# Modelli I/0
# Sistemi LTI a tempo continuo

Andrea Roberti
andrea.roberti@univr.it

11 aprile 2019

***Esercizio 1.1***
**Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale**

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t) \\ \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases} \tag{1}$$

**I) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica**
**II) Si determini la stabilitá asintotica e BIBO del sistema**
**III) Si determini l'evoluzione libera del sistema e l'evoluzione forzata**

---

L'evoluzione libera si trova risolvendo l'equazione differenziale, risolvo l'equazione caratteristica :
$s^2 + 3s + 2 = 0$
le radici sono $s_1$ = -1 e $s_2$ = -2
Noto che hanno entrambe $Re(\lambda) < 0$ quindi posso dire che il sistema *Asintoticamente Stabile*. Ricorda inoltre che la stabilitá asintotica implica la *BIBO stabilitá*.

$v_l(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

La risposta libera é : $v_l(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$

la risposta impulsiva del sistema :
$h(t) = d_0\delta(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)$
m = 0 , n = 2 , quindi il sistema é strettamente proprio e il termine $d_0$ é 0 .

$\frac{d}{dt}h(t) = (-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\delta(t)$

$\frac{d^2}{dt}h(t) = (d_1e^{-t} + 4d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t) + 2(-d_1e^{-t} - 2d_2e^{-2t})\delta(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-2t})\frac{d}{dt}\delta(t)$

Sostituisco il tutto nella equazione differenziale iniziale, dove al posto di v(t) scrivo h(t) , e al posto di u(t) scrivo $\delta(t)$

$$\frac{d^2}{dt}h(t) + 3\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t) = \frac{1}{3}\delta(t)$$

$[(d_1e^{-t}+4d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)+2(-d_1e^{-t}-2d_2e^{-2t})\delta(t)+(d_1e^{-t}+d_2e^{-2t})\frac{d}{dt}\delta(t)]+3[(-d_1e^{-t}-2d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)+(d_1e^{-t}+d_2e^{-2t})\delta(t)]+2[(d_1e^{-t}+d_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)]=\frac{1}{3}\delta(t)$

$$\begin{cases}\delta_{-1}(t)[(d_1e^{-t}+4d_2e^{-2t})+3(-d_1e^{-t}-2d_2e^{-2t})+2(d_1e^{-t}+d_2e^{-2t})]=0\\ \delta(t)[2(-d_1e^{-t}-2d_2e^{-2t})+3(d_1e^{-t}+d_2e^{-2t})-\frac{1}{3}]=0\\ \frac{d}{dt}\delta(t)[(d_1e^{-t}+d_2e^{-2t})]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2d_1-4d_2+3d_1+3d_2-\frac{1}{3}=0\\ d_1+d_2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}d_1=\frac{1}{6}\\ d_2=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

la risposta impulsiva é : $h(t)=\frac{1}{6}(e^{-t}-e^{-2t})\delta_{-1}(t)$

Per calcolare l'evoluzione forzata , posso usare l'integrale di convoluzione:

$v_{\mathrm{f}}(t)=\frac{1}{6}\int_{0^-}^{t}(e^{-\tau}-e^{-2\tau})(e^{-2(t-\tau)})d\tau$

$v_{\mathrm{f}}(t)=\frac{1}{6}e^{-2t}\int_{0^-}^{t}(e^{\tau}-e^{0})d\tau$

$v_{\mathrm{f}}(t)=\frac{1}{6}e^{-2t}(e^{t}-1-t)$

$v(t)=v_{\mathrm{l}}(t)+v_{\mathrm{f}}(t)$

***Esercizio 1.2***

**Testo esercizio precedente. Calcolare la risposta impulsiva e l'evoluzione forzata utilizzando la Trasformata di Laplace**

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t) \\ \dot{v}(0) = 2 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases} \tag{2}$$

---

Per trovare la risposta impulsiva del dominio delle frequenze, calcolo la trasformata di Laplace con *condizioni iniziali nulle* .
Ricorda: l'evoluzione libera dipende dalle C.I. , l'evoluzione forzata no!

