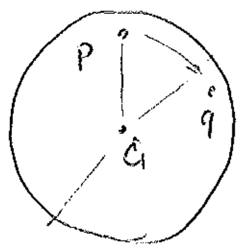
H è s. di G, non chiuso ($\overline{H} = G$). Le orbite dell'azione naturale di H su $S^1 \times S^1$ sono tutte dense. È evidente che G/H non sia di Hausdorff: non c'è modo di separarle.

Per gestire "spazi di orbite" di questo tipo si ricorre alla teoria delle C^*-algebre (un mix di analisi funzionale e algebra), e si giunge alla geometria non commutativa, utilissima in molti campi, dalla geometria alla fisica, alla teoria dei numeri...

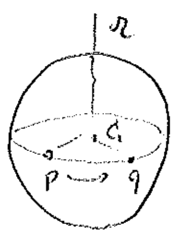
☆ La sfera S^2 come spazio omogeneo: un primo esempio.

$$S^2 \approx SO(3)/SO(2)$$

Perché? Si consideri l'azione naturale di $SO(3)$ su S^2.

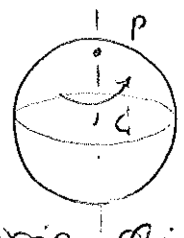


Due punti qualsiasi su S^2 possono essere connessi da $g \in SO(3)$ [l'azione è transitiva]; basta considerare la rotazione nel piano Cpq di asse r (v. figura) che manda p in q.



Tra l'altro, per il teorema di Eulero, ogni g in $SO(3)$ si ottiene in questo modo.

Ora, quali sono le trasformazioni che fissano un punto di S^2 (gruppo di isotropia)?



Sono precisamente le rotazioni attorno all'asse individuato da p, una copia di $SO(2)$, da cui la conclusione. Si osservi che $SO(2)$ è chiuso in $SO(3)$.

Di fatto, il teorema della varietà quoziente ci permetterà di dotare G/H, G Lie, H chiuso ($\Rightarrow$ Lie) in G, di una struttura di varietà differenziabile. Nell'esempio ora discusso, si ritrova la struttura liscia di S^2.