Sistemi
Primo Parziale , 02/05/2019
Versione A, tempo a disposizione: 2h

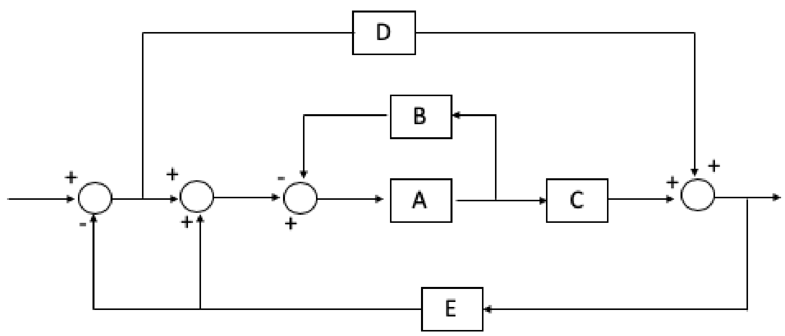
Esercizio 1
Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + (3+k)u(t)$$
$$\begin{cases} \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = 2e^{4t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

$t \in R_+, k \in R$
I) Si discuta la stabilitá asintotica e la stabilitá BIBO al variare di $k \in R$.

Con k = -5
II) Calcolare l'evoluzione libera
III) Determinare la risposta impulsiva h(t) nel dominio del tempo, senza utilizzare la trasformata di Laplace.
IV) Determinare la risposta forzata come anti trasformata di Laplace.
V) Calcolare la riposta totale del sistema.

Esercizio 2
Si consideri il seguente schema a blocchi:
I) Semplificare lo schema trovando la funzione di trasferimento tra ingresso



e uscita

II) Ponendo $A = s^3 - s$, $B = \frac{2}{3s^2-3}$, $C = \frac{1}{s+1}$, $D = 1$ ed $E = ks$, discutere per quali valori di k il sistema risulta asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Dimostrare che l'anti-trasformata di Laplace di $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ é uguale a $cos(\omega t)$.

Sistemi
Primo Parziale , 02/05/2019
Versione B, tempo a disposizione: 2h

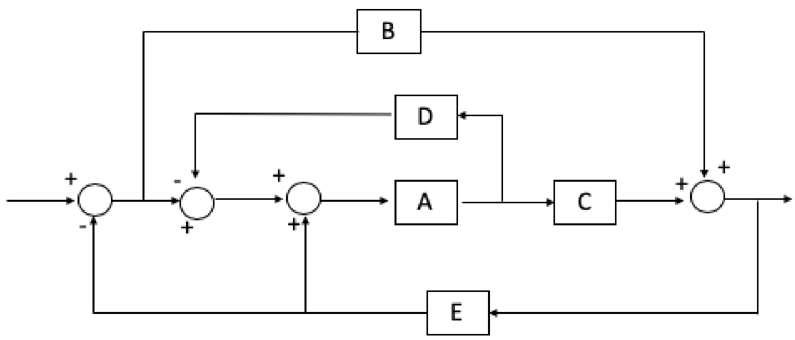
Esercizio 1
Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + (3+k)u(t)$$
$$\begin{cases} \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = 3e^{5t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

$t \in R_+, k \in R$
I) Si discuta la stabilitá asintotica e la stabilitá BIBO al variare di $k \in R$.

Con k = -7
II) Calcolare l'evoluzione libera
III) Determinare la risposta impulsiva h(t) nel dominio del tempo, senza utilizzare la trasformata di Laplace.
IV) Determinare la risposta forzata come anti trasformata di Laplace.
V) Calcolare la riposta totale del sistema.

Esercizio 2
Si consideri il seguente schema a blocchi:
I) Semplificare lo schema trovando la funzione di trasferimento tra ingresso



e uscita

II) Ponendo $A = s^3 - s$, $B = 1$, $C = \frac{1}{s+1}$, $D = \frac{2}{s^2-1}$ ed $E = ks$, discutere per quali valori di k il sistema risulta asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Dimostrare che l'anti-trasformata di Laplace di $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ é uguale a $sin(\omega t)$.

Sistemi
Primo Parziale , 02/05/2019
Versione C, tempo a disposizione: 2h

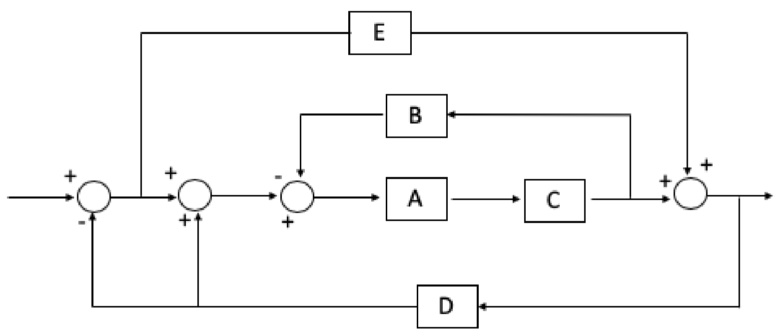
Esercizio 1
Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + (3+k)u(t)$$
$$\begin{cases} \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = 4e^{t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

$t \in R_{+}, k \in R$
I) Si discuta la stabilitá asintotica e la stabilitá BIBO al variare di $k \in R$.

Con k = -8
II) Calcolare l'evoluzione libera
III) Determinare la risposta impulsiva h(t) nel dominio del tempo, senza utilizzare la trasformata di Laplace.
IV) Determinare la risposta forzata come anti trasformata di Laplace.
V) Calcolare la riposta totale del sistema.

