Ricevimento del 19 Gennaio 2011

Davide Boscaini

Queste sono le note del ricevimento del 19 Gennaio. Per gli errori fatti a lezione ho preferito scrivere queste poche pagine, con l'auspicio di una maggiore chiarezza. Invito chi trovasse ulteriori errori a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1. Studiare la funzione di $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}$.

Soluzione. 1. Dominio: per quanto riguarda il dominio della funzione, le condizioni da imporre sono due: l'argomento della radice dev'essere non negativo e il denominatore della frazione dev'essere diverso da zero. Queste due condizioni si possono riassumere nella richiesta

$$\frac{x^2-6}{x} \geq 0,$$

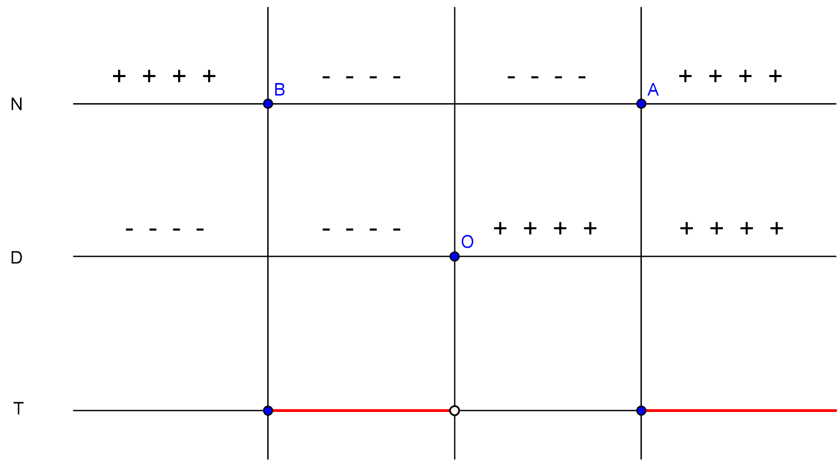
la cui soluzione è ottenibile risolvendo il sistema seguente

$$\begin{cases} x^2 - 6 \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

L'equazione $x^2 - 6 = 0$ rappresenta una parabola rivolta verso l'alto e intersecante l'asse x nei punti $A = (\sqrt{6}, 0)$ e $B = (-\sqrt{6}, 0)$. Per cui la soluzione della prima disequazione è data dai punti

$$x \leq -\sqrt{6} \cup x \geq \sqrt{6}.$$

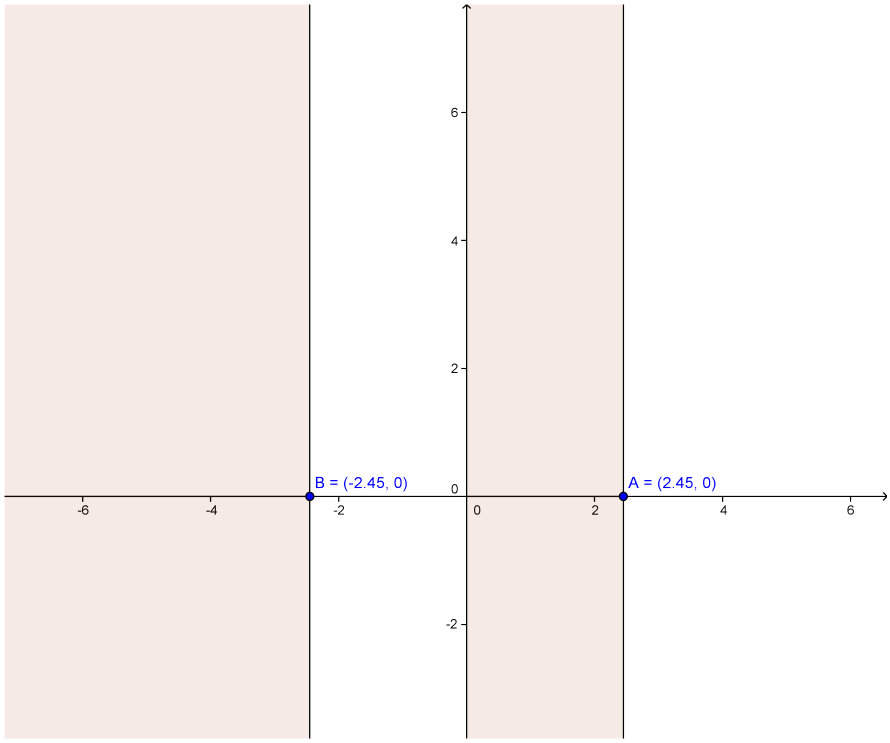
La soluzione globale del sistema, derivando esso da una frazione, si ottiene con la "tabella dei + e −":



