Foglio 2

Da consegnare Giovedi 17 ottobre all'inizio della lezione.

Esercizio 1 (Punti 5)**.** Si disegnino nel piano cartesiano i punti z_1, z_2, z_3 corrispondenti alle soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 8i = 0.$$

e calcolare l'area della figura di vertici z_1, z_2, z_3.

Esercizio 2 (Punti 4)**.** Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - (i+1)z^2 + (1+4i)z - 1 - 3i = 0.$$

Esercizio 3 (Punti 4)**.** Si consideri l'equazione $z^n = 1$ e siano $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ le sue soluzioni. Si dimostri che

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 0$$

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Si dimostri che per ogni $n \geq 1$, il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine n è una matrice triangolare superiore di ordine n. (Sugg: si proceda per induzione)

Esercizio 5 (Punti 5)**.** Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_3 + i\,x_4 = -i \\ x_1 - x_2 + (1-i)\,x_3 + i\,x_4 = 0 \\ 2\,x_2 - x_3 = 1 \\ (2+i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 = 1 \\ i\,x_1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6 (Punti 6)**.** Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette un'unica soluzione e per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

$$\begin{cases} x_1 - 2\alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 - x_2 = 0 \\ x_2 + \alpha x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - \alpha x_4 = \alpha \end{cases}$$