Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 4
24 ottobre 2012

1. Sia p un numero primo. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}_p = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ p$ non divide $n\}$. Si verifichi che:

   (a) $\mathbb{Z}_p$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

   (b) $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}_p$ è invertibile se e solo se p non divide m.

   (c) L'insieme M degli elementi non invertibili è un ideale di $\mathbb{Z}_p$. È principale?

   (d) l'anello $\mathbb{Z}_p/M$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si deduca che M è un ideale massimale di $\mathbb{Z}_p$.

   (6 punti)

2. Sia B l'anello delle successioni limitate di numeri reali (una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali si dice limitata se esiste $M > 0$ tale che $|x_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; la somma e il prodotto si eseguono termine a termine.)

   (a) Si verifichi che una successione non nulla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ è un divisore di zero in B se e solo se $x_m = 0$ per qualche $m \in \mathbb{N}$.

   (b) È vero che ogni elemento non nullo di B che non è divisore di zero è invertibile?

   (c) si verifichi che l'insieme $I = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B | \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ è un ideale di B.

   (6 punti)

3. Siano $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ e $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + i\,b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei numeri *interi di Gauss*. Sia inoltre $\delta : R \to \mathbb{N}_0,\ x = a + i\,b \mapsto |\, x\,|^2 = a^2 + b^2$.

   (a) Si verifichi che R è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

   (b) Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si trovi $q \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $|\, z - q\,|^2 \leq \frac{1}{2}$.

   (c) Si dimostri che (R, δ) è un anello euclideo.

   (d) Si determini l'insieme degli elementi invertibili R^*.

   (*8 punti*)

4. **Teorema Cinese dei Resti:**

   (a) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Si dimostri che l'applicazione

   $$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ x \mapsto (x + n\mathbb{Z}, x + m\mathbb{Z})$$

   induce un isomorfismo

   $$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

   (b) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si trovi $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}$ e $x + m\mathbb{Z} = b + m\mathbb{Z}$ (si ricordi che la classe di resto $n + m\mathbb{Z}$ è invertibile in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e la classe di resto $m + n\mathbb{Z}$ è invertibile in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$!)

   (c) Si risolva il problema di Sun-Tsu (Cina, I secolo a.C.): si determini un numero naturale x con resto 2 se diviso per 3, resto 3 se diviso per 5, e resto 2 se diviso per 7.

(8 punti)

5. Sia R un anello commutativo. Un elemento $z \in R$ si dice *nilpotente* se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $r^n = 0$.

   (a) Si verifichi che se $z \in R$ è nilpotente allora $1 - z$ è invertibile (sugg: $1 - z^n = (1 - z)(1 + z + \cdots + z^{n-1})$

   (b) Sia $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x]$ l'anello dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Sia $f = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \cdots + \overline{a}_m x^m$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Si verifichi che f è nilpotente se e solo se tutti gli a_i sono pari.

   (c) Si verifichi che f è invertibile se e solo se a_0 è dispari e ogni a_i con $i > 0$ è pari.

(**)

Consegna: mercoledì 31 ottobre durante la lezione.