Esercizio 2
Si consideri il seguente schema a blocchi:
I) Semplificare lo schema trovando la funzione di trasferimento tra ingresso



e uscita

II) Ponendo $A = (s^2 - 1)(s + 1)$, $B = \frac{1}{s^2-1}$, $C = \frac{s}{s+1}$, $D = ks$ ed $E = 1$, discutere per quali valori di k il sistema risulta asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Sapendo che $cos(\theta) = cosh(j\theta)$.

Dimostrare che l'anti-trasformata di Laplace di $\dfrac{s}{s^2 - \omega^2}$ é uguale a $cosh(\omega t)$.

Opzionale: Dimostrare che $cos(\theta) = cosh(j\theta)$,

Correzione

Esercizio 1
L'evoluzione libera si trova risolvendo l'equazione differenziale, risolvo l'equazione caratteristica :
$s^2 - 5s + 6 = 0$
le radici sono $s_1 = 3$ e $s_2 = 2$
Sono entrambe positive, quindi non é asintoticamente stabile.
Per la BIBO stabilitá, avendo il parametro k nella parte relativa agli ingressi, l'unica possibilitá per ottenerla é quella di semplificare i poli che mi causano l'instabilitá. Ma essendo entrambi i poli positivi, anche se riuscissi a semplificarli otterrei 1 al denominatore. Quindi per ogni k il sistema non sará mai BIBO stabile.

La risposta libera é : $v_l(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$
$v_l(t) = e^{2t}$

VERSIONE A:

$$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) - 2u(t)$$

Punto III

$h(t) = d_0\delta(t) + (d_1 e^{3t} + d_2 e^{2t})\delta_{-1}(t)$
n = m = 2 , il sistema é proprio , quindi compare il termine d_0.

$\frac{d}{dt}h(t) = d_0\frac{d}{dt}\delta(t) + (3d_1e^{3t} + 2d_2e^{2t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{3t} + d_2e^{2t})\delta(t)$

$\frac{d^2}{dt}h(t) = d_0\frac{d^2}{dt}\delta(t) + (9d_1e^{3t} + 4d_2e^{2t})\delta_{-1}(t) + 2(3d_1e^{3t} + 2d_2e^{2t})\delta(t) + (d_1e^{3t} + d_2e^{2t})\frac{d}{dt}\delta(t)$

Sostituisco il tutto nella equazione differenziale iniziale, dove al posto di v(t) scrivo h(t) , e al posto di u(t) scrivo $\delta(t)$

$$\frac{d^2}{d^2t}h(t) - 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = \frac{d^2}{d^2t}\delta(t) + \frac{d}{dt}\delta(t) - 2\delta(t)$$

Per semplicitá ho giá rimosso l'esponenziale :

$$\begin{cases} \delta_{-1}(t)[9d_1 + 4d_2 - 15d_1 - 10d_2 + 6d_1 + 6d_2] = 0 \\ \delta(t)[6d_1 + 4d_2 - 5d_1 - 5d_2 + 6d_0 + 2] = 0 \\ \frac{d}{dt}\delta(t)[d_1 + d_2 - 5d_0 - 1] = 0 \\ \frac{d^2}{dt}\delta(t)[d_0 - 1] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \\ d_2 = 7 \end{cases}$$

$h(t) = \delta(t) + (-1e^{3t} + 7e^{2t})\delta_{-1}(t)$

Punto IV

l'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si trova moltiplicando la FdT per la trasformata di Laplace dell'ingresso $V_{\mathrm{f}}(s) = H(s)U(s)$

$V_{\mathrm{f}}(s) = \frac{s^2+s-2}{(s-2)(s-3)}U(s)$

$LT\,[u(t)] = \frac{2}{s-4}$

$V_{\mathrm{f}}(s) = \frac{s^2+s-2}{(s-2)(s-3)}(\frac{2}{s-4}) = \frac{2s^2+2s-4}{(s-2)(s-3)(s-4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-4}$

$A = 4$ $\qquad$ $B = -20$ $\qquad$ $C = 18$

Applico l'antitrasformata $LT[*]^{-1}$ e ottengo :

$v_{\mathrm{f}}(t) = (Ae^{2t} + B^{3t} + Ce^{4t})\delta_{-1}(t)$

VERSIONE B:

$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) - 4u(t)$

Punto III

Calcoli delle derivate uguali alla Versione A.
Sostituisco il tutto nella equazione differenziale iniziale, dove al posto di v(t) scrivo h(t) , e al posto di u(t) scrivo $\delta(t)$

$$\frac{d^2}{d^2t}h(t) - 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = \frac{d^2}{d^2t}\delta(t) + 3\frac{d}{dt}\delta(t) - 4\delta(t)$$

Per semplicitá ho giá rimosso l'esponenziale: (da notare che il gradino si semplifica, in ogni versione)

$$\begin{cases} \delta(t)[d_1 - d_2 + 6d_0 + 4] = 0 \\ \frac{d}{dt}\delta(t)[d_1 + d_2 - 5d_0 - 3] = 0 \\ \frac{d^2}{dt}\delta(t)[d_0 - 1] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \\ d_2 = 9 \end{cases}$$

$h(t) = \delta(t) + (-1e^{3t} + 9e^{2t})\delta_{-1}(t)$

Punto IV

l'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si trova moltiplicando la FdT per la trasformata di Laplace dell'ingresso $V_f(s) = H(s)U(s)$