In particolare in rosso si è evidenziata la soluzione del sistema. Quindi, se scegliamo di indicare con D l'insieme dei punti in cui la funzione esiste, si ha

$$D = \{-\sqrt{6} \leq x < 0\} \cup \{x \geq \sqrt{6}\},$$

che è la regione in colore bianco nella seguente immagine:



2. Intersezione con gli assi cartesiani: cominciamo con l'intersezione con l'asse delle ordinate, ovvero

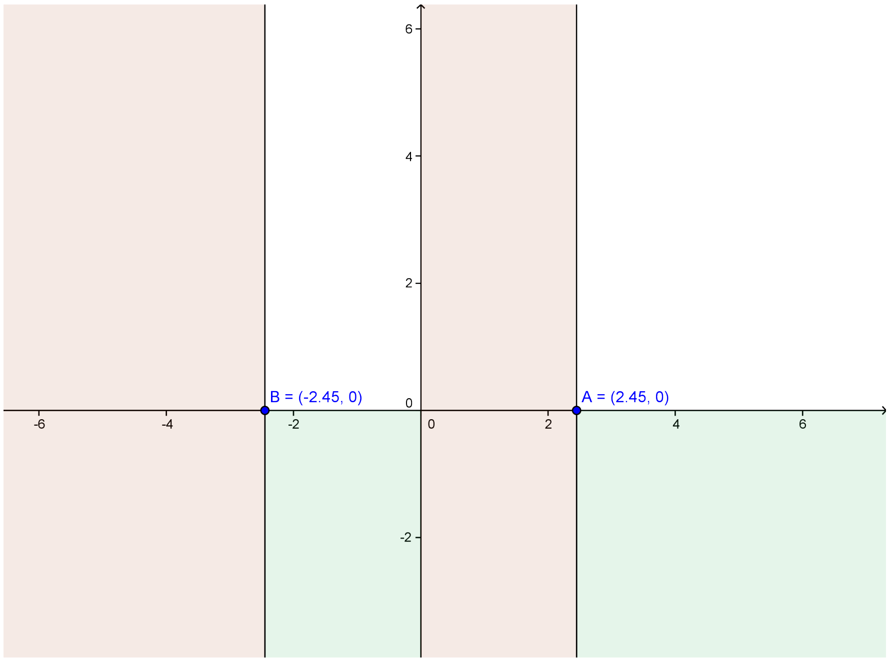
$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}, \\ x = 0. \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema non ha soluzione: la funzione non interseca l'asse y. Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle ascisse il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}, \\ y = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è data dagli zeri dell'equazione $x^2 - 6 = 0$, che sono $x_1 = \sqrt{6}$ ed $x_2 = -\sqrt{6}$ (rispettivamente i punti A e B precedentemente individuati).

3. Segno: preso un qualsiasi $x \in D$, la radice sarà ben definita e quindi positiva. Quindi il segno della funzione è sempre positivo. Aggiorniamo quindi le informazioni ottenute sul comportamento della funzione sul piano cartesiano:



4. Limiti: l'unico punto in cui non conosciamo il comportamento della funzione è l'origine ($x = 0$), vorremmo inoltre conoscere il comportamento asintotico di f ($x = +\infty$). Calcoliamoci quindi i limiti corrispondenti:

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{x^2-6}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x - \frac{6}{x}} = \sqrt{0^- - (-\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-6}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2(1-6/x^2)}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(1-6/x^2)} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

Dal momento che, per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, ha senso chiedersi se ci sono asintoti obliqui. Ricordiamo che un asintoto obliquo del tipo $y = mx + q$ esiste se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} := m \quad \text{esiste finito e diverso da } 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx := q \quad \text{esiste finito.}$$

Nel nostro caso però

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2-6}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-6}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}\left(1-\frac{6}{x^2}\right)} = 0,$$

possiamo quindi concludere che non esiste alcun asintoto obliquo.