$LT\ [\ddot{v}(t)] = s^2V(s)$

$LT\ [3\dot{v}(t)] = 3sV(s)$

$LT\ [2v(t)] = 2V(s)$

$LT\ [\frac{1}{3}u(t)] = \frac{1}{3}U(s)$

Ricorda che la funzione di Trasferimento (FdT) $H(s) =\ LT\ [h(t)]$

$(s^2 + 3s + 2)V(s) = \frac{1}{3}U(s)$

l'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si trova moltiplicando la FdT per la trasformata di Laplace dell'ingresso $V_{\mathrm{f}}(s) = H(s)U(s)$

$V_{\mathrm{f}}(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2+3s+2}U(s) = \frac{1}{3}(\frac{1}{(s+1)(s+2)})U(s)$

$LT\ [u(t)] = \frac{1}{s+2}$

$V_{\mathrm{f}}(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2+3s+2}U(s) = \frac{1}{3}(\frac{1}{(s+1)(s+2)})(\frac{1}{s+2}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{(s+1)(s+2)^2})$

Scomposizione in fratti semplici

$V_{\mathrm{f}}(s) = \frac{1}{3}(\frac{C_{1,1}}{s+1} + \frac{C_{2,1}}{s+2} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2})$

$C_{1,1} = (s+1)\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}|_{\mathrm{s}=-1} = 1$

$C_{2,1} = \frac{d}{ds}((s+2)^2 \frac{1}{(s+1)(s+2)^2})|_{\mathrm{s=-2}} = -1$

$C_{2,2} = (s+2)^2 \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}|_{\mathrm{s=-2}} = -1$

$V_{\mathrm{f}}(s) = \frac{1}{3}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2})$

Applico l'antitrasformata $LT[*]^{-1}$ e ottengo :

$v_{\mathrm{f}}(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})$

$v_{\mathrm{f}}(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}(e^{t} - 1 - t)$

***Esercizio 1.3***
**Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale**

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + \dot{v}(t) - 2v(t) = \dot{u}(t) + u(t) \\ \dot{v}(0) = 0 \\ v(0) = 2 \\ u(t) = e^{-3t}\delta_{-1}(t) \end{cases} \tag{3}$$

**I) Si determini la stabilitá asintotica e BIBO del sistema**
**II) Si determini la risposta del sistema tramite Laplace**

---

I)

$s^2 + s - 2 = 0$ quindi $s_1 = 1; s_2 = -2$
Il sistema non é asintoticamente stabile. Perché $s_1$ ha $Re(\lambda) > 0$.

Per vedere immediatamente la BIBO stabilitá posso controllare la Funzione di trasferimento. Ricorda che é la Trasformata di Laplace della risposta impulsiva!

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

Devo controllare i poli (-2,1) , non ho cancellazioni col numeratore e quindi il sistema non é BIBO stabile.

*Esempio - Piccola precisazione*
Se avessi avuto $H(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+2)}$, avrei potuto semplificare la mia Fdt in $H(s) = \frac{1}{(s+2)}$. Quindi di conseguenza un solo POLO (negativo) con $Re(s) < 0$ e il sistema sarebbe stato BIBO Stabile !

II)
Trasformata di Laplace dell'equazione differenziale.

$[s^2V(s) - 2s] + [sV(s) - 2] - 2V(s) = sU(s) + U(s)$

$(s^2 + s - 2)V(s) - 2s - 2 = (s + 1)U(s)$

$V(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}U(s) + \frac{2s+2}{(s-1)(s+2)}$

$U(s) = LT[e^{-3t}\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s+3}$

$V(s) = \frac{2s^2+9s+7}{(s+2)(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$

Scomposizione in fratti semplici.

