

DEF. Una matrice A si dice **TRIDIAGONALE** se è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & b_{m-1} & a_m \end{pmatrix}$$

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

DEF. La matrice A si dice **TRIDIAGONALE A BLOCCHI** se è tridiagonale con ogni elemento a_i, b_i, c_i matrice.

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} a_1 & & \\ 1 & 2 & \\ 3 & 4 & \end{smallmatrix}} & \boxed{\begin{smallmatrix} c_1 & & \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \end{smallmatrix}} \\ \boxed{\begin{smallmatrix} b_1 & & \\ a & b & \\ c & d & \\ e & f & \end{smallmatrix}} & \boxed{\begin{smallmatrix} a_2 & & \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{C_1} & \boxed{0} \\ \boxed{B_1} & \boxed{A_2} & \boxed{C_2} \\ \boxed{0} & \boxed{B_2} & \boxed{A_3} \end{pmatrix}$$

con $A_1, \dots, C_2$ matrici

TEOREMA
[YOUNG-VARGA]

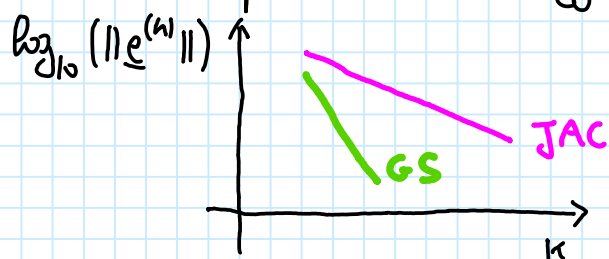
Sia A una matrice tridiagonale a blocchi con A_i quadrati, diagonali e non singolari. Allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel verificano le condizioni

$$\rho(E_S) = [\rho(E_J)]^2$$

dove E_S è la matrice di iterazione di Gauss-Seidel e E_J quella di Jacobi.

La relazione data dice che

- (*) i due metodi, JAC e GS, sono entrambi convergenti o entrambi divergenti per la classe di matrici in questione;
- (*) se convergono entrambi, allora Gauss-Seidel è più veloce perché ha raggio spettrale minore:



OSS. In generale, NON c'è alcun legame tra la convergenza di Jacobi e Gauss-Seidel. Questo significa che, per una data A ,

- possono convergere entrambi ed essere più veloce l'uno o l'altro
- può convergere uno solo
- possono NON convergere entrambi.

ESEMPIO Consideriamo $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Dire se Jacobi e Gauss-Seidel convergono e, in caso affermativo per entrambi, stabilire, se possibile, il più veloce.

A è diag. dom. in senso stretto perché, guardando le righe ad esempio, ho

$$\left. \begin{array}{l} |3| > |0| + |1| \\ |3| > |0| + |1| \\ |3| > |1| + |1| \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \text{ riga} \\ 2^a \text{ riga} \\ 3^a \text{ riga} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{JAC e GS} \\ \text{convergono alla} \\ \text{soluzione di } Ax = b \end{array}$$

La matrice è tridiagonale e blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 3 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

A_1 C_1
 B_1 A_2

I blocchi A_1 e A_2 sono
 DIAGONALI e NON SINGOLARI.
 Allora posso applicare il teorema
 visto per concludere che
 $\rho(E_S) = [\rho(E_J)]^2$

per cui è più veloce Gauss-Seidel.

(b) Calcolare le matrici di Jacobi e di Seidel ed i loro raggi spettrali.

$$E_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Trovo gli autovalori:

$$P_{E_J}(\lambda) = |E_J - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{9} + \frac{\lambda}{9} = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{2}{9} \right)$$

Gli autovalori sono

$$P_{E_J}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{2}{9} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Quindi

$$\rho(E_J) = \max \left(|0|, \left| -\frac{\sqrt{2}}{3} \right|, \left| \frac{\sqrt{2}}{3} \right| \right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Vediamo la matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

$$E_S = -(L+D)^{-1}U =$$

$$= - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/9 \end{pmatrix}$$

de cui gli autovalori (IMMEDIATI!) sono $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -2/9$ e quindi $\rho(E_S) = \frac{2}{9}$.

(c) Calcolare il numero di iterazioni per avere

$$\|e^{(n)}\| < 10^{-16} \|e^{(0)}\|$$

col metodo di Jacobi.

Ricordarsi che $\frac{\|e^{(n)}\|}{\|e^{(0)}\|} \approx [\rho(E_J)]^n$ da cui

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n < 10^{-16} \Rightarrow n > \frac{\log_{10}(10^{-16})}{\log_{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} \approx 48.9$$

$\log_{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) < 0$

Servono circa 50 iterazioni (GS avrebbe bisogno delle metà!).

CRITERI DI ARRESTO DI UN METODO ITERATIVO

Considero $Ax = b$ e e iterazione associata

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = E x^{(n)} + g \\ x^{(0)} \text{ dato} \end{cases}$$

Ci sono molti criteri per arrestare le iterazioni. Ne vediamo alcuni per farci un'idea.

