EX 1 Data $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$

a) studiarne la concavità/convessità e calcolare gli eventuali max/min liberi

b) definire una funzione convessa

c) enunciare le condizioni sufficienti sulla forma quadratica che garantiscono la stretta convessità della funzione

Ris

$A = \mathbb{R}^2$

$f \in C^\infty(A)$

$f_x(x,y) = 2x$ $\qquad$ $f_y(x,y) = 2y - 2$

$f_{xx}(x,y) = 2$ $\qquad$ $f_{yy}(x,y) = 2$ $\qquad$ $f_{xy}(x,y) = 0$

$$H_{xy}(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_1 = 2 = a_{11} > 0$

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 = \det H(x,y) > 0$

$\Rightarrow H(x,y)$ è definita positiva

$\Rightarrow f(x,y)$ è strettamente crescente

Ricordo che se f è strettamente convessa e differenziabile in A aperto e convesso $\Rightarrow f$ ha al più un punto critico che, se $\exists$, è di minimo assoluto

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

punto critico $(0,1)$ è punto di minimo assoluto

Def. $f: S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, S convesso
f si dice convessa in S se $\forall x', x'' \in S$, $\forall \lambda \in (0,1)$ si ha
$f(\lambda x' + (1-\lambda) x'') \leq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'')$.

Teorema $f \in C^2(A)$, A aperto convesso
se $H_x(\lambda) > 0$ $\forall x \in A \Rightarrow f$ è strettamente convessa.

EX 1 fila B G4