

Compito di Logica 2 (m)

Esercizio 1: Specificare l'ambito di ciascuna occorrenza di connettivo nelle seguenti

1.1 $P \wedge \neg Q \leftrightarrow P \rightarrow P \vee Q$

1.2 $(P \vee Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow P \wedge Q)$

Esercizio 2: Dimostrare le seguenti ricorrendo solo alle dieci regole primitive e alla definizione del bicondizionale:

2.1 $P, \neg P \vdash \neg Q$

2.2 $\vdash \neg(Q \wedge (P \wedge Q \leftrightarrow \neg P))$

2.3 $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$

Esercizio 3: Offrire le tavole di verità delle seguenti:

3.1 $(P \wedge Q) \vee P \rightarrow Q$

3.2 $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg Q$

Esercizio 4: Il valore di P è V, quello di Q è F, e quello di R è V. Determinare il valore di verità di $(P \wedge \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg P) \vee Q$

Esercizio 5: Dimostrare per induzione sulle fbf che in tutte le fbf del linguaggio della logica enunciativa occorre almeno una lettera enunciativa.

Esercizio 6: Presentate lo schema generale della dimostrazione del metateorema di coerenza.

Esercizio 7: Tradurre le seguenti nella notazione della logica predicativa (usando le lettere predicative ' F ' e ' G ', ' T ' e il nome ' m ')

7.1 Nessun francese è sia greco sia irlandese.

7.2 Qualche indiano non è greco.

7.3 Nessun francese è invidioso, tranne i guasconi.

7.4 Se Menelao è felice, allora tutti i greci lo invidiano.

In questo esercizio è utile esplicitare alcune delle parentesi lasciate convenzionalmente inespresse; ad es. scrivere $(P \wedge Q) \rightarrow P$ al posto di $P \wedge Q \rightarrow P$.

Soluzioni (possibili)

1.1 L'ambito (dell'unica occorrenza) di $\wedge$ è $P \wedge \neg Q$; l'ambito di ' $\neg$ ' è $\neg Q$, l'ambito di $\leftrightarrow$ è l'intera fbf; l'ambito di $\rightarrow$ è $P \rightarrow P \vee Q$; l'ambito di $\vee$ è $P \vee Q$.

1.2 L'ambito di $\vee$ è $P \vee Q$, l'ambito della prima occorrenza di $\wedge$ è l'intera fbf, l'ambito di $\neg$ è $\neg(P \leftrightarrow P \wedge Q)$, l'ambito di $\leftrightarrow$ è $P \leftrightarrow P \wedge Q$; l'ambito della seconda occorrenza di $\wedge$ è $P \wedge Q$.

2.1 $P, \neg P \vdash \neg Q$

1	(1)	P	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	Q	A
1, 2	(4)	$P \wedge \neg P$	1, 2 I $\wedge$
1, 2, 3	(5)	$(P \wedge \neg P) \wedge Q$	3, 4 I $\wedge$
1, 2, 3	(6)	$P \wedge \neg P$	5 E $\wedge$
1, 2	(7)	$\neg Q$	3, 6 RAA

2.2 $\vdash \neg(Q \wedge (P \wedge Q \leftrightarrow \neg P))$

1	(1)	$Q \wedge (P \wedge Q \leftrightarrow \neg P)$	A
1	(2)	Q	1 E $\wedge$
1	(3)	$P \wedge Q \leftrightarrow \neg P$	1 E $\wedge$
1	(4)	$(P \wedge Q \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P \wedge Q)$	3 Def. $\leftrightarrow$
1	(5)	$P \wedge Q \rightarrow \neg P$	4 E $\wedge$
6	(6)	$P \wedge Q$	A
6	(7)	P	6 E $\wedge$
1, 6	(8)	$\neg P$	5, 6 MPP
1, 6	(9)	$P \wedge \neg P$	7, 8 I $\wedge$
1	(10)	$\neg(P \wedge Q)$	6, 9 RAA
1	(11)	$\neg P \rightarrow P \wedge Q$	4 E $\wedge$
1	(12)	$\neg \neg P$	10, 11 MTT
1	(13)	P	12 DN
1	(14)	$P \wedge Q$	2, 13 I $\wedge$
1	(15)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	10, 14 I $\wedge$
	(16)	$\neg(Q \wedge (P \wedge Q \leftrightarrow \neg P))$	1, 15 RAA