$V_f(s) = \frac{s^2+3s-4}{(s-2)(s-3)}U(s)$

$LT\left[u(t)\right] = \frac{3}{s-5}$

$V_f(s) = \frac{s^2+3s-4}{(s-2)(s-3)}(\frac{3}{s-5}) = \frac{3s^2+9s-12}{(s-2)(s-3)(s-5)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-5}$

$A = 6$ $\qquad$ $B = -21$ $\qquad$ $C = 18$

Applico l'antitrasformata $LT[*]^{-1}$ e ottengo :

$v_f(t) = (Ae^{2t} + B^{3t} + Ce^{5t})\delta_{-1}(t)$

VERSIONE C:

$\ddot{v}(t) - 5\dot{v}(t) + 6v(t) = \ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) - 5u(t)$

Punto III

Calcoli delle derivate uguali alla Versione A.

Sostituisco il tutto nella equazione differenziale iniziale, dove al posto di v(t) scrivo h(t) , e al posto di u(t) scrivo $\delta(t)$

$$\frac{d^2}{d^2t}h(t) - 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = \frac{d^2}{d^2t}\delta(t) + 4\frac{d}{dt}\delta(t) - 5\delta(t)$$

Per semplicitá ho giá rimosso l'esponenziale: (da notare che il gradino si semplifica, in ogni versione)

$$\begin{cases} \delta(t)[d_1 - d_2 + 6d_0 + 5] = 0 \\ \frac{d}{dt}\delta(t)[d_1 + d_2 - 5d_0 - 4] = 0 \\ \frac{d^2}{dt}\delta(t)[d_0 - 1] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = -1 \\ d_2 = 10 \end{cases}$$

$$h(t) = \delta(t) + (-1e^{3t} + 10e^{2t})\delta_{-1}(t)$$

Punto IV

l'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si trova moltiplicando la FdT per la trasformata di Laplace dell'ingresso $V_f(s) = H(s)U(s)$

$$V_f(s) = \frac{s^2+4s-5}{(s-2)(s-3)}U(s)$$

$$LT\,[u(t)] = \frac{4}{s-1}$$

$$V_f(s) = \frac{s^2+4s-5}{(s-2)(s-3)}\left(\frac{4}{s-1}\right) = \frac{4s^2+16s-20}{(s-2)(s-3)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-1}$$

$A = -28$ $\qquad$ $B = 32$ $\qquad$ $C = 0$

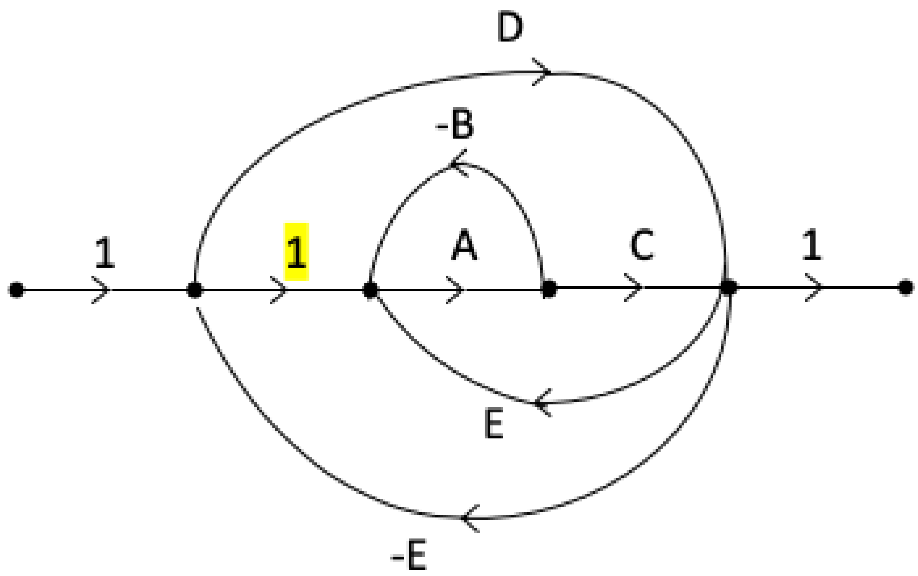
Applico l'antitrasformata $LT[*]^{-1}$ e ottengo :

$$v_f(t) = (Ae^{2t} + B^{3t} + Ce^{t})\delta_{-1}(t)$$

Punto V

In ogni versione del compito, bastava sommare nel tempo il risultato del punto IV e del punto II

Esercizio 2 : Versione A
Diagrammi di flusso



Cammini aperti:
$P_1 = AC$
$P_2 = D$

Anelli singoli:
$P_{11} = -AB$
$P_{21} = -ED$
$P_{31} = ACE$
$P_{41} = -ACE$

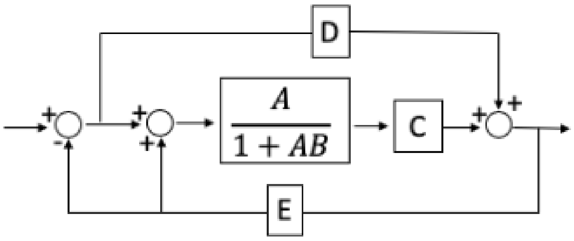
Coppie di anelli che non si toccano:
$P_{12} = (-AB)(-ED) = ABED$