$A = 1; B = \frac{3}{2}; C = -\frac{1}{2}$

$V(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{\frac{3}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+3}$

$V(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2}(\frac{1}{s-1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{s+3})$

ANTI TRASFORMATA :

$v(t) = (e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-3t})\delta_{-1}(t)$

***Esercizio 1.4***
**Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale**

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) - \dot{v}(t) - 2v(t) = \ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + u(t) \\ \dot{v}(0) = -1 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = e^{-3t}\delta_{-1}(t) \end{cases} \tag{4}$$

**I) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica**
**II) Si determini la stabilitá asintotica e BIBO del sistema**
**III) Si determini l'evoluzione libera del sistema nel dominio del tempo**
**IV) Si determini la risposta impulsiva del sistema nel dominio del tempo**
**V) Si determini l'evoluzione forzata del sistema nel dominio delle frequenze (Laplace)**

---

I)

$s^2 - s - 2 = 0$ quindi $s_1 = 2; s_2 = -1$

II)

Il sistema non é asintoticamente stabile. Perché $s_1$ ha $Re(\lambda) > 0$.
Per la BIBO stabilitá posso risolverla con il punto IV , quindi nel dominio del tempo, oppure con il punto V quando trovo la Funzione di Trasferimento H(s).

III)

$v_l(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

La risposta libera é : $v_l(t) = e^{-t}$

IV)

la risposta impulsiva del sistema :

$h(t) = d_0\delta(t) + (d_1e^{2t} + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t)$
n = m = 2 , il sistema é proprio , quindi compare il termine $d_0$.

$\frac{d}{dt}h(t) = d_0\frac{d}{dt}\delta(t) + (2d_1e^{2t} - d_2e^{-t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{2t} + d_2e^{-t})\delta(t)$

$\frac{d^2}{dt}h(t) = d_0\frac{d^2}{dt}\delta(t) + (4d_1e^{2t} + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t) + 2(2d_1e^{2t} - d_2e^{-t})\delta(t) + (d_1e^{2t} + d_2e^{-t})\frac{d}{dt}\delta(t)$

Sostituisco il tutto nella equazione differenziale iniziale, dove al posto di v(t) scrivo h(t) , e al posto di u(t) scrivo $\delta(t)$

$$\frac{d^2}{dt}h(t) - \frac{d}{dt}h(t) - 2h(t) = \frac{d^2}{dt}\delta(t) + 2\frac{d}{dt}\delta(t) + \delta(t)$$

Per semplicitá ho giá rimosso l'esponenziale :

$$\begin{cases} \delta_{-1}(t)[4d_1 + d_2 - (2d_1 - d_2) - 2(d_1 + d_2)] = 0 \\ \delta(t)[4d_1 - 2d_2 - (d_1 + d_2) - 2d_0 - 1] = 0 \\ \frac{d}{dt}\delta(t)[(d_1 + d_2) - d_0 - 2] = 0 \\ \frac{d^2}{dt}\delta(t)[d_0 - 1] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3d_1 - 3d_2 - 2d_0 - 1 = 0 \\ d_1 + d_2 - d_0 - 2 = 0 \\ d_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = 2 \\ d_2 = 1 \end{cases}$$

$h(t) = \delta(t) + (2e^{2t} + e^{-t})\delta_{-1}(t)$

Il sistema non é BIBO stabile , perché i coefficienti hanno $Re(\lambda) > 0$. *(pag.54 Segnali e Sistemi,4a edizione).*
Posso trovare la risposta impulsiva nel tempo anche facendo l'antitrasformata dalla Funzione di trasferimento H(s).

V)

Ricorda che la funzione di Trasferimento (FdT) $H(s) = \ LT\ [h(t)]$

L'evoluzione forzata nel dominio delle frequenze si trova moltiplicando la FdT per la trasformata di Laplace dell'ingresso $V_{\mathrm{f}}(s) = H(s)U(s)$

$(s^2 - s - 2)V(s) = (s^2 + 2s + 1)U(s)$

$H(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2-s-2} = \frac{s^2+2s+1}{(s-2)(s+1)}$

I poli del sistema semplificato sono $s = 2$, il sistema non é BIBO stabile. Posso decidere di risolvere i fratti semplici di H(s) cosi come é e dopo fare l'antitrasformata. Oppure semplificare e fare l'antitrasformata di H(s) .

