Prof. Lidia Angeleri, Dr. Jorge Vitória
Università di Verona, 2015/2016
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 9
12 gennaio 2016

1. Si consideri il gruppo $G = (S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, *)$, dove $(\sigma, \overline{a}) * (\gamma, \overline{b}) = (\sigma \circ \gamma, \overline{a} + \overline{b})$. Si consideri anche l'applicazione

$$\phi \colon \mathbb{Z} \longrightarrow S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \ \ \phi(n) = ((123)^n, n\overline{2}).$$

   (a) Si dimostri che ϕ è un omomorfismo di gruppi.
   (b) (**1 punto**) Si calcoli $Ker(\phi)$.
   (c) (**3 punti**) Si usi il teorema fondamentale dell'omomorfismo per dimostrare che il sottogruppo H di G generato dall'elemento $((123), \overline{2})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   (d) (**3 punti**) Si trovi una catena $N_0 = 0 \leq N_1 \leq N_2 \leq G$ di sottogruppi di G tale che N_{i-1} è un sottogruppo normale di N_i e N_i/N_{i-1} è abeliano. Si concluda che G è risolubile.

2. Si decida se i seguenti polinomi sono irriducibili:

   (a) (**2 punti**) $16x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (b) $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (c) (**2 punti**) $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.
   (d) $15x^2 + 11x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.
   (e) (**2 punti**) $x^8 + 3x^4 + 15x^3 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (f) (**3 punti**) $x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 21 \in \mathbb{Q}[x]$.

3. Siano $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e $f = x^4 - 2 \in K[x]$.

   (a) (**2 punti**) Si verifichi che K contiene tutte le radici quarte dell'unità.
   (b) (**3 punti**) Si verifichi che f è irriducibile su K.
   (c) (**4 punti**) Sia α una radice di f in una estensione E di K. Si dimostri che $K(\alpha)$ è il campo di riducibilità completa di f su K.
   (d) (**5 punti**) Si trovino gli elementi del gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(f/K)$ e si esibisca un'isomorfismo tra $\mathrm{Gal}(f/K)$ e $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

4. Si dimostri che:

   (a) (**4 punti**) La equazione $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ su $\mathbb{Q}$ è risolubile per radicali;
   (b) (**4 punti**) La equazione $f = 0$, dove f è un polinomio in $\mathbb{Q}[X]$ tale che $|Gal(f/\mathbb{Q})| \leq 8$, è risolubile per radicali.

5. Gli esercizi seguenti sono dedicati alle *formule di Cardano-Tartaglia-Del Ferro* per la risoluzione di un'equazione cubica. Su un campo K di caratteristica zero che contenga una radice primitiva terza dell'unità $z \in E_3(K)$, consideriamo il polinomio

$$f = x^3 + px + q \in K[x].$$

Siano E un campo di riducibilità completa di f su K e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E$ gli zeri di f.

Siano inoltre

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) \in E$$
$$\Delta = \delta^2 = -4p^3 - 27q^2 \in K$$

dove Δ è il discriminante di f.

(a) Si verifichi che:

i. Le funzioni elementari simmetriche $\tilde{s_1}, \tilde{s_2}, \tilde{s_3}$ nelle variabili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soddisfano
$\tilde{s_1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$
$\tilde{s_2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = p$
$\tilde{s_3} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q$

ii. $\delta = {\alpha_1}^2\alpha_2 + {\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_3}^2\alpha_1 - {\alpha_1}^2\alpha_3 - {\alpha_2}^2\alpha_1 - {\alpha_3}^2\alpha_2$

iii. $3(z-z^2)\delta - 3\sum_{i\neq j} {\alpha_i}^2\alpha_j = 6z({\alpha_1}^2\alpha_2 + {\alpha_2}^2\alpha_3 + {\alpha_3}^2\alpha_1) + 6z^2({\alpha_1}^2\alpha_3 + {\alpha_2}^2\alpha_1 + {\alpha_3}^2\alpha_2)$

(b) Consideriamo gli elementi

$$\alpha = \alpha_1 + z\alpha_2 + z^2\alpha_3, \quad \beta = \alpha_1 + z^2\alpha_2 + z\alpha_3 \in E$$

Si verifichi che:

i. $2\alpha^3 + 27q = 3(z-z^2)\delta, \quad 2\beta^3 + 27q = -3(z-z^2)\delta \quad$ e $\quad \alpha\beta = -3p.$

ii. Gli elementi $a = \frac{\alpha^3}{27}$, $b = \frac{\beta^3}{27}$ appartengono a $K(\delta)$ e sono gli zeri del polinomio

$$g = x^2 + qx - (\tfrac{p}{3})^3 \in K[x].$$

(c) Esistono $u, v \in E$ tali che l'elemento u è una radice terza di $a \in K(\delta)$, l'elemento v una radice terza di $b \in K(\delta)$ e $3uv = -p$. In tal caso $u+v$ è uno zero di f e

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{u+v, z^2u + zv, zu + z^2v\}$$

(d) i. (**3 punti**) Un polinomio $f = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ ha tre zeri distinti in $\mathbb{R}$ se $\Delta > 0$, al più due zeri distinti in $\mathbb{R}$ se $\Delta = 0$, uno zero in $\mathbb{R}$ e due zeri coniugati in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se $\Delta < 0$.

ii. (**4 punti**) Si trovino gli zeri del polinomio $x^3 - 2x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ e si determini $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$.

6. Gli esercizi seguenti sono dedicati alle formule risolutive per un'equazione di quarto grado $x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4 = 0$ su un campo F di caratteristica diversa da 2 e 3.

(a) Si verifichi che, tramite un opportuno cambio di variabile, ci si riconduce all'equazione $f(y) = y^4 + py^2 + qy + r = 0$, con radici y_1, y_2, y_3, y_4 tali che $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

(b) Si consideri l'equazione $g(z) = z^3 - pz^2 + 4rz + 4pr - q^2 = 0$ (detta *risolvente cubica di f*). Si verifichi che le sue radici z_1, z_2, z_3 soddisfano le relazioni $z_1 = y_1y_2 + y_3y_4$, $z_2 = y_1y_3 + y_2y_4$, $z_3 = y_1y_4 + y_2y_3$.

(c) Sia $V =< 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) >\leq S_4$. Si verifichi che V è un sottogruppo normale di $S_4 = \mathrm{Gal}(F(y_1, y_2, y_3, y_4)/F)$ e che $Fix_F V = K$, con $K = F(z_1, z_2, z_3)$.

(d) Sia $G = \{1, (12)(34)\} \leq V$. Si verifichi che G è un sottogruppo normale di V e che $Fix_K G = F(y_1y_2, y_3y_4)$.

(e) Si trovi il grado dell'estensione $[F(y_1, y_2, y_3, y_4) : F(y_1y_2, y_3y_4)]$ e $[F(y_1y_2, y_3y_4) : K]$.

(f) Si verifichi che $(x - y_1y_2)(x - y_3y_4) = x^2 - z_1x + r$ e $(x - (y_1 + y_2))(x - (y_3 + y_4)) = x^2 + z_3z_4$.

(g) Si trovino formule per y_1, y_2, y_3 e y_4 in termini di z_1, z_2 e z_3 e di radici quadrate di elementi di K.

(h) Ricordando le formule risolutive per le equazioni di terzo grado, si trovino gli zeri del polinomio $x^4 - 2x^3 - 8x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

Consegna: martedí 19 gennaio, 15:30, all'inizio delle esercitazioni. Tutti gli esercizi consegnati saranno corretti, ma si osservi che solo alcuni esercizi hanno dei punti associati.