Delta:
$\Delta = 1 - (-AB - ED - ACE + ACE) + ABED = 1 + AB + ED + ABED$
$\Delta_1 = 1 + \cancel{AB} + \cancel{ED} + \cancel{ABED}$
$\Delta_2 = 1 + AB + \cancel{ED} + \cancel{ABED}$

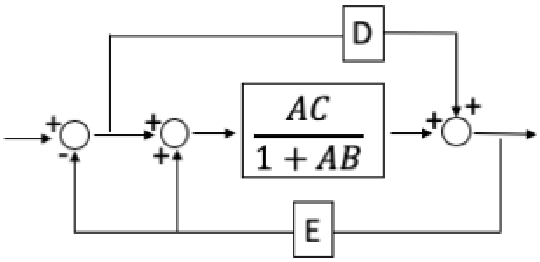
Trasmittanza totale:
$T = \frac{AC+D(1+AB)}{1+AB+ED+ABED}$

Punteggi - max 8 punti
Disegno corretto: 2
Cammini aperti: 1
Anelli: 1
Coppie di anelli che non si toccano: 1
Δ: 1
Δ_1, Δ_2: 1
Trasmittanza: 1
In caso di calcoli incompleti (es: dimenticanza di un anello, errore solo nel calcolo di Δ_2) è stato assegnato un punteggio di 0.5.

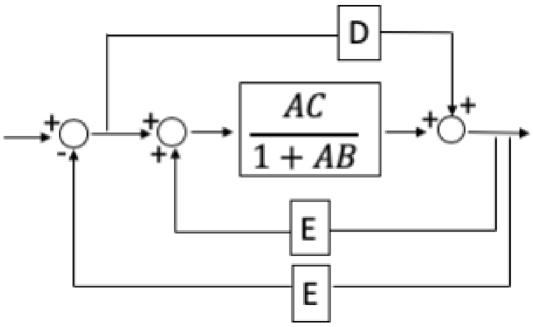
Schemi a blocchi



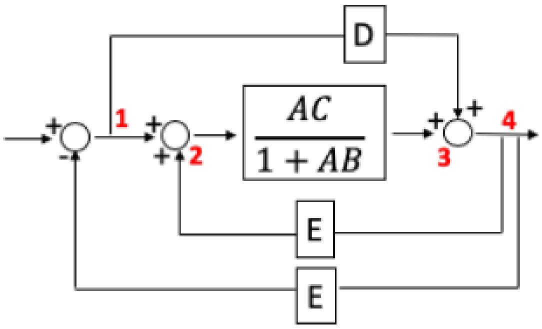
Retroazione negativa A e B

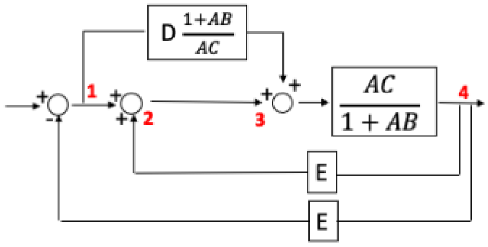


Serie con C

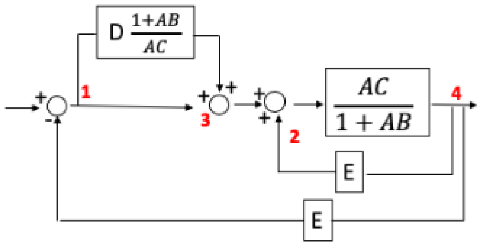


Scompongo E su due rami

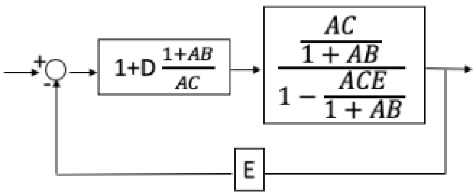




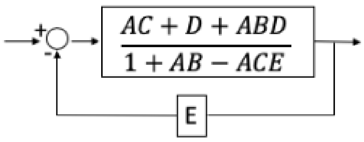
Porto il nodo 3 a monte del blocco ABC
(potevo anche portare il nodo 2 a valle di ABC)



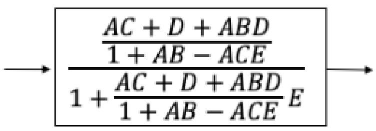
Inverto nodi 2 e 3



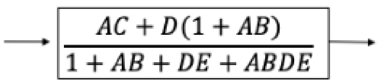
Risolvo il parallelo e la retroazione positiva



Risolvo la serie



Risolvo la retroazione negativa



Semplifico

Punteggi - max 8 punti
Errore più comune: inversione di un nodo sommatore con una diramazione. Un nodo o una diramazione possono essere spostati **a monte o a valle di un <u>blocco</u>**. Non è possibile invertire nodo e diramazione (cioè non è possibile invertire 1 - 2 o 3 - 4, nemmeno "compensando").

Se è stata effettuata un'inversione di nodo-diramazione ma tutto il resto era corretto, è stato assegnato un punteggio di 5 punti (su un massimo di 8). Se sono stati fatti altri errori (es: errore nel segno della retroazione) sono stati tolti punti a partire da 5.

