Calcolo Numerico per Informatica - Tempo: 2 ore

MAT.	COGNOME	NOME

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Barrare la casella con la miglior risposta. Ogni risposta corretta vale 1 punto, errata o non data 0 punti.

1. Consideriamo i numeri reali $x_1 = 0$, $x_2 = 1.2 \cdot 10^3$, $x_3 = -1.1 \cdot 10^2$, $x_4 = 0.844 \cdot 10^{-3}$, $x_5 = 0.01$. Quali tra i numeri dati NON appartengono al sistema floating point $\mathbb{F}(10, 2, -4, 3)$?

   ☐ $x_1,\ x_3$ ☐ x_2, x_4 ☐ x_3, x_5 ☐ x_5 ☐ x_1, x_5

2. La radice $\xi = 2$ dell'equazione $x^2 - 4 = 0$ viene approssimata con il metodo di bisezione partendo dall'intervallo $[a_0,\ b_0] = [1,\ 7]$. Ricordando che $x_k = (a_k + b_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, l'errore $e_2 = \xi - x_2$ della seconda iterata x_2 è pari a

   ☐ $-\dfrac{1}{4}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{5}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{7}{4}$

3. La funzione $f(x) = (\ 2e^x + 3x\ )^2$ ha una radice negativa ξ. Volendo approssimare ξ col metodo di Newton, ci si aspetta che il suo ordine di convergenza sia pari a

   ☐ 1 ☐ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ☐ 2 ☐ 3 ☐ non determinabile perché non è nota ξ

4. Ricordando che per una matrice quadrata di ordine n è $||\, A\, ||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, il numero di condizionamento usando la norma infinito, $K_\infty(A)$, della matrice A data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   è pari a ☐ -3 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

5. Sia A una matrice di ordine n, bidiagonale con $a_{ii} = 1$ e $a_{i,i-1} = \alpha \neq 0$ (tutti gli altri elementi sono nulli). Il numero minimo di operazioni richieste per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è

   ☐ n^2 ☐ $\dfrac{2n^3}{3}$ ☐ $2n - 2$ ☐ $2n$ ☐ n

6. Determinare, se converge, il punto fisso $\mathbf{x}$ dell'iterazione $\mathbf{x}^{(k+1)} = E\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ con

$$E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

   ☐ $[0\ -1]^T$ ☐ $[0\ 0]^T$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{13}{5} \end{bmatrix}^T$ ☐ il metodo non converge

7. Siano

$$L_i^{(2)}(x) = \frac{\prod_{r=0, r\neq i}^{2}(x - x_r)}{\prod_{r=0, r\neq i}^{2}(x_i - x_r)}, \quad i = 0, 1, 2$$

   i tre polinomi di Lagrange associati ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Allora il polinomio P definito dall'espressione

$$P(x) = L_2^{(2)}(x) + \sum_{i=0}^{2} L_i^{(2)}(x)$$

   è uguale a

   ☐ $2 - x^2$ ☐ $\dfrac{x^2 + x + 2}{2}$ ☐ $1 - x^2$ ☐ $\dfrac{x^2 - x + 2}{2}$ ☐ $x^2 - x$

8. Supponiamo di conoscere la tabella alle differenza divise associata ai nodi x_i, $i = 0, \ldots, n$ con i valori $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Aggiungendo un ulteriore nodo x_{n+1} ed il corrispondente valore $f(x_{n+1})$, quale è il numero minimo di operazioni aritmetiche ($+$, $-$, $*$, $/$) sono necessarie per costruire la nuova tabella associata ai nodi x_i, $i = 0, \ldots, n+1$ con i valori $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n+1$?

   ☐ n ☐ $3n+3$ ☐ $\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ ☐ $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ ☐ $\dfrac{3\cdot(n^2+n)}{2}$

9. Dati i vettori x ed y della stessa lunghezza, scrivere le TRE istruzioni Matlab per creare i grafici di y in funzione di x e di $z = e^x$ in funzione di x quest'ultimo usando la scala semilogaritmica per l'asse y:

   1. (grafico di y in funzione di x) ....
   2. (creare il vettore z) ....
   3. (grafico di z in funzione di x) ....

10. Scrivere le DUE istruzioni Matlab che creano la matrice A di 5 righe e 4 colonne che ha tutti gli elementi nulli tranne $a_{2,3} = 5$

    1. ....
    2. ....