Senza semplificazione :

$H(s) = 1 + \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$
ho il termine $b_{\mathrm{n}}$ perché il sistema *proprio* (n=m=2) . Ed é il coefficiente di $b_2 = 1$

$A = \frac{s^2+2s+1}{s+1}|_{\mathrm{s}=2} = 3$

$B = \frac{s^2+2s+1}{s-2}|_{\mathrm{s}=-1} = 0$

$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2} + \frac{0}{s+1}$

$h(t) = LT^{-1}[H(s)] = \delta(t) + 3e^{2t}$

Possiamo notare che h(t) calcolata in questo modo é diversa dalla h(t) calcolata precedentemente. Questo perché $\delta(t)$ e derivate varie sono linearmente indipendenti , e quindi le soluzioni trovate sono combinazioni lineari . (vedi *algebra lineare o analisi 2).* Es: provate a sostituire nel sistema precedente $d_0 = 1, d_1 = 3, d_2 = 0$
Oppure si puó dire che l'antitrasformata di Laplace di una funzione razionale V(s) che porta ad un segnale v(t) che é espresso come somma di una combinazione lineare di esponenziali complessi e di una combinazione lineare di segnali impulsivi. Se V(s) é strettamente propria non compaiono termini impulsivi.
*(pag.85 Segnali e Sistemi, 4a edizione).*

$U(s) = \frac{1}{s+3}$

$V_{\mathrm{f}}(s) = (\frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)})(\frac{1}{s+3}) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}$

$V_\mathrm{f}(s) = \frac{9}{15}(\frac{1}{s-2}) - 0(\frac{1}{s+1}) + \frac{2}{5}(\frac{1}{s+3})$

H(s) semplificata :

$H(s) = \frac{s+1}{(s-2)}$

fratti semplici : $1 + \frac{A}{(s-2)}$ 1 sempre perché il sistema é proprio

$A = (s-2)[\frac{s+1}{(s-2)}]|_{\mathrm{s=2}} = 3$

$H(s) = 1 + 3\frac{1}{(s-2)}$ Antitrasformata $h(t) = \delta(t) + 3e^{2t}$

Avrei potuto risolvere anche risolvere singolarmente le antitrasformate :

1) $LT^{-1}[\frac{s}{s-2}] = \delta(t) + 2e^{2t}$ Ricorda che $LT^{-1}$ di s é 1 = impulso

2) $LT^{-1}[\frac{1}{s-2}] = e^{2t}$

Quindi antitrasformata complessiva, é la somma tra (1) e (2).
Conviene lo stesso fare i fratti semplici per evitare di sbagliare le antitrasformate dirette.

***Esercizio 1.5***
**Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale**

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + 3\dot{v}(t) + 2v(t) = \dot{u}(t) + 3u(t) \\ \dot{v}(0) = 0 \\ v(0) = 1 \\ u(t) = e^{-4t}\delta_{-1}(t) \end{cases} \tag{5}$$

**I) Si determini la risposta complessiva del sistema nel dominio delle frequenze (Laplace)**

---

$(s^2 + 3s + 2)V(s) - s - 3 = (s + 3)U(s)$

$V(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}U(s) + \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

$U(s) = \frac{1}{s+4}$

$V(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}(\frac{1}{s+4}) + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

$V(s) = \frac{(s^2+8s+15)}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$

$A = \frac{(s^2+8s+15)}{(s+2)(s+4)}|_{\mathrm{s}=-1} = \frac{8}{3}$

$B = \frac{(s^2+8s+15)}{(s+1)(s+4)}|_{\mathrm{s}=-2} = -\frac{3}{2}$

$C = \frac{(s^2+8s+15)}{(s+1)(s+2)}|_{\mathrm{s}=-4} = -\frac{1}{6}$

$V(s) = \frac{8}{3}(\frac{1}{s+1}) - \frac{3}{2}(\frac{1}{s+2}) - \frac{1}{6}(\frac{1}{s+4})$