Stabilitá asintotica $A = s^3 - s$, $B = \frac{2}{3s^2-3}$, $C = \frac{1}{s+1}$, $D = 1$, $E = ks$
Sostituisco nella funzione di trasferimento:

$$T = \frac{(s^3-s)\frac{1}{s+1} + 1(1+(s^3-s)\frac{2}{3s^2-3})}{1+(s^3-s)\frac{2}{3s^2-3} + ks + (s^3-s)\frac{2}{3s^2-3}ks}$$

$$T = \frac{s(s-1)(s+1)\frac{1}{s+1} + 1(1+s(s-1)(s+1)\frac{2}{3(s-1)(s+1)})}{1+s(s-1)(s+1)\frac{2}{3(s-1)(s+1)} + ks + s(s-1)(s+1)\frac{2}{3(s-1)(s+1)}ks}$$

$$T = \frac{s(s-1)\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{s+1}} + 1(1+s\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}\frac{2}{3\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}})}{1+s\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}\frac{2}{3\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}} + ks + s\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}\frac{2}{3\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}}ks}$$

$$T = \frac{s^2 - s + 1 + \frac{2s}{3}}{1 + \frac{2s}{3} + ks + \frac{2s}{3}ks}$$

$$T = \frac{3s^2 - s + 3}{2ks^2 + s(2+3k) + 3}$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile, la parte reale dei poli del sistema (cioè le radici del denominatore) devono essere minori di zero. Dato che il denominatore di T è un polinomio di secondo grado, questo è vero quando valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

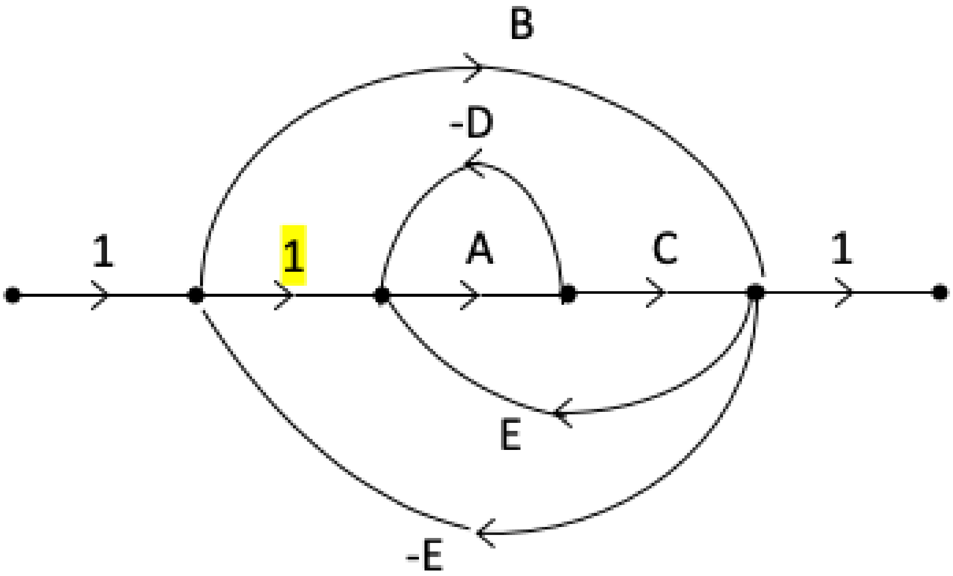
$$\begin{cases} -\frac{2+3k}{2k} < 0 \\ \frac{1}{2k} > 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova che la regione di asintotica stabilità si ha per $k > 0$.

In alternativa, era possibile calcolare le due radici del denominatore in funzione di k e studiare per quali valori di k esse risultavano entrambe negative.

Punteggi - max 2 punti
Se l'esercizio è stato svolto correttamente, ma con errori di calcolo, sono stati assegnati 1.5 punti. E' stato assegnato 1 punto a chi, pur non svolgendo i conti, ha scritto correttamente e completamente quale condizione bisognava imporre per verificare l'asintotica stabilità (vedi soluzione dell'esercizio per risposta completa).

Esercizio 2: Versione B
Diagrammi di flusso



Cammini aperti:
$P_1 = AC$
$P_2 = B$

Anelli singoli:
$P_{11} = -AD$
$P_{21} = -BE$
$P_{31} = ACE$
$P_{41} = -ACE$

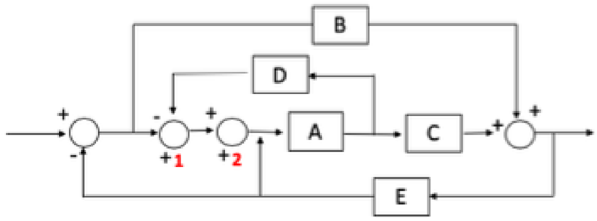
Coppie di anelli che non si toccano:
$P_{12} = (-AD)(-BE) = ABED$

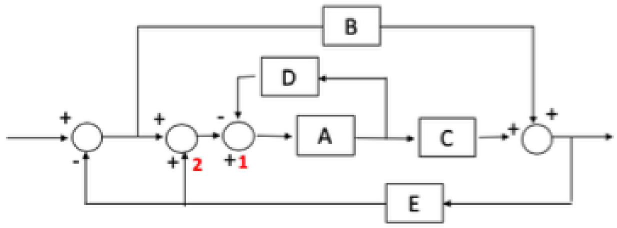
Delta:
$\Delta = 1 - (-AD - BE - ACE + ACE) + ABED = 1 + AD + BE + ABED$
$\Delta_1 = 1 + \cancel{AD} + \cancel{BE} + \cancel{ABED}$
$\Delta_2 = 1 + AD + \cancel{BE} + \cancel{ABED}$