2.3 $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$

1	(1)	$P \leftrightarrow \neg P$	A
1	(2)	$(P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P)$	1 Def. $\leftrightarrow$
1	(3)	$P \rightarrow \neg P$	2 E $\wedge$

*La prima
assunzione di
entrambe le
derivazioni che
seguono è
introdotta in vista
di un'applicazione
di RAA all'ultimo
passo.*

4	(4)	P	A
1, 4	(5)	$\neg P$	3, 4 MPP
1, 4	(6)	$P \wedge \neg P$	4, 5 I $\wedge$
1	(7)	$\neg P$	4, 6 RAA
1	(8)	$\neg P \rightarrow P$	2 E $\wedge$
1	(9)	P	7, 8 MPP
1	(10)	$P \wedge \neg P$	7, 9 I $\wedge$
	(11)	$\neg(P \leftrightarrow \neg P)$	1, 10 RAA

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\vee$	$(P \rightarrow Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\leftrightarrow$	$\neg Q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

P	Q	R	$(P \wedge \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg P) \vee Q$	
V	F	V	V	V
			V	F
			F	F
			F	F
			F	F

La fbf è falsa.

5. Proviamo per induzione sulle fbf che in ogni fbf occorre almeno una lettera enunciativa. (a) Consideriamo una qualunque lettera enunciativa A. In A ovviamente occorre una lettera enunciativa, ossia A stessa. (b) Ora assumiamo che in ciascuna delle fbf A e B occorra almeno una lettera enunciativa, e mostriamo che anche in $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ occorre almeno una lettera enunciativa. In tutti i casi la dimostrazione è ovvia perché in $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ ecc. occorrono almeno tante lettere enunciative quante ne occorrono in A, e dunque almeno una. (c) Per il principio di induzione per il linguaggio, concludiamo che in tutte le fbf occorre almeno una lettera enunciativa. *Q.D.E.*

6. Innanzitutto si dimostra per induzione sulle sequenze che tutte le sequenze derivabili sono tautologiche. Si deve dimostrare che (a) tutte le sequenze $A \vdash A$ sono tautologiche e (b) che (i) se le sequenze $X \vdash A \rightarrow B$ e $Y \vdash A$ sono tautologiche allora $X, Y \vdash B$ è tautologica (MPP); (ii) se le sequenze $X \vdash A \rightarrow B$ e $Y \vdash \neg B$ sono tautologiche allora $X, Y \vdash \neg A$ è tautologica (MTT), e così via per tutte le regole del calcolo. Una volta dimostrato questo, si è anche dimostrato che i teoremi (ossia le sequenze con un insieme vuoto di premesse) sono sequenze tautologiche. Ma una sequenza tautologica con un insieme vuoto di premesse è una tautologia. Poiché nessuna tautologia è una contraddizione, si conclude che nessun teorema è una contraddizione, ossia che il calcolo è coerente. *Q.D.E.*

7.1 $(x)(Fx \rightarrow -(Gx \wedge Ix))$ [oppure: $-(\exists x)(Fx \wedge Gx \wedge Ix)$]¹

7.2 $(\exists x)(Ix \wedge -Gx)$

7.3 $(x)((Fx \wedge -Gx) \rightarrow -Ix)$ [oppure: $-(\exists x)(Fx \wedge -Gx \wedge Ix)$]

7.4 $Fm \rightarrow (x)(Gx \rightarrow Ixm)$

¹Qui e in seguito, alcune parentesi sono state omesse per facilitare la lettura.