5. Derivata prima: dal momento che f è una funzione composta, per calcolarne la derivata prima dobbiamo seguire la *regola della catena*: sia $f(x) = g(h(x))$, allora

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x))h'(x).$$

Nel nostro caso la funzione $h(x)$ è la frazione $\frac{x^2-6}{x}$, mentre la funzione $g(y)$ è la radice quadrata $\sqrt{y}$. Tenendo conto di tutto ciò, si ha che la derivata prima è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-6}{x}\right)^{-1/2}\left(\frac{2xx-(x^2-6)1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}}\left(\frac{2x^2-x^2+6}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^2+6}{x^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}} \\ &= \frac{x^2+6}{2x^2\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}}. \end{aligned}$$

Notiamo innanzitutto che la derivata prima non esiste su tutto il dominio D, il suo denominatore infatti si annulla nei due punti A e B. Indicato allora con D' il dominio di $f'(x)$, si ha:

$$D' = D \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}.$$

6. Crescenza/decrescenza: sia ora $x \in D'$, ci chiediamo: per quali valori di x la funzione è crescente? Dalla teoria svolta a lezione sappiamo che questo coincide con la richiesta $f'(x) > 0$. Dobbiamo quindi individuare per quali $x \in D'$

$$\frac{x^2+6}{2x^2\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}} > 0.$$

Osserviamo ora che, al denominatore, compare come termine moltiplicativo la funzione di partenza f. Per quanto già visto grazie allo studio del segno (punto 3.), $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Questo sarà vero a maggior ragione in D', visto che $D' \subsetneq D$, quindi la condizione si semplifica in

$$\frac{x^2+6}{2x^2} > 0,$$

che è sempre verificata in D'. Di conseguenza, per ogni $x \in D'$, $f'(x) > 0$, quindi la funzione è sempre crescente.

7. Punti stazionari: come conseguenza del fatto che la funzione è sempre crescente si ha che non possono esistere minimi o massimi relativi in D'. Infatti, se per ogni $x \in D'$, $f'(x) > 0$ non può esistere un $\bar{x} \in D'$ tale per cui $f'(\bar{x}) = 0$, che, come noto, è la condizione di stazionarietà.

8. Derivata seconda: per cominciare possiamo vedere $f'(x)$ come prodotto di due funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{x^2+6}{2x^2}}_{\alpha(x)}\underbrace{\sqrt{\frac{x}{x^2-6}}}_{\beta(x)},$$

quindi per calcolare $f''(x)$ dobbiamo applicare la *regola di Leibniz* sulla derivata del prodotto di funzioni, che ricordo essere

$$(\alpha(x)\beta(x))' = \alpha'(x)\beta(x) + \alpha(x)\beta'(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \alpha'(x)\beta(x) + \alpha(x)\beta'(x) \\
&= \left(\frac{2x(2x^2) - (x^2+6)4x}{4x^4}\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-6}} + \left(\frac{x^2+6}{2x^2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}\left(\frac{x^2-6-2x^2}{(x^2-6)^2}\right) \\
&= -\frac{6}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x^2-6}} - \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}\frac{1}{4x^2}\frac{(x^2+6)^2}{(x^2-6)^2} \\
&= \frac{\dfrac{-24x(x^2-6) - x(x^2+6)^2}{4x^3(x^2-6)^2}}{\sqrt{\dfrac{x}{x^2-6}}} \\
&= -\frac{x^4+36x^2-108}{4x^2(x^2-6)^2}f(x).
\end{aligned}$$

Notiamo che tale funzione esiste per ogni $x \in D'$.

9. Punti di flesso: ci chiediamo se esistono dei punti in cui la funzione cambia concavità, ovvero per quali $x \in D'$

$$f''(x) = -\frac{x^4+36x^2-108}{4x^2(x^2-6)^2}f(x) = 0.$$

Ancora una volta notiamo che all'interno dell'espressione della derivata seconda compare la funzione di partenza. Ricordandoci che questa è sempre positiva su D', possiamo limitarci a chiedere che

$$-\frac{x^4+36x^2-108}{4x^2(x^2-6)^2} = 0 \text{ cioè } x^4+36x^2-108 = 0.$$

Sia ora $t = x^2$, quindi $x^4 + 36x^2 - 108 = t^2 + 36t - 108$ e l'equazione $t^2 + 36t - 108 = 0$ ha come soluzione

$$t_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 + 4 \cdot 108}}{2} = -18 \pm \sqrt{\frac{1296+432}{4}} = -18 \pm \sqrt{432} = -18 \pm 12\sqrt{3}.$$

Ricordandosi della sostituzione fatta segue facilmente che le quattro radici del polinomio di partenza sono

