EX 3 fila B   Analisi Matematica 1   13 settembre 2013

Sia $f(x) = 2x \sin(x^2) e^{\cos(x^2)}$

Trovare l'area della regione piana compresa tra i grafici di f e -f tra i punti a=0 e $b=\sqrt{\pi/2}$ giustificando ogni passaggio.

Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale

Verificare se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ soddisfa il teorema fondamentale del calcolo integrale

Ris

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ integrabile in } [a,b] \\ x_0 \in [a,b] \\ F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\ f \text{ continua in } \bar{x} \end{array}\right| \Rightarrow F \text{ derivabile in } \bar{x} \text{ e } F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

Formula fondamentale del calcolo integrale

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } [a,b] \\ \text{se } G \text{ è una primitiva di } f \text{ in } [a,b] \end{array}\right| \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

$f(x) = 2x \sin x^2 e^{\cos x^2}$ è integrabile in $[0, \sqrt{\pi/2}]$ perché continua

$$\int e^{\cos(x^2)} 2x \sin x^2\,dx = -\int e^{\cos x^2}(-2x \sin x^2)\,dx = -e^{\cos(x^2)} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

integrazione per sostituzione

$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}$

$f' = e^{\square}$ $g(x) = \sin x^2$

$f = e^{\square}$ $g'(x) = +2x \cos x^2$

$$\Rightarrow A = \int_a^b f(x) - (-f(x))\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= -2\, e^{\cos(x^2)}\Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = -2\left(e^{\cos(\frac{\pi}{2})} - e^{\cos 0}\right) = -2\left(e^0 - e^1\right) = 2(e-1)$$

NOTA $f(x) = 0$ in $x = 0, \sqrt{\pi}$ $f(x) > 0$ in $(0, \sqrt{\pi}) \supset (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$