Trasmittanza totale:
$T = \frac{AC+B(1+AD)}{1+AD+BE+ABED}$

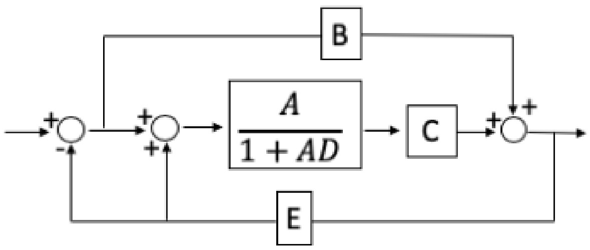
Punteggi - max 8 punti
Disegno corretto: 2
Cammini aperti: 1
Anelli: 1
Coppie di anelli che non si toccano: 1
Δ: 1
Δ_1, Δ_2: 1
Trasmittanza: 1
In caso di calcoli incompleti (es: dimenticanza di un anello, errore solo nel calcolo di Δ_2) è stato assegnato un punteggio di 0.5.

Schemi a blocchi

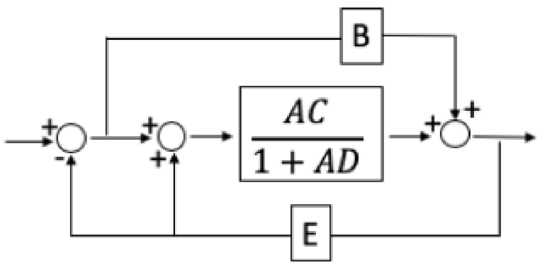




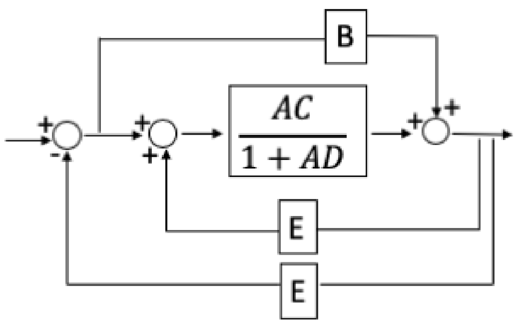
Inverto nodi 1 e 2



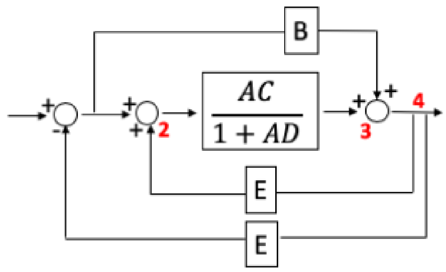
Retroazione negativa A e D

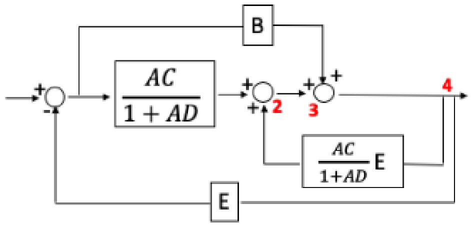


Serie con C

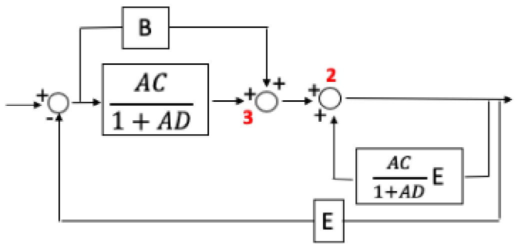


Scompongo E su due rami





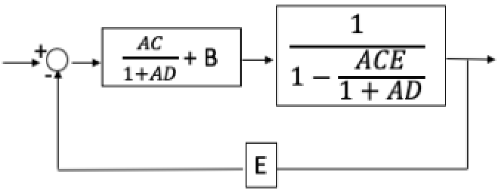
Porto il nodo 2 a valle del blocco ACD
(potevo anche portare il nodo 3 a monte di ACD)



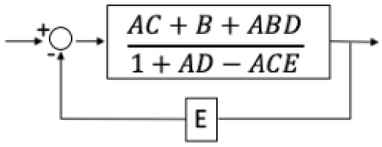
Inverto i nodi 2 e 3

Punteggi - max 8 punti
Errore più comune: inversione di un nodo sommatore con una diramazione. Un nodo o una diramazione possono essere spostati **a monte o a valle di un <u>blocco</u>**. Non è possibile invertire nodo e diramazione (cioè non è possibile invertire 1 - 2 o 3 - 4, nemmeno "compensando").

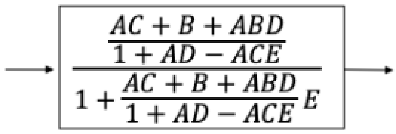
Se è stata effettuata un'inversione di nodo-diramazione ma tutto il resto era corretto, è stato assegnato un punteggio di 5 punti (su un massimo di 8). Se sono stati fatti altri errori (es: errore nel segno della retroazione) sono stati tolti punti a partire da 5.