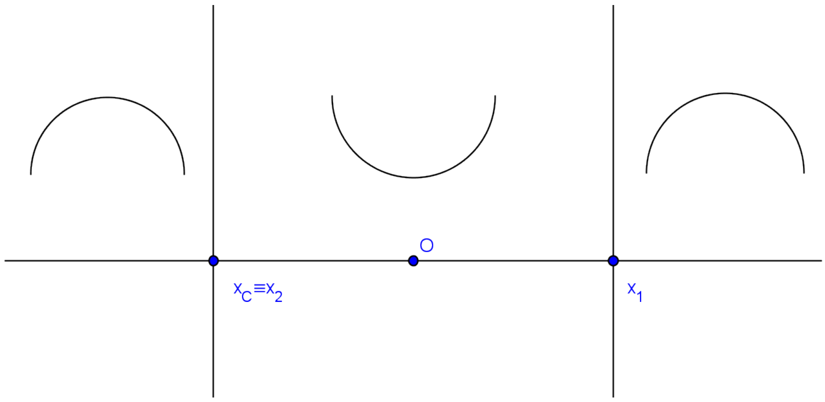
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-18+12\sqrt{3}} \text{ e } x_{3,4}\pm = \sqrt{-18-12\sqrt{3}}.$$

Dal momento che $12\sqrt{3} \approx 20.78$, solo $x_1 \approx 1.67$ e $x_2 \approx -1.67$ sono radici reali. Questo ci dice che il nostro grafico ha due cambi di concavità, anche se solo x_2 "cade" nel dominio della funzione (nel grafico finale tale punto è stato indicato con C e le relative coordinate con x_C ($\equiv x_2$) ed y_C).

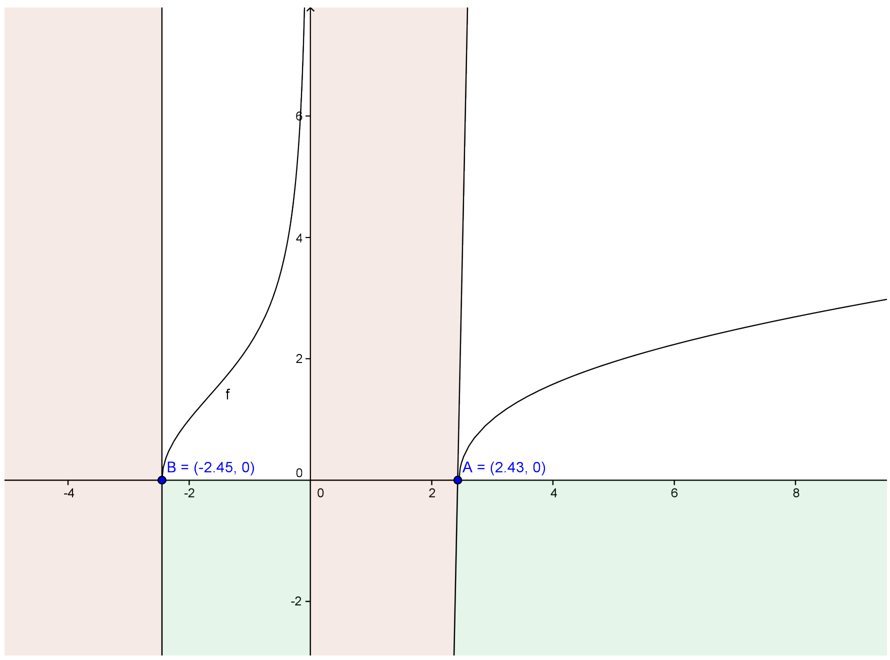
10. Convessità/concavità: per quanto riguarda lo studio del segno della derivata seconda ci chiediamo per quali $x \in D'$ $f''(x) > 0$, cioè in quali intervalli la funzione è convessa. Gran parte del lavoro è già stato fatto nel punto precedente, si tratta ora solo di trarre delle conclusioni: $y = t^2 + 36t - 108$ è l'equazione di una parabola rivolta verso l'alto e passante per i punti $P = (t_1, 0)$ e $Q = (t_2, 0)$. Quindi $t^2 + 36t - 108 < 0$ per $t_2 < t < t_1$, cioè se

