Degenerazione e ciclo

Consideriamo il seguente problema di Programmazione Lineare in forma standard, pubblicato da E.M.L. Beale in Nav. Res. Logistic Quart., Vol.2 (1955):

$$\begin{cases} \min\ (-\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4) \\ \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

che produce la seguente tabella del simplesso

$-z$	0	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
x_5	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0
x_6	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

La soluzione di base ammissibile $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ è ovviamente degenere.
Ad ogni passo, come variabile entrante in base si sceglie quella per cui la corrispondente componente del vettore dei costi ridotti risulta minore. Al primo passo, quindi, la variabile che entra in base è x_1; cercando il minimo dei rapporti si ottiene $\frac{0}{14} = 0$, $\frac{0}{1/2} = 0$.
Eseguendo dapprima un'operazione di cardine su $\frac{1}{4}$ e iterando poi il procedimento, si ottengono le seguenti tabelle (in cui l'elemento su cui si fa cardine è evidenziato nel cerchietto):

Passo 1

$-z$	0	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
x_5	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0
x_6	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

Passo 2

$-z$	0	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0
x_1	0	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0
x_6	0	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

Passo 3

$-z$	0	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0
x_1	0	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0
x_2	0	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

`Passo 4`

$-z$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0
x_3	0	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0
x_2	0	$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0
x_7	1	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1

`Passo 5`

$-z$	0	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0
x_3	0	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0
x_4	0	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_7	1	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1

`Passo 6`

$-z$	0	$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0
x_5	0	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0
x_4	0	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

Eseguendo infine un'operazione di cardine su $\frac{1}{3}$, si ottiene di nuovo la prima tabella; siamo quindi in presenza di un ciclo.

La regola anticiclo, pubblicata da R.G. Bland nel 1977 su Math. Oper. Res., Vol.2, afferma quanto segue:

- tra tutte le possibili variabili entranti in base, selezionare quella con indice minore;
- tra tutte le possibili variabili uscenti di base, selezionare quella con indice minore.

Applichiamo tale regola al precedente esempio. Riprendiamo dal Passo 5: anziché far entrare in base x_5, facciamo entrare in base x_1. Esce x_7, quindi facciamo cardine su $\frac{125}{2}$ ed otteniamo la seguente tabella:

$-z$	$\frac{1}{125}$	0	36	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{125}$
x_3	1	0	0	1	0	0	0	1
x_4	$\frac{1}{250}$	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{250}$
x_1	$\frac{2}{125}$	1	-168	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{125}$

Siamo usciti dal ciclo, infatti la nuova soluzione ammissibile è: $(\frac{2}{125}, 0, 1, \frac{1}{250}, 0, 0, 0)$.

Facendo entrare x_5 ed uscire x_4 otteniamo la tabella ottima:

$-z$	$\frac{1}{20}$	0	15	0	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{20}$
x_3	1	0	0	1	0	0	0	1
x_5	$\frac{3}{100}$	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$
x_1	$\frac{1}{25}$	1	-180	0	6	0	2	$\frac{1}{25}$