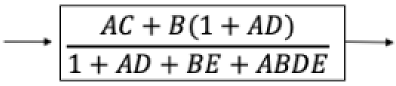
Risolvo il parallelo e la retroazione positiva



Risolvo la serie



Risolvo la retroazione negativa



Semplifico

Stabilità asintotica $A = s^3 - s$, $B = 1$, $C = \frac{1}{s+1}$, $D = \frac{2}{s^2-1}$ ed $E = ks$
Sostituisco nella funzione di trasferimento:

$$T = \frac{(s^3-s)\frac{1}{s+1} + 1(1+(s^3-s)\frac{2}{s^2-1})}{1+(s^3-s)\frac{2}{s^2-1} + ks + (s^3-s)\frac{2}{s^2-1}ks}$$

$$T = \frac{s(s-1)(s+1)\frac{1}{s+1} + 1(1+s(s-1)(s+1)\frac{2}{(s-1)(s+1)})}{1+s(s-1)(s+1)\frac{2}{(s-1)(s+1)} + ks + s(s-1)(s+1)\frac{2}{(s-1)(s+1)}ks}$$

$$T = \frac{s(s-1)\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{s+1}} + 1(1+s\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}\frac{2}{\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}})}{1+s\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}\frac{2}{\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}} + ks + s\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}\frac{2}{\cancel{(s-1)}\cancel{(s+1)}}ks}$$

$$T = \frac{s^2 - s + 1 + 2s}{1 + 2s + ks + 2ks^2}$$

$$T = \frac{s^2 + s + 1}{1 + (2+k)s + 2ks^2}$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile, la parte reale dei poli del sistema (cioè le radici del denominatore) devono essere minori di zero. Dato che il denominatore di T è un polinomio di secondo grado, questo è vero quando valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{2+k}{2k} < 0 \\ \frac{1}{2k} > 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova che la regione di asintotica stabilità si ha per $k > 0$.

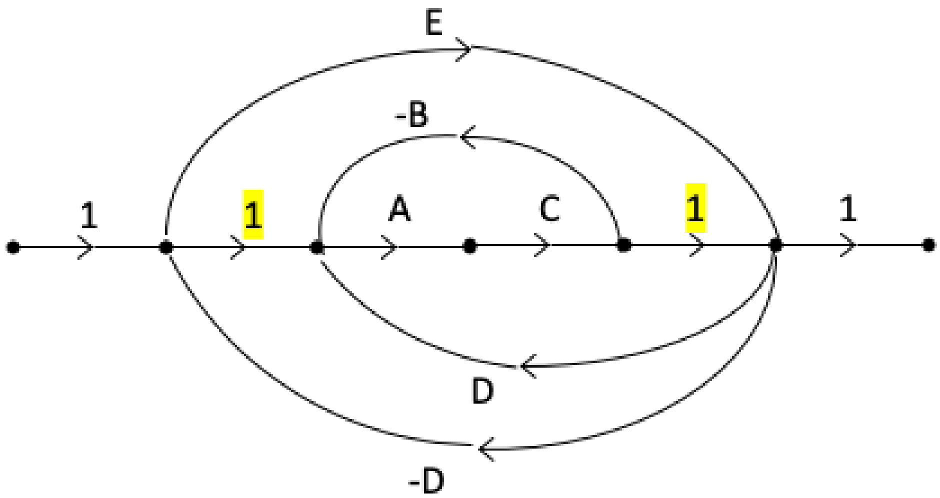
In alternativa, era possibile calcolare le due radici del denominatore in funzione di k e studiare per quali valori di k esse risultavano entrambe negative.

Punteggi - max 2 punti

Se l'esercizio è stato svolto correttamente, ma con errori di calcolo, sono stati assegnati 1.5 punti. E' stato assegnato 1 punto a chi, pur non svolgendo i conti, ha scritto correttamente e completamente quale condizione bisognava imporre per verificare l'asintotica stabilità (vedi soluzione dell'esercizio per risposta completa).

Esercizio 2: Versione C

Diagrammi di flusso Cammini aperti:



$P_1 = AC$
$P_2 = E$

Anelli singoli:
$P_{11} = -ABC$
$P_{21} = -ED$
$P_{31} = ACD$
$P_{41} = -ACD$

Coppie di anelli che non si toccano:
$P_{12} = (-ABC)(-ED) = ABCED$

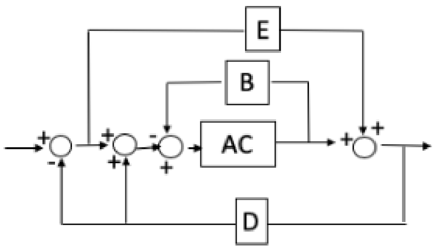
Delta:
$\Delta = 1 - (-ABC - ED - ACD + ACD) + ABCED = 1 + ABC + ED + ABCED$
$\Delta_1 = 1 + \cancel{ABC} + \cancel{ED} + \cancel{ABCED}$
$\Delta_2 = 1 + ABC + \cancel{ED} + \cancel{ABCED}$

Trasmittanza totale:
$T = \frac{AC+E(1+ABC)}{1+ABC+ED+ABCED}$

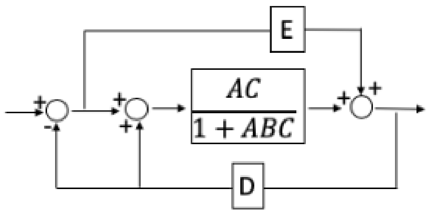
Punteggi - max 8 punti
Disegno corretto: 2

Cammini aperti: 1
Anelli: 1
Coppie di anelli che non si toccano: 1
Δ: 1
Δ_1, Δ_2: 1
Trasmittanza: 1
In caso di calcoli incompleti (es: dimenticanza di un anello, errore solo nel calcolo di Δ_2) è stato assegnato un punteggio di 0.5.