$$\begin{cases} x^2 - t_1 < 0, \\ x^2 - t_2 > 0. \end{cases}$$

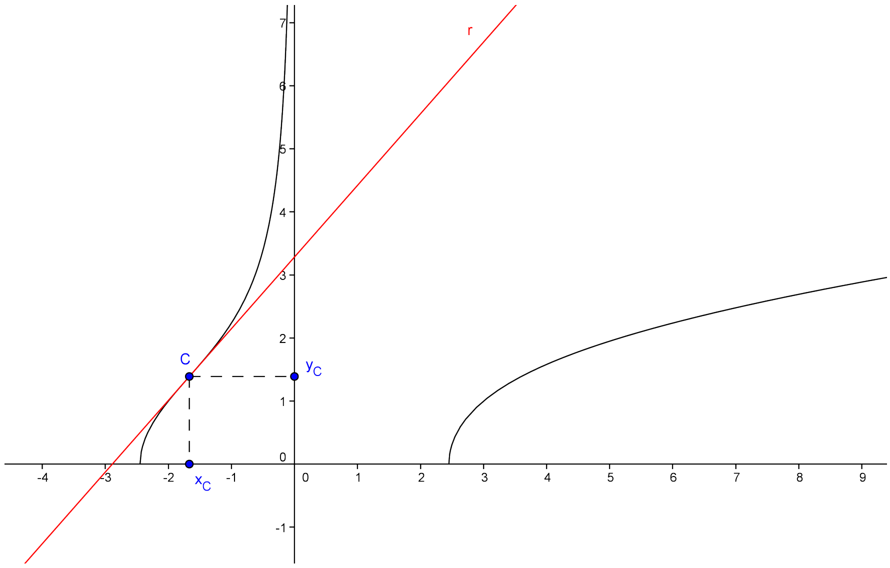
Ora $x^2 - t_1 < 0$ è verificato se $x_2 := -\sqrt{t_1} < x < \sqrt{t_1} := x_1$, mentre $x^2 - t_2 > 0$ è verificato per ogni $x \in D'$. In conclusione quindi $f''(x) > 0$ per $x_2 < x < x_1$. Si ha quindi:



11. Grafico definitivo: ora che abbiamo tutte le informazioni di cui necessitavamo possiamo tracciare il grafico definitivo della funzione data:



12. Ultime precisazioni: qui sotto potete infine trovare il particolare del flesso a tangente obliqua in C:



L'equazione della tangente obliqua del flesso è data da $r : y = f'(x_C) \cdot (x - x_C) + f(x_C)$, sostituendo quindi i valori di x_C, $f(x_C)$ ed $f'(x_C)$ nell'equazione si ottiene la retta

$$y = \frac{9\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-5\right) - \left(\sqrt{3}-3\right)\sqrt{2\sqrt{3}-3}\,x}{6^{3/4}\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-3\right)^{5/4}},$$

disegnata in rosso in figura.

Esercizio 2. Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2+3n+1}.$$

Soluzione. Per prima cosa controlliamo se la serie data soddisfa la condizione necessaria per la convergenza:

$$\text{se} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge, allora } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Se infatti tale condizione non è rispettata, la serie data non può convergere. Nel nostro caso

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+2/n)}{n^2(1+3/n+1/n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1+2/n}{1+3/n+1/n^2} = 0,$$

quindi la serie potrebbe essere convergente. Per secondo notiamo il fatto che la serie numerica è a termini positivi. La domanda da porsi ora è: tra i criteri di convergenza per le serie a termini positivi visti a lezione qual'è quello più adatto alla serie data? A lezione avete visto sostanzialmente tre criteri:

1. Criterio del rapporto: data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: \rho,$$

allora se $0 \leq \rho < 1$ la serie converge, se $\rho > 1$ la serie diverge a $+\infty$, mentre se $\rho = 1$ non otteniamo informazioni.

2. Criterio della radice: data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} =: \rho,$$

allora se $0 \leq \rho < 1$ la serie converge, se $\rho > 1$ la serie diverge a $+\infty$, mentre se $\rho = 1$ non otteniamo informazioni.

3. Criterio del confronto: data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$,

$$\text{se } a_n \geq b_n \geq 0 \text{ per ogni } n \text{ e se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty, \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty,$$
$$\text{se } a_n \leq b_n \text{ per ogni } n \text{ e se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty, \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Esiste anche una leggera variante del criterio del confronto, detto criterio del confronto asintotico, il quale afferma che: date due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, con $a_n, b_n \geq 0$, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =: c,$$

con $c \neq 0$, $c \neq +\infty$, e

$$\text{se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty, \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty,$$
$$\text{se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty, \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

Già dai calcoli fatti per il limite all'inizio dell'esercizio ci siamo resi conto che il termine generale a_n della serie, al crescere di n, si comporta sostanzialmente come $1/n$. Abbiamo quindi un'idea di come a_n va a zero per $n \to +\infty$: questo ci suggerisce di provare ad usare un criterio del confronto. Scegliamo di usare quello del confronto asintotico con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Dal momento che si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+2}{n^2+3n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+3n+1} = 1$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, possiamo concludere che la serie data diverge a $+\infty$.