11. Scrivere l'istruzione Matlab necessaria per definire una funzione di nome **pippo** che ha i tre ingressi $a1$, a_2 e a_3 e le due uscite b_1 e b_2

    1. ....

12. Indicare quanto vale b al termine del seguente codice Matlab:..

```
x = 1:3:12;
y = linspace( 2, 8, length(x) );
b = ones(2,1)*(y.^2);
```

DOMANDA TEORICA (2 punti)

Ricavare, illustrandola geometricamente, la formula che lega x_{k+1} a x_k per il metodo di Newton usato per approssimare la radice ξ di $f(x) = 0$. Indicare, anche graficamente, un caso in cui il metodo di Newton converge alla radice in modo monotono crescente ed un altro caso in cui converge in modo monotono decrescente. Riportare un valido criterio di arresto delle iterazioni nel caso in cui la derivata prima di f è diversa da zero in un intorno della radice ξ (ξ compreso).

Esercizi

Rispondere in modo sintetico ed esauriente nello spazio sottostante ciascun esercizio.

Esercizio 1 (6 punti) Si consideri l'iterazione di punto fisso

$$x_{k+1} = -\frac{x_k}{2} + \frac{3}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) $(0,5$ punti) Determinare il punto fisso ξ dell'iterazione.

(b) $(3,0$ punti) Preso $x_0 = 7$, calcolare x_1, x_2 e x_3 $(1,0$ punti). Dire, inoltre, se l'iterazione converge a ξ ed in che modo (monotona decrescente, monotona crescente, alternante) $(1,0$ punti). Illustrare anche graficamente il processo di convergenza $(1,0$ punti).

(c) $(2,5$ punti) Calcolare la costante asintotica dell'errore $(0,5$ punti) ed usarla per determinare il numero di iterazioni necessarie per avere $|e_k| < 10^{-6} \cdot |e_0|$ $(1,5$ punti). Riportare un grafico qualitativo di $\log_{10} |e_k|$ in funzione di k $(0,5$ punti).

Esercizio 2 (7 punti) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{che ha soluzione esatta } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $(0,5$ punti) Solo guardando la matrice A, dire perché i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti.

(b) $(1,5$ punti) Scrivere, componente per componente, le equazioni di aggiornamento dei metodi iterativi Jacobi e di Gauss-Seidel.

(c) $(2,0$ punti) Scrivere la matrice di iterazione di Jacobi $(1,0$ punti) e calcolarne di raggio spettrale ρ_J $(1,0$ punti).

(d) $(0,5$ punti) Senza calcolare la matrice di iterazione di Gauss-Seidel, determinare il raggio spetrale ρ_{GS} della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

(e) $(0,5$ punti) Indicare, nello STESSO grafico, l'andamento qualitativo delle norme degli errori $\log_{10}(\|\mathbf{e}_k\|)$ sia per Jacobi che per Gauss-Seidel.

(f) $(2,0$ punti) Scrivere la fattorizzazione LU della matrice A mostrando i vari passi fatti per ottenerla.

Esercizio 3 (5 punti) Si consideri il problema di calcolare numericamente l'integrale definito

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

utilizzando la formula dei trapezi e dei trapezi composta.

(a) (3,0 punti) Determinare $I_{T,C}^{(2)}$ (trapezi composta con 2 intervalli) e $I_{T,C}^{(4)}$ (trapezi composta con 4 intervalli) utilizzando, in tutti i casi, nodi equispaziati (2,0 punti). Utilizzare $I_{T,C}^{(2)}$ e $I_{T,C}^{(4)}$ per migliorare la stima dell'integrale (1,0 punti).

(b) (2,0 punti) Ricordando che l'errore che si commette applicando la formula dei trapezi composta con m intervalli per il calcolo dell'integrale definito

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è esprimibile come

$$E_{T,C}^{(m)} = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi)$$

dove ξ è un opportuno punto dell'intervallllo [a, b], calcolare il numero di intervalli m che assicura il calcolo di

$$I = \int_0^1 x^3 dx$$

con un valore assoluto dell'errore inferiore o uguale a 10^{-6} (ossia, $\left| E_{T,C}^{(m)} \right| \leq 10^{-6}$).