- (•) criteri sul residuo alle iterate $\underline{x}^{(n)}$ che è definito come

$$\underline{r}^{(n)} = \underline{b} - A \underline{x}^{(n)}$$

Dato un $\epsilon > 0$ e piccolo, le iterazioni si arrestano quando

$$(\diamond) \quad \|\underline{r}^{(n)}\| < \epsilon$$

BASATO SUL RESIDUO ASSOLUTO

oppure

$$(\diamond) \quad \frac{\|\underline{r}^{(n)}\|}{\|\underline{b}\|} < \epsilon$$

BASATO SUL RESIDUO RELATIVO

L'idea di questi criteri nasce dal fatto che se

$$\underline{x}^{(n)} \rightarrow \underline{x} \quad \Rightarrow \quad A \underline{x}^{(n)} \rightarrow \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{r}^{(n)} = \underline{b} - A \underline{x}^{(n)} \rightarrow \underline{0}$$

per cui se $\underline{r}^{(n)}$ è piccolo riteniamo (e ragione?) che $\underline{x}^{(n)} \approx \underline{x}$ e quindi il metodo più arrestasi.

- (•) Criterio basato sullo scarto.

Dato un $\epsilon > 0$ piccolo, il metodo si arresta quando

$$(\diamond) \quad \|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\| < \epsilon \quad \begin{matrix} \text{SCARTO} \\ \text{(ASSOLUTO)} \end{matrix}$$

o

$$(\diamond) \quad \frac{\|\underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)}\|}{\|\underline{x}^{(n)}\|} < \epsilon \quad \begin{matrix} \text{SCARTO} \\ \text{RELATIVO} \end{matrix}$$

Anche questo criterio ha dei limiti di applicabilità.

NORME DI MATRICI

DEF. La funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$ è una NORMA DI MATRICE se

$$(i) \quad \|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(ii) \quad \|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(iii) \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(iv) \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

N.B. Posso estendere la definizione a matrici non quadrate o a elementi in $\mathbb{C}$.

DEF. La norma di matrice $\|\cdot\|$ si dice NATURALE se $\|I_n\| = 1$.

DEF. La norma di matrice $\|\cdot\|$ si dice COMPATIBILE con la norma di vettore $\|\cdot\|_r$ se

$$\|A \cdot x\|_r \leq \|A\| \cdot \|x\|_r \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

↑
norma di vettore
↑
norma di matrice
↑
norma di vettore

PROP. Sia $\|\cdot\|_r$ una norma di vettore. La funzione $p : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$ definita che

$$p(A) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_r = 1}} \|Ax\|_r$$

è una norma di matrice compatibile con la norma di vettore $\|\cdot\|_r$.

DEF. Si chiama NORMA MATRICIALE INDOTTA la

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_r=1}} \|Ax\|_r$$

PROP. Sia $\|\cdot\|$ una norma matriciale indotta. Allora si hanno

(i) $\|I_n\| = 1$ ($\|\cdot\|$ è naturale)

(ii) $\rho(A) \leq \|A\|$

Dim. Per (i) ho

$$\|I_n\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|I_n x\|}{\|x\|} = 1$$

(Annotazioni: $I_n x = x$, $\|x\| = 1 \forall x$)

Considero (ii). Ho

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| \geq \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|\lambda_i x\| = \max \left(|\lambda_i| \cdot \|x\| \right) = \\ &= \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i| = \rho(A). \end{aligned}$$

(Annotazioni: x autovettore di A , $\|x\|=1$)

PROP Valgono le seguenti relazioni

(a) La norma di vettore

$$\|x\|_1 = \sum_{h=1}^n |x_h|$$

è associata la norma indotta di matrice

$$\|A\|_1 = \sup \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n |a_{i1}|}_{\text{colonna 1}}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^n |a_{in}|}_{\text{colonna n}} \right)$$

NORMA 1

(b) La norma di matrice indotta delle norme di vettore

$$\|x\|_\infty = \max_{h=1, \dots, n} (|x_h|) \text{ e'}$$

$$\|A\|_\infty = \sup \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n |a_{1j}|}_{\text{riga 1}}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n |a_{mj}|}_{\text{riga n}} \right)$$

NORMA INFINITO

(c) La norma di matrice indotta delle norme di vettore

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \text{ e'}$$

$$\|A\|_2 = \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda(AA^T)} = \sqrt{\lambda(A^TA)}$$

NORMA EUCLIDEA o NORMA 2

ESEMPIO Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max(|1|+|6|, |-2|+|3|) = 7$$

$$\|A\|_\infty = \max(|1|+|-2|, |6|+|3|) = 9$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

per cui è $\rho(AA^T) = 45$ e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^T)} = \sqrt{45}$$

Notare che le tre norme sono diverse ma dello stesso ordine di grandezza.

DEF. Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Si chiama norma di FROBENIUS di A la norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}$$

In pratica $\|A\|_F$ è come la norma Euclidea di vettore che ha come componenti gli elementi di A .

Si prova che $\|I_m\| = \sqrt{m}$ per cui non è metrizzabile.

Inoltre, si prova che $\|\cdot\|_F$ NON è indotta da alcuna norma di vettore.

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DI UNA MATRICE

DEF. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si chiama NUMERO DI CONDIZIONAMENTO di A il numero reale $\kappa(A)$ dato da

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

per ogni matrice invertibile A con $\|\cdot\|$ una norma invariante.

Se A non è invertibile, si pone, per convenzione,

$$\kappa(A) = +\infty.$$

PROP. È $\kappa(I_n) = 1$

Dim. $\kappa(I_n) = \|I_n\| \cdot \|I_n^{-1}\| = 1.$
 "1"
 perché è una
 norma invariante

PROP. È $\kappa(A) \geq 1.$

Dim.

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I_n\| = 1.$$

ESEMPIO Quanto vale $\kappa(A)$ per

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix} \text{ usando la norma 2.}$$

