Università degli Studi di Verona Anno Accademico 2016-2017
CL in Matematica Applicata
Algebra

Foglio di Esercizi n°8 - 7/12/2016

(Da consegnare il giorno 14/12/2016)

Notazione Al solito, se K è un campo denotiamo con $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica.

Esercizio 1

Siano $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ e $\alpha = \sqrt[4]{2}$.

1) (*3 punti*) Dimostrare che $K \subset F$ è un'estensione di Galois.

2) (*3 punti*) Determinare tutti gli elementi di Gal(F/K). In particolare, dimostrare che esistono $\sigma, \tau \in$ Gal(F/K) tali che $\sigma(i) = i$, $\sigma(\alpha) = i\alpha$ e $\tau(\alpha) = \alpha$, $\tau(i) = -i$.

3) (*3 punti*) Verificare che Gal(F/K) è isomorfo a D_4.

4) (*3 punti*) Trovare i campi intermedi di $K \subset F$. [*Suggerimento: trovare i campi fissi dei sottogruppi di* Gal(F/K).]

Esercizio 2

(*10 punti*) Sia $K \subset F$ un'estensione algebrica di campi. Siano $\alpha \in L$ ed f il polinomio minimo di α su K. Dimostrare che per ogni omomorfismo $\sigma : K \to \overline{K}$, il polinomio $\sigma(f)$ è separabile su $\sigma(K)$ se e solo se f è separabile su K.

Esercizio 3

Sia L un campo finito con p^n elementi, dove p è un numero primo. Ricordiamo che il gruppo degli automorfismi di L è ciclico di ordine n.

1) (*5 punti*) Sia K un sottocampo di L. Dimostrare che esiste un divisore d di n tale che $|K| = p^d$.

2) (*5 punti*) Sia m un divisore di n. Dimostrare che L possiede esattamente un sottocampo con p^m elementi.