Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

8 settembre 2009

1. Si dia la definizione di ideale primo e si dia un esempio di ideale primo non massimale. (*3 punti*)

2. Data un'estensione di campi $K \subset F$, si definisca il polinomio minimo di un elemento $\alpha \in F$ su K. (*3 punti*)

3. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati.
   (a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$ è un'estensione di Galois.
   (b) Esiste un isomorfismo di campi $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 7) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$.
   (c) $x^3 + x^2 + 2x + 2$ è un polinomio irriducibile su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

   (*6 punti*)

4. Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile di grado 3 che possiede un unico zero reale. Sia L il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$. Si determini $[L : \mathbb{Q}]$. (*6 punti*)

5. Si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $f = x^4 + 1$ su $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. (*6 punti*)

6. Siano p e q due numeri primi. Si dimostri che ogni gruppo di ordine pq è risolubile. (*6 punti*)