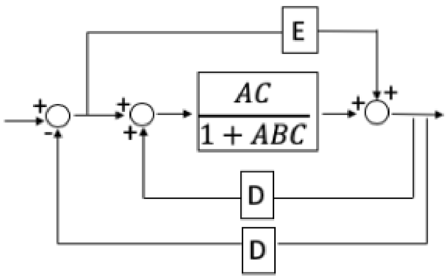
Schemi a blocchi



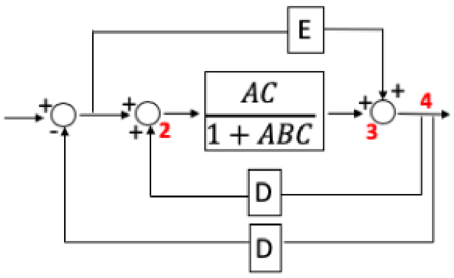
Serie A e C

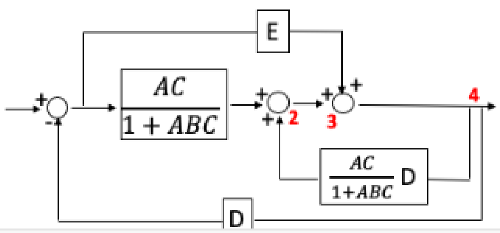


Retroazione negativa ABC

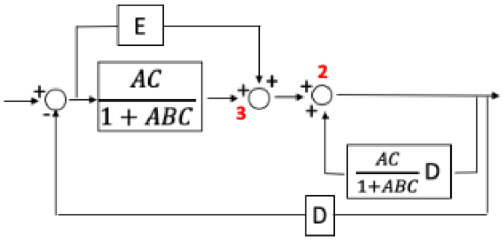


Scompongo D su due rami

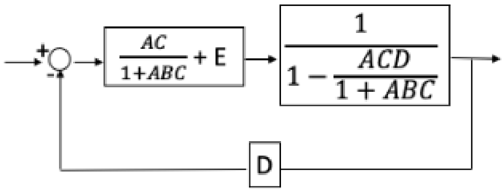




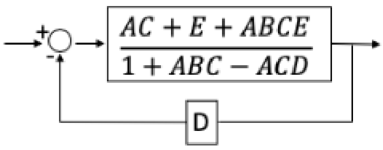
Porto il nodo 2 a valle del blocco ABC (potevo anche portare il nodo 3 a monte di ABC)



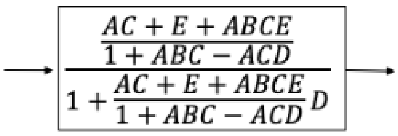
Inverto i nodi 2 e 3



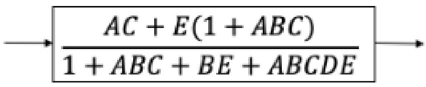
Risolvo il parallelo e la retroazione positiva



Risolvo la serie



Retroazione negativa



Semplifico

Punteggi - max 8 punti
Errore più comune: inversione di un nodo sommatore con una diramazione. Un nodo o una diramazione possono essere spostati **a monte o a valle di un <u>blocco</u>**. Non è possibile invertire nodo e diramazione (cioè non è possibile invertire 1 - 2 o 3 - 4, nemmeno "compensando").

Se è stata effettuata un'inversione di nodo-diramazione ma tutto il resto era corretto, è stato assegnato un punteggio di 5 punti (su un massimo di 8). Se sono stati fatti altri errori (es: errore nel segno della retroazione) sono stati tolti punti a partire da 5.

Stabilità asintotica $A = (s^2-1)(s+1)$, $B = \frac{1}{s^2-1}$, $C = \frac{s}{s+1}$, $D = ks$ ed $E = 1$

Sostituisco nella funzione di trasferimento:

$$T = \frac{(s^2-1)(s+1)\frac{s}{s+1} + 1(1 + (s^2-1)(s+1)\frac{1}{s^2-1}\frac{s}{s+1})}{1 + (s^2-1)(s+1)\frac{1}{s^2-1}\frac{s}{s+1} + ks + (s^2-1)(s+1)\frac{1}{s^2-1}\frac{s}{s+1}ks}$$

$$T = \frac{(s^2-1)\cancel{(s+1)}\frac{s}{\cancel{s+1}} + 1(1 + \cancel{(s^2-1)}\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{s^2-1}}\frac{s}{\cancel{s+1}})}{1 + \cancel{(s^2-1)}\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{s^2-1}}\frac{s}{\cancel{s+1}} + ks + \cancel{(s^2-1)}\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{s^2-1}}\frac{s}{\cancel{s+1}}ks}$$

$$T = \frac{s(s^2-1) + 1 + s}{1 + s + ks + ks^2}$$

$$T = \frac{s^3 + 1}{1 + (1+k)s + ks^2}$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile, la parte reale dei poli del sistema (cioè le radici del denominatore) devono essere minori di zero. Dato che il denominatore di T è un polinomio di secondo grado, questo è vero quando valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1+k}{k} < 0 \\ \frac{1}{k} > 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova che la regione di asintotica stabilità si ha per $k > 0$.

In alternativa, era possibile calcolare le due radici del denominatore in funzione di k e studiare per quali valori di k esse risultavano entrambe negative.

Punteggi - max 2 punti

Se l'esercizio è stato svolto correttamente, ma con errori di calcolo, sono stati assegnati 1.5 punti. E' stato assegnato 1 punto a chi, pur non svolgendo i conti, ha scritto correttamente e completamente quale condizione bisognava imporre per verificare l'asintotica stabilità (vedi soluzione dell'esercizio per risposta completa).