Università degli Studi di Verona
CL in Matematica Applicata
Algebra

Anno Accademico 2016-2017

Foglio di Esercizi n°5 - 9/11/2016

(Da consegnare il giorno 16/11/2016)

Esercizio 1

Dato un dominio d'integrità R, costruiamo il *campo delle frazioni* $Q(R)$ di R: sul prodotto cartesiano $R \times S$ con $S = R \setminus \{0\}$ consideriamo la relazione di equivalenza

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \text{se} \quad at = sb.$$

Scriviamo $\frac{a}{s}$ per la classe di equivalenza di (a, s) rispetto a $\sim$ e poniamo

$$Q = Q(R) = \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S\}$$

1) (*3 punti*) Dimostrare che le seguenti operazioni su Q sono ben definite:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

2) (*2 punti*) "Convincersi" (verificando due assiomi a scelta, a titolo di esempio) che $(Q, +, \cdot)$ è un campo con $0 = \frac{0}{1}$ e $1 = \frac{1}{1}$.

3) (*3 punti*) Dimostrare che l'applicazione $\varphi : R \to Q$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ è un monomorfismo e che per ogni monomorfismo $\psi : R \to K$ in un campo K esiste uno e un solo monomorfismo $\tilde{\psi} : Q \to K$ tale che $\tilde{\psi}\,\varphi = \psi$.

4) (*3 punti*) Dato un campo K, determinare $Q(K[x])$.

Esercizio 2

Nel campo complesso $\mathbb{C}$ consideriamo l'elemento $u = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.

2) (*3 punti*) Determinare il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$. Quante sono le radici reali di f?

3) (*3 punti*) Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

4) (*3 punti*) Determinare una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Esercizio 3

Sia p un numero primo. Per ogni polinomio a in $\mathbb{Z}[x]$, denotiamo con $\bar{a}$ la sua riduzione modulo p. Fissiamo un polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$ e sia

$$\varphi : \mathbb{Z}[x] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]/(\bar{f}), \quad a \mapsto \bar{a} + (\bar{f})$$

la composizione dell'omomorfismo di riduzione modulo p con la proiezione sul quoziente modulo $(\bar{f})$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che $\operatorname{Ker} \varphi = (p, f)$.

2) (*1 punto*) Dedurre che esiste un isomorfismo di anelli $\mathbb{Z}[x]/(p, f) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]/(\bar{f})$.

3) (*3 punti*) Determinare tutti i polinomi $g \in \mathbb{Z}[x]$ tale che (p, g) sia un ideale massimale di $\mathbb{Z}[x]$.