Tutoraggio Analisi II

dott.ssa Saoncella

Lezione del 7/12/2012

Esercizio 1.

Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Svolgimento

Si ha che $f(x,y)$ è una funzione continua su tutto $D\setminus\{(0,0)\}$ in quanto rapporto di funzioni continue. L'unico punto su cui si deve studiare la continuità è il punto $(x,y)=(0,0)$.
Per far ciò si calcola il limite di f per $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ e si verifica che il valore del limite coincida con il valore di f nel punto $(0,0)$.
Iniziamo con il calcolare il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

un modo per calcolarlo è quello di passare alle coordinate polari
Poniamo

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

quindi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 0$$

Siccome il valore trovato del limite non dipende dal parametro θ, possiamo concludere che il limite esiste e vale 0.
Proseguiamo calcolando il valore della funzione nell'origine. Si ha che

$$f(0,0) = 0.$$

Essendo che il valore di f in $(0,0)$ coincide con il valore del limite possiamo pertanto affermare che la funzione è continua in tutto il dominio di definizione.

ESERCIZIO 2

Discutere continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità nell'origine per le seguenti funzioni:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$

(2) $f(x,y) = \dfrac{\log(1+3y^3)}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$

3) $f(x,y) = \dfrac{\sin(y+\sqrt{|x|})\log(1+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0)=0$

SVOLGIMENTO

(1) Iniziamo con il verificare se la funzione è continua.

Proviamo a calcolare il limite lungo la curva $\gamma(t)=(t,t^3)$ (è facile osservare che lungo le direzioni principali vale 0).
Quindi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^6}{t^6+t^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Avendo trovato che il valore del limite non coincide con il valore della funzione nell'origine, si ha che la funzione non è continua.
Non essendo continua non può essere nemmeno differenziabile.
A questo punto ci mancano da studiare le derivate direzionali.
Osserviamo che la funzione è costante lungo gli assi e vale 0, quindi le due derivate parziali nell'origine sono nulle. Ma dobbiamo considerare anche tutte le altre direzioni.
Consideriamo un vettore generico $v=(v_x,v_y)$ dove $v_x\neq 0$ e $v_y\neq 0$.
Applicando la definizione di derivata direzionale si ha

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(v_x,v_y)\big)-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4 v_x^3 v_y}{t(t^6v_x^6+t^2v_y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\, v_x^3 v_y}{t^4v_x^6+v_y^2} = 0$$

Avendo trovato che il limite esiste e vale 0 possiamo affermare che tutte le derivate direzionali esistono e valgono 0.

2) Iniziamo con lo studio della continuità. Dobbiamo calcolare il limite di f nell'origine. Un modo di procedere è quello di maggiorare la funzione f con una funzione di cui si conosce il limite.
Vale la seguente maggiorazione:

$$|f(x,y)| \leq \left|\frac{\log(1+3y^3)}{y^2}\right| = \left|\frac{\log(1+3y^3)}{3y^3}\right| \cdot |3y| \to 0 \quad \text{per } y\to 0$$

Quindi possiamo affermare che il $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

Pertanto la funzione è continua in $(0,0)$.
Per quanto riguarda le derivate direzionali andiamo ad applicare la definizione. Consideriamo un vettore generico $v=(v_x,v_y)$, quindi

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(v_x,v_y)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+3t^3v_y^3)}{t(t^2v_x^2+t^2v_y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+3t^3v_y^3)}{(v_x^2+v_y^2)} \cdot \frac{3v_y^3}{3t^3v_y^3} = \frac{3v_y^3}{v_x^2+v_y^2} \quad (*)$$

Le derivate direzionali esistono. Calcoliamo quelle lungo le direzioni principali. Siccome la funzione è costante lungo l'asse $y=0$ si ha che $\partial_x f(0,0)=0$. Mentre

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+3t^3)}{t^3} \cdot \frac{3}{3} = 3$$

NOTA: Si poteva calcolare $\partial_y f(0,0)$ molto più velocemente senza riapplicare la definizione tramite il risultato trovato in $(*)$ dove si poneva $v_x=0$ e $v_y=1$ in quanto il vettore $v=(0,1)$ sta ad indicare l'asse y.

Studiamo ora la differenziabilità. In base alla definizione dobbiamo verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - Df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

dove $Df(x_0,y_0)$ è una mappa lineare tale che

$$Df(x_0,y_0)(x,y) = \partial_x f(x_0,y_0)x + \partial_y f(x_0,y_0)y$$

Nel nostro caso $x_0 = y_0 = 0$ e $f(0,0) = 0$, mentre

$$Df(0,0)(x,y) = \partial_x f(0,0)x + \partial_y f(0,0)y = 3y$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\log(1+3y^3)}{x^2+y^2} - 3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+3y^3) - 3y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\log(1+3y^3) - 3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

Proviamo a calcolare il limite lungo la curva $\gamma(t) = (t,t)$, si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+3t^3) - 3t^3}{2^{3/2}t^3} - \frac{3t^3}{2^{3/2}t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\log(1+3t^3) - 3t^3}{t^3} - 3 \right) = \frac{-3}{\sqrt{8}}$$

avendo trovato che il valore del limite è diverso da zero possiamo affermare che il differenziale non esiste.

3) Studiamo la continuità. Vale la seguente maggiorazione

$$|f(x,y)| \leq |\sin(y+x)| \cdot \underbrace{\left| \frac{\log(1+y^2)}{y^2} \right|}_{\to 1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

avendo trovato che il limite esiste possiamo affermare che la funzione è continua. Studiamo ora le derivate direzionali. Dato $v = (v_x, v_y)$ calcoliamo

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(v_x, v_y)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(tv_y + tv_x) \cdot \log(1+t^2v_y^2)}{t\,(t^2v_x^2 + t^2v_y^2)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(tv_y + tv_x)}{tv_y + \sqrt{|tv_x|}} \cdot \frac{\log(1+t^2v_y^2)}{t^2v_y^2} \cdot \frac{v_y^2(tv_y + tv_x)}{t(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2}$$

quindi le derivate direzionali esistono.
La funzione è costante lungo l'asse $y=0$, quindi $\partial_x f(0,0)=0$.
Mentre

$$\partial_y f(0,0) = 1.$$

Quindi abbiamo trovato che

$$Df(0,0)(x,y) = y$$

Ma allora se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(y+x)\log(1+y^2)}{x^2+y^2} - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(y+x)\log(1+y^2) - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(y+x)\log(1+y^2) - y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

che calcolato lungo la curva $\gamma(t) = (t,t)$ diventa

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)\log(1+t^2) - t^3}{2^{3/2}t^3} - \frac{t^3}{2^{3/2}t^3} = \frac{-1}{2^{3/2}} \neq 0$$

quindi la funzione non è differenziabile.